



中 華 書 局 發 行

新到

美 德  
文 具 儀 器

本局新自美國德國運到各種自來墨水筆、寒暑表、寫字墨水、繪圖墨水、筆尖、鉛筆、測量器械、信箋、信封、足球、油畫顏料、水彩顏料等文具儀器物品精良。定價克己。均照原價發售。惠顧諸君。駕臨或郵函接洽均所歡迎。

新六(643)

有 著 作 權 不 准 翻 印

民國十二年三月印刷  
民國十二年三月發行  
贈

新中學教科書

【定價銀八角】

(外埠另加郵滙費)

編者 吳興胡仁源

校者 江寧張鵬飛

發行者 中華書局

印刷者 中華書局

印刷所 中華書局

總發行所 中華書局

分發行所

北京 天津 奉天 吉林 太原 長春  
保定 張家口 石家莊 大同 濟南  
東昌 煙台 開封 鄭州 西安  
徐州 南京 蕪湖 安慶 南昌  
九江 漢口 武昌 沙市 長沙  
衡州 常德 重慶 廣州  
汕頭 福州 廈門 杭州  
溫州 雲南 貴陽 新加坡

# 新中學三角法教科書

## 目次

### 第一章 角度

	頁數
1. 角度制.....	1
2. 六十分度與弧度換算之式.....	2
3. 六十分度與百分度換算之式.....	3
4. 弧度與百分度換算之式.....	3

### 第二章 銳角之三角函數

5. 四象限之角.....	5
6. 以兩數之比表三角函數.....	5
7. 以直線表三角函數.....	7
8. 三角函數相互之關係.....	8
9. 證恒等式之例.....	9
10. 餘角之三角函數.....	11
11. $45^\circ$ 角之三角函數.....	12
12. $30^\circ, 60^\circ$ 角之三角函數.....	13
13. 解方程式之例.....	14

### 第三章 直角三角形之解法及應用

14. 解三角形.....	15
15. 三角函數表之用法.....	15



16. 角度與函數互求之例.....	頁數 15
17. 解直角三角形之公式.....	17
18. 直角三角形解法 .....	17
19. 測高及距離之各名詞.....	19
20. 解應用問題之例 .....	20

#### 第四章 劣角之三角函數

21. 直線之方向.....	24
22. 點之位置 .....	24
23. 任意角之大小 .....	26
24. 任意角之正負 .....	27
25. 劣角之三角函數 .....	27
26. 三角函數之正負 .....	29
27. 無窮大之意義 .....	30
28. $0^\circ, 90^\circ$ 角之三角函數.....	30
29. $-x$ 及 $x$ 兩角各三角函數之關係 .....	30
30. $90^\circ - x$ 及 $x$ 兩角各三角函數之關係 .....	31
31. $90^\circ + x$ 及 $x$ 兩角各三角函數之關係 .....	32
32. $180^\circ - x$ 及 $x$ 兩角各三角函數之關係 .....	33
33. 求等值正銳角函數之例 .....	34

#### 第五章 兩角和及差之三角函數

34. 兩角和之正弦及餘弦.....	36
--------------------	----

35. 兩角差之正弦及餘弦.....	頁數 38
36. 兩角和及差之正弦或餘弦之乘積 .....	41
37. 兩角正弦或餘弦之和及差 .....	42
38. 兩角和或差之正切及餘切 .....	42
39. 求函數及證恒等式之例 .....	43

### 第六章 倍角及半角之三角函數

40. 二倍角之函數 .....	47
41. 半角之函數.....	47
42. 三倍角之函數 .....	48
43. 證恒等式及解方程式之例 .....	49

### 第七章 任意三角形之性質

44. 三角形之內角各三角函數之關係 .....	53
45. 證恒等式之例 .....	53
46. 三角形各邊與其對角正弦之關係 .....	55
47. 三角形三邊與其各角餘弦之關係 .....	56
48. 三角形之一邊與餘二邊及餘二邊對角餘弦 之關係 .....	57
49. 三角形三邊與其各半角之正弦餘弦正切之 關係 .....	57
50. 三角形三邊與其各角正弦之關係 .....	9
51. 三角形二邊之和及差與其對角半和正切及	

	頁數
半差正切之關係 .....	59
52. 三角形面積之式 .....	60
53. 三角形內接圓半徑之式 .....	61
54. 三角形外接圓半徑之式 .....	61
55. 三角形旁接圓半徑之式 .....	62

## 第八章 任意三角形之解法及 應用

56. 凡三角形均由三邊三角之量而成已知一邊 及其餘任意兩量即可算出未知各量 .....	65
57. 知一邊及兩角之三角形解法 .....	65
58. 知兩邊及一對角之三角形解法 .....	66
59. 知兩邊及夾角之三角形解法 .....	67
60. 知三邊之三角形解法 .....	69
61. 應用三角形解法以測高及距離 .....	71

## 附 錄 三角反函數

1. 三角反函數 .....	1
2. 三角函數與反函數之關係 .....	1
3. 證恒等式之例 .....	1

### 【附】 三角函數真數表

三角函數對數表

對數表

# 新 中 學 教 科 書

## 三 角 法

### 第 一 章

### 角 度

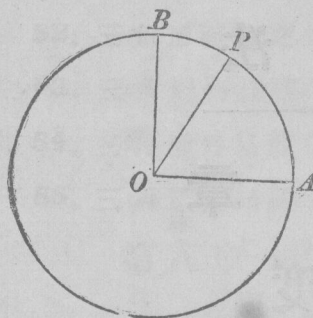
#### 1. 角 度 制 (System of Angular measure).

(1) 六十分制 (Sexagesimal System). 此制亦名英國制。分一直角為90等份,各曰一度 (Degree); 分一度為60等份,各曰一分 (minute); 復分一分為60等份,各曰一秒 (Second). 度分秒恒以符號 $^{\circ}$ ,  $'$ ,  $''$ 表之;例如 $40^{\circ} 25' 20''$ 即表四十度二十五分二十秒。

(2) 百分制 (Centesimal System). 此制亦名法國制。分一直角為100度 (Grades), 每度分為100分, 每分分為100秒。其符號為 $g$ ,  $'$ ,  $''$ , 如 $30^g 15' 45''$ , 即表三十度十五分四十五秒。

(3) 弧度制 (Circular System). 在任意圓周上, 取與半徑等長之弧, 此弧所對之圓心角, 稱曰弧度單位 (Radian).

無論半徑大小, 弧度單位之大小, 恒不變; 證明如下:



以  $O$  爲心，以  $r$  爲半徑長，作圓。  
設  $\angle AOB$  爲直角， $\widehat{AP}$  弧長等於  $r$ ，則

$$\widehat{AP} = r, \quad \widehat{AB} = \frac{\pi r}{2},$$

由是得 
$$\frac{\angle AOP}{\angle AOB} = \frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}},$$

$$\text{即 } \frac{\angle AOP}{\text{直角}} = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} = \frac{2r}{\pi r} = \frac{2}{\pi}.$$

故 
$$\angle AOP = \frac{2\text{直角}}{\pi};$$

即  $\angle AOP$  之量，無關於  $r$ ，無關於半徑之大小，而

$$\text{弧度單位} = \frac{180^\circ}{31.416} = 57'.2956.$$

**【注意一】**  $\pi$  倍弧度單位，既等於二直角，則某角之弧度若爲  $\pi$ ，必等於二直角；若爲  $\frac{\pi}{2}$ ，必等於一直角；若爲  $2\pi$ ，必等於四直角。

**【注意二】** (1), (3) 二法，今皆通行。凡以弧度計者，當曰弧度 1，弧度 2 等，與六十分法中之 1 度，2 度等有別。

## 2. 六十分度與弧度換算之式。

設  $D$  度 = 弧度  $\theta$ ,

則 
$$\frac{D}{180} = \frac{\theta}{\pi}$$

由是得六十分度與弧度換算之二公式：

$$D = \frac{180}{\pi} \times \theta.$$



$$\theta = \frac{\pi}{180} \times D.$$

### 3. 六十分度與百分度換算之式。

設 D 度 = G 百分度

則 
$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100}$$

由是得二者換算之二公式：

$$D = \frac{9}{10} \times G = G - \frac{1}{10} G.$$

$$G = \frac{10}{9} \times D = D + \frac{1}{9} D.$$

### 4. 弧度與百分度換算之式。

設 弧度  $\theta$  = G 百分度

則 
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{G}{200}.$$

由是得二者換算之公式：

$$\theta = \frac{\pi}{200} \times G.$$

$$G = \frac{200}{\pi} \times \theta.$$

### 第 一 習 題

**【注意】** 凡題有六十分制或百分制中之分秒者，皆須先化為度而後依公式換算之。

化下各數為百分度：

1.  $27^{\circ}15'46''.$

3.  $28^{\circ}.$

2.  $24'18''.$

4.  $27^{\circ}38'12''.$

化下各數爲六十分度：

5.  $19^{\text{g}} 45' 95''$

6.  $29^{\text{g}} 75'$

7.  $15^{\text{g}} 0' 15''$

8.  $\frac{\pi}{2}$

9.  $\frac{\pi}{6}$

10.  $\frac{2}{3}\pi$

化下各數爲弧度：

11.  $66^{\circ}$

12.  $22^{\circ} 30'$

13.  $12^{\circ} 5' 4''$

14.  $50^{\text{g}}$

15.  $13^{\text{g}} 5'$

16.  $13^{\text{g}} 5' 5''$

17. 等邊三角形之各角，以弧度計之，各爲幾何？

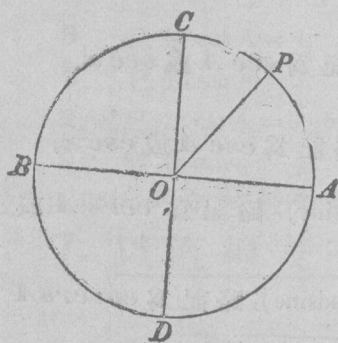
18. 兩角之差爲  $10^{\text{g}}$ ，其和爲  $45^{\circ}$ 。問各幾何。

19. 有長 2 呎之弧，其半徑爲 18 吋。該弧所對之圓心角爲若干度？

20. 有三角形：其一角爲 2 弧度；一角爲 20 六十分度。第三角爲若干百分度？

## 第二章

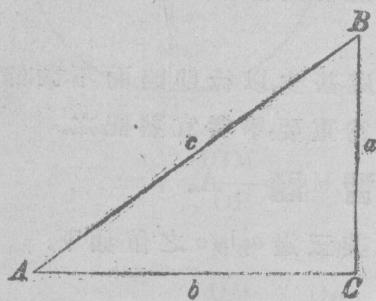
## 銳角之三角函數

5. 四象限之角 (Angles in the Four Quadrants).

設  $AB, CD$  兩線直交, 分任意圓為四等份, 各名為一象限。

$AOC$  名為第一象限;  $COB$  名為第二象限;  $BOD$  名為第三象限;  $DOA$  名為第四象限。

設  $OA$  為固定之直線, 名曰首線 (Initial Line);  $OP$  以  $O$  為中心, 依時針反對之方向而迴轉, 名曰迴線 (Revolving Line); 若  $OP$  在第一象限內, 則  $\angle AOP$  為銳角, 稱曰第一象限之角; 若  $OP$  在第二象限內, 則  $\angle AOP$  為鈍角, 稱曰第二象限之角; 餘倣此。

6. 以兩數之比表三角函數.

設有直角三角形  $ABC$ : 各角之大為  $A, B, C$ , 或  $\alpha, \beta, \gamma$ ,  $C$  或  $z$  為  $90^\circ$ ;  $a, b, c$  為與  $A, B, C$  三角相對各邊之長。(以後皆然。) 由此得三角函數之定義如下:

$\frac{a}{c} = A$  角之正弦 (Sine);

略記爲  $\sin A$  或  $\sin x$ .

$\frac{b}{c} = A$  角之餘弦 (Cosine); 略記爲  $\cos A$  或  $\cos x$ .

$\frac{a}{b} = A$  角之正切 (Tangent); 略記爲  $\tan A$  或  $\tan x$ .

$\frac{b}{a} = A$  角之餘切 (Cotangent); 略記爲  $\cot A$  或  $\cot x$ .

$\frac{c}{b} = A$  角之正割 (Secant); 略記爲  $\sec A$  或  $\sec x$ .

$\frac{c}{a} = A$  角之餘割 (Cosecant); 略記爲  $\csc A$  或  $\csc x$ .

$1 - \cos A = A$  角之正矢 (Versedsine); 略記爲  $\text{vers } A$  或  $\text{Vers } x$ .

$1 - \sin A = A$  角之餘矢 (Coversedsine); 略記爲  $\text{covers } A$  或  $\text{covers } x$ .

上列正弦, 餘弦, 正切, 餘切, 正割, 餘割, 正矢, 餘矢, 謂之三角函數 (Trigonometrical Functions); 或名曰圓函數 (Circular Functions)

**【注意一】** 正弦與餘弦, 正切與餘切, 正割與餘割, 正矢與餘矢, 互稱爲餘函數。

**【注意二】** 正矢餘矢, 用處甚少, 以後即略而不論; 餘六數爲全部三角法之主體, 極爲重要, 學者宜熟記之。

## 第二習題 A.

1. 設直角三角形  $ABC$ , 其三邊  $a, b, c$  之值如下。  
求  $A$  角之各函數。



- (1) 3, 4, 5. (2) 8, 15, 17,  
 (3) 5, 12, 13. (4) 9, 40, 41.

2. 已知  $\sin A = \frac{3}{5}$ ,  $c=20.5$ . 求  $a$ .

3. 已知  $\cos A = 0.44$ ,  $c=3.5$ . 求  $b$ .

4. 已知  $\tan A = \frac{11}{3}$ ,  $b=2\frac{5}{11}$ . 求  $a$ .

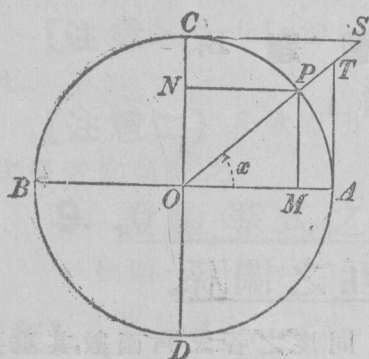
5. 已知  $\cot A = 4$ ,  $a=17$ . 求  $b$ .

6. 已知  $\sec A = 2$ ,  $b=20$ . 求  $c$ .

7. 已知  $\csc A = 6.45$ ,  $a=35.6$ . 求  $c$ .

8. 欲令  $a, b, c$  為三邊長, 作成直角三角形,  $c$  為其弦之長, 則  $a, b, c$  三數, 須滿足如何之條件?

## 7. 以直線表三角函數.



以單位之長為半徑, 作圓(名曰單位圓). 作  $AB, CD$  兩全徑互相直交. 設迴線  $OP$ , 由首線  $OA$  之位置迴轉至  $OP$ , 成銳角  $\alpha$ . 又作  $MP$ , 直交  $OA$ ;  $NP$  直交  $OC$ . 作  $AT, CS$  兩切線. 於是因  $OA, OP, OC$  均為半徑, 各等於 1, 而得

$$\sin \alpha = \frac{MP}{OP} = MP.$$

$$\cos \alpha = \frac{OM}{OP} = OM.$$

$$\tan \alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{AT}{OA} = AT.$$

$$\cot x = \frac{OM}{MP} = \frac{CS}{OC} = CS.$$

$$\sec x = \frac{OP}{OM} = \frac{OT}{OA} = OT.$$

$$\csc x = \frac{OP}{MP} = \frac{OS}{OC} = OS.$$

$$\text{vers } x = 1 - OM = MA.$$

$$\text{covers } x = 1 - ON = NC.$$

故昔稱三角函數爲八線。

此八式與前節之式形異而實同。若於前節圖中，自 AB 取 AP 等於 1，作 AC 之垂線 MP，即知  $\frac{a}{c} = \frac{MP}{AP} = MP$ ，與  $\frac{MP}{OP} = MP$  無異；其餘可以類推。

## 第二習題 B.

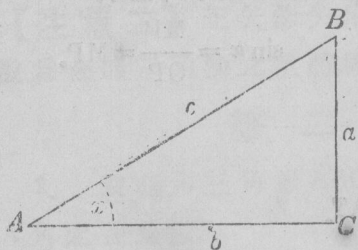
設  $x$  爲銳角，證明下三題：

1.  $\sin x < \tan x$ .

2.  $\sec x > \tan x$ .

3.  $\csc x > \cot x$ .

## 8. 三角函數相互之關係。



同度之各三角函數，其重要之關係如次：

$$\sin x \csc x = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$$

..... 【1】

$$\cos x \sec x = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1 \dots\dots\dots \text{【II】}$$

$$\tan x \cot x = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \dots\dots\dots \text{【III】}$$

$$\tan x = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{\sin x}{\cos x} \dots\dots\dots \text{【IV】}$$

$$\cot x = \frac{b}{a} = \frac{b}{c} \div \frac{a}{c} = \frac{\cos x}{\sin x} \dots\dots\dots \text{【V】}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{c^2}{c^2} = 1 \text{【VI】}$$

$$1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \sec^2 x \dots \text{【VII】}$$

$$1 + \cot^2 x = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \csc^2 x \text{【VIII】}$$

【注意一】  $\sin^2 x$  即  $(\sin x)^2$ ,  $\cos^2 x$  即  $(\cos x)^2$  其餘做此。

【注意二】 凡欲證明三角函數恒等式, 必須用上八式, 學者宜熟記之。

## 9. 證恒等式之例。

例題一。 證  $\sec^2 A + \csc^2 A = \csc^2 A \sec^2 A$ 。

【證】 
$$\begin{aligned} \sec^2 A + \csc^2 A &= \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A \sin^2 A} \\ &= \frac{1}{\cos^2 A \sin^2 A} = \csc^2 A \sec^2 A \end{aligned}$$

例題二。 證  $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2\sin^2 A \cos^2 A$

【證】 
$$\sin^4 A + \cos^4 A$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A + \cos^4 A - 2 \sin^2 A \cos^2 A \\
 &= (\sin^2 A + \cos^2 A)^2 - 2 \sin^2 A \cos^2 A \\
 &= 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A \quad \text{⊗}
 \end{aligned}$$

例題三. 證  $\frac{\csc A - \sec A}{\cot A + \tan A} = \frac{\cot A - \tan A}{\csc A + \sec A}$

【證】

則故

$$\because \csc^2 A = 1 + \cot^2 A, \quad \sec^2 A = 1 + \tan^2 A,$$

$$\csc^2 A - \sec^2 A = \cot^2 A - \tan^2 A;$$

$$(\csc A - \sec A)(\csc A + \sec A) = (\cot A - \tan A)(\cot A + \tan A)$$

$$\frac{\csc A - \sec A}{\cot A + \tan A} = \frac{\cot A - \tan A}{\csc A + \sec A}$$

## 第二習題 C.

證明下列各恒等式:

1.  $\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \sin^2 A.$

2.  $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A.$

3.  $\sec A - \cos A = \tan A \sin A.$

4.  $\tan A \sin A + \cos A = \sec A.$

5.  $\cos A \csc A \tan A = 1.$

6.  $(1 - \sin^2 A) \tan^2 A = \sin^2 A.$

7.  $\tan^2 A \cos^2 A + \cos^2 A = 1.$

8.  $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \sec A \csc A.$

9.  $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2.$

10.  $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}.$

11.  $\cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}.$



12.  $\tan A \csc A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ .

13.  $\frac{\cos A}{1 - \sin A} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$ .

14.  $\csc A - \sin A = \cot A \csc A$ .

15.  $\frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \cot^2 A} = 1$ .

16.  $\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = (\csc A - \cot A)^2$ .

17.  $(\tan A + \sec A)^2 = \frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}$ .

18.  $\sin^3 A \cos A + \cos^3 A \sin A = \sin A \cos A$ .

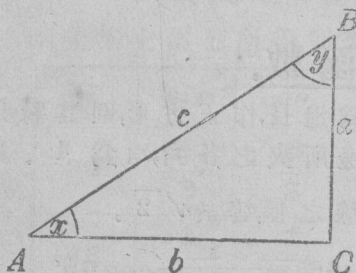
19.  $\sin A(1 + \tan A) + \csc A(1 + \cot A) = \csc A + \sec A$ .

20.  $(1 + \tan A)^2 + (1 + \cot A)^2 = (\sec A + \csc A)^2$ .

21.  $(\cos^2 A + \cot^2 A) \tan^2 A = \sec^2 A + (\cos^2 A - 1) \tan^2 A$ .

22.  $\sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2 \sin A \cos A = \tan A + \cot A$ .

### 10. 餘角之三角函數.



於直角三角形 ABC 內,

設  $x + y = 90^\circ$ ,

則  $y = 90^\circ - x$ .

B 角名曰 A 角之餘角。今以 A 角之三角函數表 B 角之函數如下:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - x) &= \frac{b}{c} \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

$$\cos(90^\circ - x) = \frac{a}{c} = \sin x.$$