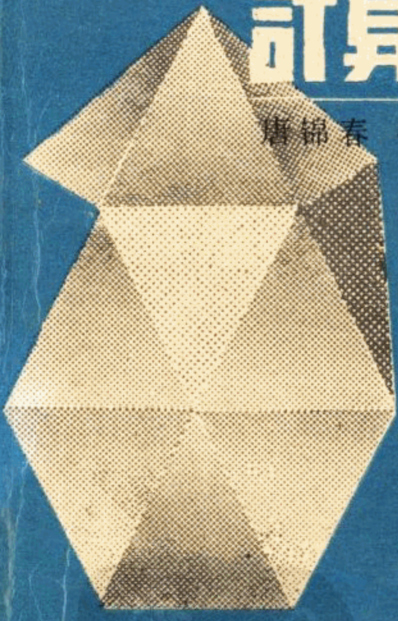
JISHUAN
JIEGOU
LIXUE

計算结构力学



唐锦春 孙炳楠 郭鼎康 编

浙江大学出版社

计算结构力学

唐锦春　孙炳楠　郭鼎康　编

浙江大学出版社

内 容 简 介

本书主要内容包括：有限单元法基础，加权残数法，B样条函数及其在加权残数法中的应用，弹性力学边界单元法，梁、板和壳的边界单元法和有限条法基础等，此外还附有通用程序，着重介绍上述各种计算方法的基本原理、计算公式和应用例题，内容浅近易懂、例题丰富、理论清晰、重于应用、适于自学。

本书可作为工科土木、机械、工程力学各专业的本科生和研究生的教学用书，以及有关工程技术人员的参考书。

计 算 结 构 力 学
唐锦春 孙炳楠 郭鼎康 编
责任编辑 朱谨准
浙江大学出版社出版
浙江大学印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本 850×1168 1/32 印张12.625 字数316.7千字
1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷
印数 1—3000
ISBN 7-308-00322-1

O.049 定价：3.20 元

前　言

自1982年以来，我们对研究生开设了“计算结构力学”课程，同时也作为大学本科生的选修课。本书是对该课程编写的教材经多次使用、逐年充实、修改而成。

本书的内容有加权残数法、边界单元法、有限条法，以及作为这些方法的先修章有限元法基础。多年来，各种专业和方向的研究生在学习本课程的基础上，在硕士论文的研究中大量地应用这些知识，例如加权残数法解钢结构的稳定问题，有限条法分析高层建筑，边界单元法分析平板弯曲，有限元与边界元耦合分析地基和结构的共同作用等等，这些研究既扩大了各种计算方法的应用，同时又发展了方法本身，充实了本书的内容。这些研究都得到了各方面专家的肯定和好评。因此，“计算结构力学”是一门基础技术，它可应用于各种学科和各个工程分支，并且由此推动了它本身的发展。

选修“计算结构力学”课程的学生，除了土木系结构工程、水工结构、岩土工程等专业外，还有力学、机械工程等其他专业的学生，因此本书可以作为各种专业的研究生教材。此外，本书的特点是以浅近易懂为原则，讲清基本原理，适用于自学。读者在此基础上，参考有关资料就可以用于各种工程问题的分析。因此本书对于工程技术人员也很为适用，对于未曾学过计算结构力学的人员，可以作为知识更新的一本教材。

全书共六章。第一章“有限单元法基础”由唐锦春主编，其中§1-4节由孙炳楠编写；第二章“加权残数法”和第三章“B样条函数及其在加权残数法中的应用”由唐锦春编写；第四章“弹性力学的边界单元法”和第五章“梁、板和壳的边界单元法”由

唐锦春，孙炳楠合编，第六章“有限条法”由郭鼎康编写。此外，许永林，项玉寅两同志对本书的某些部分以及第五章的附录作了较多的工作。全书由唐锦春，孙炳楠仔细校阅。但限于我们的水平和时间，许多方面定有不足或错误之处，恳切地希望专家同行和读者给予批评指正。

编　者

1988年10月

目 录

第一章　有限单元法基础

§1-1　有限单元法的发展和基本原理

一、有限单元法的发展

有限单元法是随着电子计算机的发展而发展起来的一种很为有效的数值方法。它的创立和应用在工程分析中具有重要的意义。

在国外，有限单元法在50年代中起源于航空工程中的飞机结构应力分析。开始时，工程师们把分析框架的矩阵位移法[1-3]推广应用到连续体，先用来求解弹性力学的平面问题[4,5]，再扩大到其他连续体结构。那时是作为一种经验方法，缺少理论基础，因此计算结果并不都是可靠的。60年代初，许多数学和力学工作者参加了有限单元法的研究，搞清了它的理论基础，使有限单元法得到了很大的发展。

在我国，有限单元法的发展实际上是60年代初就开始了。当时，为了分析水坝，把传统的有限差分法和能量原理结合起来作了许多尝试，沿着这条思路，我国著名数学家冯康教授和他的研究组提出了一种以变分原理为基础的三角形剖分的近似法，为偏微分方程求得了数值解，并在严密的数学基础上证明了它的收敛性、稳定性和误差估计。当时还编制了程序，并成功地解决了刘家峡水坝的应力分析和其它一些课题。这个方法实际上就是人们现在所熟知的有限单元法[6]。

有限单元法发展十分迅速，从结构分析发展到非结构分析，

从静力计算到动力计算，从弹性力学问题到塑性力学问题，几乎所有的连续介质和场问题中都得到应用。它的应用涉及到一切工程行业和科技领域，如土建、水工、桥梁、飞机、造船、航空、气象、导弹、污染、高能加速器、核反应堆等等，成了一个超行业、跨学科的新的学科分支。

在我国曾举行了多次全国性的有限单元法学术会议，交流了数千篇论文，还组织了许多有限单元法的讨论会、培训班。从70年代中开始，各高等学校开设了有限单元法课程，还出版了许多专著[7-14]。各设计院还拥有不少实用程序，使有限单元法得到普遍应用。

有限单元法在固体力学领域中的发展已比较成熟。国内外建立了许多大型有限单元通用程序，如美国Wilson教授的SAP5 (Structural Analysis Program5)，Bathe 教授的ADINA (Automatic Dynamic Increamental Non-linear Analysis) 和中国建筑科学研究负院责编制的“建筑工程设计软件包(BDP)”等。

有限单元法的主要优点是它有很强的适用性，应用范围相当广泛。它可以分析非均质材料，各向异性材料和非线性应力—应变关系的结构，也可以处理复杂边界条件等难题。此外，有限单元法概念浅近易懂，容易掌握。它可以在不同水平上去理解，既可以用直观的物理途径来掌握这一方法，也可以建立严格的数学解释。

二、基本原理

有限单元法主要用于对连续体的应力分析。连续体分析的传统方法是将工程问题简化成计算模型后，从研究微元体着手建立描述连续体的基本微分方程和边界条件，最后求得以数学表达式表示的解析解，从而得到体内任一点的未知量的值。然而，对于工程实际问题，由于结构几何形状不规则，荷载复杂和材料不均匀等，要得到解析解是十分困难的。

差分法[15-17]是把微分方程改为差分方程以求得近似解，它是一种数值方法，求得的是某些点的值。

有限单元法是另一种数值方法，设想把连续体分割成有限个单元，它们在结点上相连接，即以一个单元集合体来替代连续体；把作用在单元上的力等效地移到结点上；每个单元选择一个位移函数来表示位移分量的分布规律；按变分原理建立单元的结点力—结点位移的关系式；然后根据结点平衡条件，把所有的单元关系式集合形成一组以结点位移为未知量的代数方程组，从而解得各结点位移。

结构力学中的矩阵位移法也是把结构离散成许多单元，每根梁或柱作为一个单元，建立杆端力—杆端位移之间的关系式，然后按结点平衡条件得到以结点位移为未知量的线性代数方程组[1-3]。因此，可以把杆系结构的矩阵位移法叫做有限单元法的一维问题，而连续体中是有限单元法的二维问题（如平面问题）和三维问题（如空间问题）。也可以说，连续体的有限单元法是杆系结构矩阵位移法的推广。

杆系结构离散后一般是一根杆件为一个单元，单元之间仅有结点相联。而连续体离散成有限个单元后是把无限多自由度理想化为有限个自由度，是一种近似分析方法，只有在网格加密到一定程度后才接近精确。此外，连续体的单元之间还有交接边界，对于选择的位移函数必须保证边界有一定的连续性。

有限单元法的数学基础为分割近似原理，例如求曲线围成的面积，我们可以采用分段以直代曲的方法来求其近似值。分割越细，结果越精确。同样地，有限单元法把连续体分割成许多小单元，这些小单元可选用简单的位移分布函数。分割的网格越细，结果越精确。因此有限单元法可以分析许多复杂的问题，只要划分的网格有足够的细度，就能得到满意的精度。

§1-2　平面问题

一、概述

有限单元的应用首先得到成功的就是平面问题[4,5]（二 维弹性力学问题）。有限单元法解弹性力学平面问题不仅简单而且具有典型性，掌握了平面问题的分析方法就可以方便地推广到其它问题中去。本节将通过三结点三角形平面单元，介绍有限单元法在结构分析中应用的基本原理与方法。

任何一个物体都是三维空间物体，一般作用的外力也是空间力系，所以任何实际问题都属于空间问题。但如果物体具有特殊形式，承受特殊的外力，就可近似地化为平面问题，使分析的工作量大为减少而仍能满足工程上精度要求。

空间问题的应力向量，应变向量和位移向量为：

$$\left.\begin{aligned}\{\sigma\}&=[\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}]^T\\\{\varepsilon\}&=[\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}]^T\\\{f\}&=[u,v,w]^T\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}1)$$

把空间问题简化为平面问题后，就可以略去某些应力分量，应变分量和位移分量[18]。

有两类平面问题。第一类是平面应力问题，设有一均匀薄板，受平行于板面的外力作用，如深梁（图1-1），薄板的厚度为 t，其中面取为xy平面，z轴垂直于中面。由于板面上不受力，所以：

$$(\sigma_z)_{z=\pm t/2}=0$$

又因板很薄，可以认为薄板沿厚度所有各点有 $\sigma_z=0$，同样可得 $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$。此时，由物理方程可得 $\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$，而$\varepsilon_z$ 可由应力σ_x和σ_y得到，它不是一个独立变量。因此可不计与z轴有关的量。

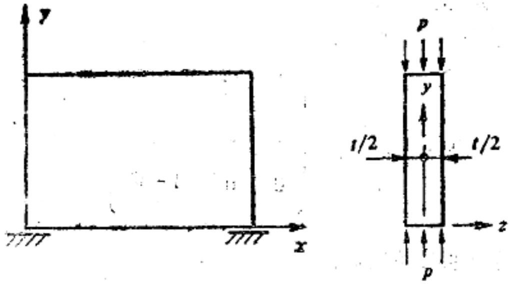


图1-1 深梁—平面应力问题

第二类是平面应变问题，设有无限长的柱形体，受到平行于横截面且不沿长度而改变的力，如重力坝（图1-2）。以任一横截面取为xy平面，变形分量和位移分量都不沿z方向变化。因此，可得$w=0$，$\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=0$，$\sigma_z$也可由$\sigma_x$和$\sigma_y$得到。因此也可略去与$z$有关的量。

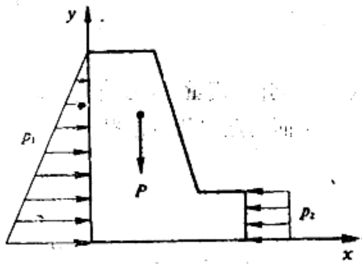


图1-2 重力坝—平面应变问题

两类平面问题的应力、应变和位移向量为：

$$\left.\begin{aligned}\{\sigma\}&=[\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}]^T\\\{\varepsilon\}&=[\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}]^T\\\{f\}&=[u,v]^T\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

平面问题的物理方程，如用矩阵形式表示，将是：

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}\tag{1-3}$$

式中$[D]$是弹性矩阵。

对于平面应力问题：

$$[D]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & 对 & \\ \nu & 1 & 称 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{1-4}$$

对于平面应变问题：

$$[D]=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & 对 & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 称 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\end{bmatrix} \tag{1-5}$$

式中E为弹性模量，ν为泊松系数。

平面问题的几何方程为：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix} \tag{1-6}$$

二、位移函数

下面，我们将对三结点三角形单元作有限单元分析。设单元的结点号为 i，j，m，每个结点在单元平面中（xy 平面）可以有二个位移分量（如图1-3所示）。整个单元共有6个结点位移分量，故单元结点位移向量为

$$\{\delta\}^e=[u_i,\ v_i,\ u_j,\ v_j,\ u_m,\ v_m]^T \tag{1-7}$$

首先要对单元内的位移分布作一定的假设，即假定位移分量是坐标的某种函数。这个位移函数使单元内各点位移可以由单元结点位移通过插值来获得。在分析中要用到应变和应力，有了位移函数就可以利用上节列出的几何方程求得应变分量，再利用物理方程得到应力分量。

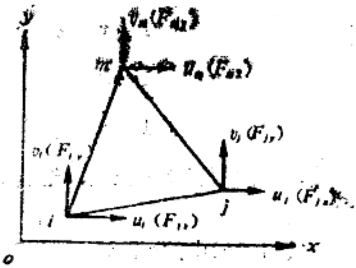


图1-3　三结点的三角形单元

因为划分的单元很小，理论和实践证明可以选用简单的多项式作为位移函数，取：

$$\left.\begin{aligned} u &= A_1 + A_2 x + A_3 y \\ v &= B_1 + B_2 x + B_3 y \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

式中A_1，A_2，A_3和B_1，B_2，B_3是待定常数。

分别将结点i，j，m的坐标代入(1-8)式，可得：

$$\begin{aligned} u_i &= A_1 + A_2 x_i + A_3 y_i; \quad v_i = B_1 + B_2 x_i + B_3 y_i \\ u_j &= A_1 + A_2 x_j + A_3 y_j; \quad v_j = B_1 + B_2 x_j + B_3 y_j \\ u_m &= A_1 + A_2 x_m + A_3 y_m; \quad v_m = B_1 + B_2 x_m + B_3 y_m \end{aligned} \tag{1-9}$$

由上式中的左边三个方程可求得：

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\Delta}\left(u_i a_i + u_j a_j + u_m a_m\right) \\ A_2 &= \frac{1}{2\Delta}\left(u_i b_i + u_j b_j + u_m b_m\right) \\ A_3 &= \frac{1}{2\Delta}\left(u_i c_i + u_j c_j + u_m c_m\right) \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

式中Δ为三角形ijm的面积，由解析几何可知：

$$2\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix} \tag{1-11}$$

为使求得的面积总是正值，结点 i，j，m 的次序必须是逆时针转向。

式(1-10)中的a_i，b_i，c_i分别为式(1-11)中行列式的第一行各元素的代数余子式，a_j，b_j，c_j为行列式的第二行各元素的代数余子式，a_m，b_m，c_m为第三行各元素的代数余子式，即：

$$\begin{aligned}
a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j\\ x_m & y_m\end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j\\
b_i &= -\begin{vmatrix} 1 & y_j\\ 1 & y_m\end{vmatrix} = y_j - y_m \qquad (i,j,m)\\
c_i &= \begin{vmatrix} 1 & x_j\\ 1 & x_m\end{vmatrix} = x_m - x_j
\end{aligned} \tag{1-12}$$

将公式(1-10)代入(1-8)式中，可得：

$$u=N_i u_i+N_j u_j+N_m u_m \tag{1-13}$$

式中N_i，N_j，N_m是坐标的函数，它们反映单元的位移状态，因此称做形函数：

$$N_i=\frac{1}{2\Delta}(a_i+b_i x+c_i y) \qquad (i,j,m) \tag{1-14}$$

同理可得

$$v=N_i v_i+N_j v_j+N_m v_m \tag{1-15}$$