新中學教科書

平面三角法

全一冊

編者

[illegible]

校者

[illegible]

中華書局印行

民國十二年三月印刷
民國十二年三月發行

新中學教科書平面三角法(全一册)
【定價銀八角】
(外埠另加郵滙費)

編者 吳興胡仁源
校者 江寧張鵬飛
發行者 中華書局
印刷者 中華書局
印刷所 上海靜安寺路一九二號 中華書局
總發行所 上海棋盤街 中華書局
分發行所 北京 天津 奉天 吉林 太原 長春 保定 張家口 石家莊 大同 濟南 東昌 煙台 開封 鄭州 西安 徐州 南京 蕪湖 安慶 南昌 九江 漢口 武昌 沙市 長沙 衡州 常德 成都 重慶 廣州 汕頭 潮州 福州 廈門 杭州 溫州 雲南 貴陽 新加坡 中華書局

新中學三角法教科書

目次

第一章　角度

第二章　銳角之三角函數

第三章　直角三角形之解法及應用

第四章 劣角之三角函數

第五章 兩角和及差之三角函數

第八章 任意三角形之解法及應用

附錄 三角反函數

新中學教科書

三角法

第一章

角度

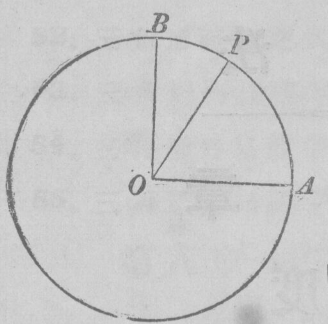
1. 角度制(System of Angular measure).

(1) 六十分制 (Sexagesimal System). 此制亦名英國制. 分一直角爲90等份,各曰一度 (Degree); 分一度爲60等份,各曰一分(minute); 復分一分爲60等份; 各曰一秒 (Second). 度分秒恒以符號 °,′,″,表之;例如 $40° 25' 20''$ 卽表四十度二十五分二十秒.

(2) 百分制 (Centesimal System). 此制亦名法國制. 分一直角爲100度 (Grades), 每度分爲100分,每分分爲100秒. 其符號爲 g, `, ``, 如 $30^g$ 15` 45``, 卽表三十度十五分四十五秒.

(3) 弧度制 (Circular System). 在任意圓周上,取與半徑等長之弧,此弧所對之圓心角,稱曰弧度單位(Radian).

無論半徑大小,弧度單位之大小,恒不變;證明如下:



以O為心,以r為半徑長,作圓.設AOB為直角,AP弧長等於r,則

$$\overset{\frown}{AP}=r,\ \overset{\frown}{AB}=\frac{\pi r}{2},$$

由是得 $$\frac{\angle AOP}{\angle AOB}=\frac{\overset{\frown}{AP}}{\overset{\frown}{AB}},$$

即 $$\frac{\angle AOP}{\text{直角}}=\frac{r}{\frac{\pi r}{2}}=\frac{2r}{\pi r}=\frac{2}{\pi}.$$

故 $\angle AOP=\frac{2\text{直角}}{\pi}$;

即 $\angle AOP$ 之量,無關於r,無關於半徑之大小,而

$$\text{弧度單位}=\frac{180^\circ}{31.416}=57^\circ.2956.$$

【注意一】 π 倍弧度單位,既等於二直角,則某角之弧度若為 π,必等於二直角;若為 $\frac{\pi}{2}$,必等於一直角;若為 2π,必等於四直角.

【注意二】 (1),(3) 二法,今皆通行. 凡以弧度計者,當曰弧度1,弧度2等,與六十分法中之1度,2度等有別.

2. 六十分度與弧度換算之式.

設 D度=弧度 θ,

則 $$\frac{D}{180}=\frac{\theta}{\pi}$$

由是得六十分度與弧度換算之二公式:

$$D=\frac{180}{\pi}\times\theta.$$

$$\theta=\frac{\pi}{180}\times D.$$

3. 六十分度與百分度換算之式.

設　D度＝G百分度

則
$$\frac{D}{90}=\frac{G}{100}$$

由是得二者換算之二公式:

$$D=\frac{9}{10}\times G=G-\frac{1}{10}G.$$

$$G=\frac{10}{9}\times D=D+\frac{1}{9}D.$$

4. 弧度與百分度換算之式.

設　弧度θ＝G百分度

則
$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{G}{200}.$$

由是得二者換算之公式:

$$\theta=\frac{\pi}{200}\times G.$$

$$G=\frac{200}{\pi}\times\theta.$$

第一習題

【注意】 凡題有六十分制或百分制中之分秒者,皆須先化爲度而後依公式換算之.

化下各數爲百分度:

1. $27°15'46''$.
2. $24'18''$.
3. $28°$.
4. $27°38'12''$.

化下各數爲六十分度:

5. $19^g\ 45'\ 95''$　　6. $29^g\ 75'$.

7. $15^g\ 0'\ 15''$,　　8. $\dfrac{\pi}{2}$.

9. $\dfrac{\pi}{6}$.　　10. $\dfrac{2}{3}\pi$.

化下各數爲弧度:

11. $66°$.　　12. $22°\ 30'$　　13. $12°\ 5'\ 4''$.

14. 50^g.　　15. $13^g\ 5'$.　　16. $13^g\ 5'\ 5''$

17. 等邊三角形之各角,以弧度計之,各爲幾何?

18. 兩角之差爲10^g,其和爲$45°$. 問各幾何.

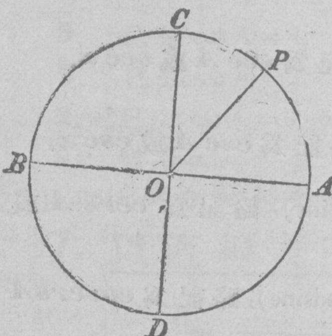
19. 有長2呎之弧,其半徑爲18吋. 該弧所對之圓心角爲若干度?

20. 有三角形:其一角爲2弧度;一角爲20六十分度. 第三角爲若干百分度?

第 二 章

銳角之三角函數

5. 四象限之角 (Angles in the Four Quadrants).

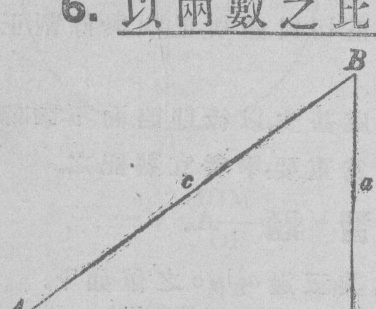


設AB, CD兩線直交,分任意圓爲四等份,各名爲一象限.

AOC名爲第一象限;COB名爲第二象限;BOD名爲第三象限;DOA名爲第四象限.

設OA爲固定之直線,名曰首線(Initial Line);OP以O爲中心,依時針反對之方向而迴轉,名曰迴線(Revolving Line);若OP在第一象限內,則AOP爲銳角,稱曰第一象限之角;若OP在第二象限內,則AOP爲鈍角,稱曰第二象限之角;餘倣此.

6. 以兩數之比表三角函數.



設有直角三角形ABC:各角之大爲A, B, C,或x, y, z, C或z爲90°; a, b, c爲與A, B, C三角相對各邊之長.(以後皆然.)由此得三角函數之定義如下:

$\dfrac{a}{c}$ =A角之正弦(Sine);

略記爲 $\sin A$ 或 $\sin x$.

$\dfrac{b}{c}$ = A 角之餘弦 (Cosine);略記爲 $\cos A$ 或 $\cos x$.

$\dfrac{a}{b}$ = A 角之正切 (Tangent);略記爲 $\tan A$ 或 $\tan x$.

$\dfrac{b}{a}$ = A 角之餘切 (Cotangent);略記爲 $\cot A$ 或 $\cot x$.

$\dfrac{c}{b}$ = A 角之正割 (Secant);略記爲 $\sec A$ 或 $\sec x$.

$\dfrac{c}{a}$ = A 角之餘割 (Cosecant);略記爲 $\csc A$ 或 $\csc x$.

$1-\cos A$ = A 角之正矢 (Versedsine);略記爲 $vers\,A$ 或 $Vers\,x$.

$1-\sin A$ = A 角之餘矢 (Coversedsine);略記爲 $covers\,A$ 或 $covers\,x$.

上列正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割,正矢,餘矢,謂之三角函數 (Trigonometrical Functions);或名曰圓函數 (Circular Functions)

【注意一】正弦與餘弦,正切與餘切,正割與餘割,正矢與餘矢,互稱爲餘函數.

【注意二】正矢餘矢,用處甚少,以後即略而不論;餘六數爲全部三角法之主體,極爲重要,學者宜熟記之.

第二習題 A.

1. 設直角三角形 ABC,其三邊 a, b, c 之值如下.求 A 角之各函數.

(1) 3, 4, 5. (2) 8, 15, 17,

(3) 5, 12, 13. (4) 9, 40, 41.

2. 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$, $c=20.5$. 求 a.

3. 已知 $\cos A=0.44$, $c=3.5$. 求 b.

4. 已知 $\tan A=\frac{11}{3}$, $b=2\frac{5}{11}$. 求 a.

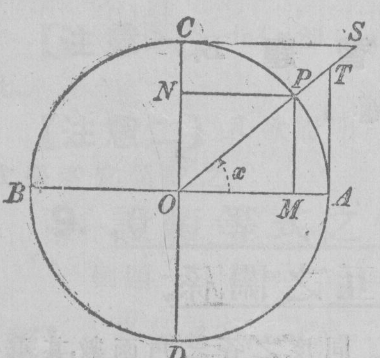
5. 已知 $\cot A=4$, $a=17$. 求 b.

6. 已知 $\sec A=2$, $b=20$. 求 c.

7. 已知 $\csc A=6.45$, $a=35.6$. 求 c.

8. 欲令 a, b, c 爲三邊長,作成直角三角形,c 爲其弦之長,則 a, b, c 三數,須滿足如何之條件?

7. 以直線表三角函數.



以單位之長爲半徑,作圓(名曰單位圓),作AB,CD兩全徑互相直交. 設迴線OP,由首線OA之位置迴轉至OP,成銳角 x. 又作MP,直交OA; NP直交OC. 作AT, CS兩切線. 於是因OA,OP,OC均爲半徑,各等於1,而得

$$\sin x=\frac{MP}{OP}=MP.$$

$$\cos x=\frac{OM}{OP}=OM.$$

$$\tan x=\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}=AT.$$

$$\cot x=\frac{OM}{MP}=\frac{CS}{OC}=CS.$$

$$\sec x=\frac{OP}{OM}=\frac{OT}{OA}=OT.$$

$$\csc x=\frac{OP}{MP}=\frac{OS}{OC}=OS.$$

$$\text{vers}\, x=1-OM=MA.$$

$$\text{covers}\, x=1-ON=NC.$$

故昔稱三角函數爲八線.

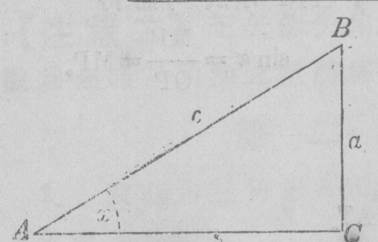
此八式與前節之式形異而實同. 若於前節圖中,自AB取AP等於1,作AC之垂線MP,卽知$\frac{a}{c}=\frac{MP}{AP}=MP$,與$\frac{MP}{OP}=MP$無異;其餘可以類推.

第二習題 B.

設x爲銳角,證明下三題:

1. $\sin x<\tan x$.
2. $\sec x>\tan x$.
3. $\csc x>\cot x$.

8. 三角函數相互之關係.



同度之各三角函數,其重要之關係如次:

$$\sin x\csc x=\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$$

....【I】

$$\cos x \sec x = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{【II】}$$

$$\tan x \cot x = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{【III】}$$

$$\tan x = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdots\cdots \text{【IV】}$$

$$\cot x = \frac{b}{a} = \frac{b}{c} \div \frac{a}{c} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdots\cdots \text{【V】}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{c^2}{c^2} = 1 \text{【VI】}$$

$$1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \sec^2 x \cdots \text{【VII】}$$

$$1 + \cot^2 x = 1 + \left(\frac{}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \csc^2 x \text{【VIII】}$$

【注意一】 $\sin^2 x$ 即 $(\sin x)^2$, $\cos^2 x$ 即 $(\cos x)^2$, 其餘倣此.

【注意二】 凡欲證明三角函數恒等式,必須用上八式,學者宜熟記之.

9. 證恒等式之例.

例題一. 證 $\sec^2 A + \csc^2 A = ec^2 A \csc^2 A$.

【證】

$$\sec^2 A + \csc^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A \sin^2 A}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A \sin^2 A} = \sec^2 A \csc^2 A$$

例題二. 證 $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2\sin^2 A \cos^2 A$

【證】 $\sin^4 A + \cos^4 A$

$=\sin^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A-2\sin^2 A\cos^2 A$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A$

$=1-2\sin^2 A\cos^2 A$

例題三. 證 $\dfrac{\csc A-\sec A}{\cot A+\tan A}=\dfrac{\cot A-\tan A}{\csc A+\sec A}$

【證】 $\because$ $\csc^2 A=1+\cot^2 A,\quad \sec^2 A=1+\tan^2 A,$

則 $\csc^2 A-\sec^2 A=\cot^2 A-\tan^2 A;$

故 $(\csc A-\sec A)(\csc A+\sec A)=(\cot A-\tan A)(\cot A+\tan A)$

$\therefore$ $\dfrac{\csc A-\sec A}{\cot A+\tan A}=\dfrac{\cot A-\tan A}{\csc A+\sec A}.$

第二習題 C.

證明下列各恒等式:

1. $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A\sin^2 A.$
2. $\cot^2 A-\cos^2 A=\cot^2 A\cos^2 A.$
3. $\sec A-\cos A=\tan A\sin A.$
4. $\tan A\sin A+\cos A=\sec A.$
5. $\cos A\csc A\tan A=1.$
6. $(1-\sin^2 A)\tan^2 A=\sin^2 A.$
7. $\tan^2 A\cos^2 A+\cos^2 A=1.$
8. $\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}=\sec A\csc A.$
9. $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2.$
10. $\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}.$
11. $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}.$

12. $\tan A\cos A=\sqrt{1-\cos^2 A}$.

13. $\dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$.

14. $\csc A-\sin A=\cos A\cot A$.

15. $\dfrac{1}{1+\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\cot^2 A}=1$.

16. $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}=(\csc A-\cot A)^2$.

17. $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}$.

18. $\sin^3 A\cos A+\cos^3 A\sin A=\sin A\cos A$.

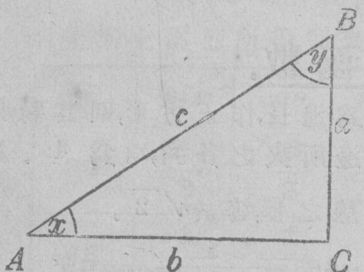
19. $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\csc A+\sec A$.

20. $(1+\tan A)^2+(1+\cot A)^2=(\sec A+\csc A)^2$.

21. $(\cos^2 A+\cot^2 A)\tan^2 A=\sec^2 A+(\cos^2 A-1)\tan^2 A$.

22. $\sin^2 A\tan A+\cos^2 A\cot A+2\sin A\cos A=\tan A+\cot A$.

10. 餘角之三角函數.



於直角三角形ABC內，設 $x+y=90°$，則 $y=90°-x$.

B角名曰A角之餘角. 今以A角之三角函數表B角之函數如下:

$$\sin(90°-x)=\frac{b}{c}$$

$$=\cos x.$$

$$\cos(90°-x)=\frac{a}{c}=\sin x.$$