

高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版·同济大学数学系编

九章丛书

高等数学

(第六版)

同步辅导及习题全解

主 编 苏志平 郭志梅

- ◆ 知识点窍 ◆ 逻辑推理 ◆ 习题全解
- ◆ 全真考题 ◆ 名师执笔 ◆ 题型归类



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

下册
新版

高校经典教材同步辅导丛书

高等数学（第六版）同步 辅导及习题全解（下册）

主 编 苏志平 郭志梅



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是高教版《高等数学》(第六版)教材的配套学习辅导及习题解答。编写的重点在于提供原教材中各章节全部习题的精解详答,并对典型习题做了详细的分析和提纲挈领的点评。每章都对知识点进行归纳和提炼,帮助读者梳理清楚各章脉络,统揽全局;并在教材给出的习题的基础上,根据每章的知识重点,精选了有代表性的例题,方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书编写思路清晰、逻辑缜密、内容详尽,简明易懂,力求循序渐进地帮助读者分析并解决学习中遇到的问题。

本书可作为各专业本科学生《高等数学》课程教学辅导材料和复习参考用书及考研强化复习的指导书,也可以作为《高等数学》课程教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(第六版)同步辅导及习题全解.下册/苏志平,郭志梅主编.—北京:中国水利水电出版社,2009
(高校经典教材同步辅导丛书)
ISBN 978-7-5084-6751-1

I. 高… II. ①苏…②郭… III. 高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第146922号

策划编辑:杨庆川 责任编辑:杨元泓 加工编辑:郑秀芹 封面设计:李佳

书 名	高校经典教材同步辅导丛书 高等数学(第六版)同步辅导及习题全解(下册)
作 者	主编 苏志平 郭志梅
出版 发行	中国水利水电出版社(北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net(万水) sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658(营销中心)、82562819(万水)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京市梦宇印务有限公司
规 格	148mm×210mm 32开本 总15.25印张 总518千字
版 次	2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷
印 数	0001—7000册
总 定 价	18.00元(上册、下册)

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

编 委 会

编 委 (排名不分先后)

程丽园	李国哲	陈有志	苏昭平
郑利伟	罗彦辉	邢艳伟	范家畅
孙立群	李云龙	刘 岩	崔永君
高泽全	于克夫	尹泉生	林国栋
黄 河	李思琦	刘 闯	侯朝阳

前 言

《高等数学》是大学数学课程中的一门重要的必修课,是理工科学生学习其他课程的基础和工具,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于高等数学自身的抽象性及其特有的逻辑方式,使得高等数学成为众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好高等数学,掌握更多的知识,我们根据国家教委审定的普通高等学校高等数学课程教学基本要求(教学大纲)和研究生入学考试教学大纲编写了这本辅导书。本书按照《高等数学》(同济大学编,第六版,高等教育出版社)的章节顺序,分为上下两册,共十二章,本册为第八至十二章。

本书旨在使广大读者学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材课后的全部习题给了详细的解答。

本书顺应知识经济时代的新要求和素质教育的新形势,力求在讲解基本知识的过程中渗透数学思想方法,通过习题详解提高其读者的综合素质。叙述通俗易懂,思路清晰完整,解法简练灵活,从而使本书成为学生的优秀辅导书,同时也是广大教师的得力参考书。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2009年8月

目 录

第八章 空间解析几何与向量代数	1
知识结构网络图	1
8.1 向量及其线性运算	1
本节重难点及考研要求	1
课后习题解答(习题 8-1)	3
8.2 数量积、向量积、混合积	6
本节重难点及考研要求	6
课后习题解答(习题 8-2)	8
8.3 曲面及其方程	10
本节重难点及考研要求	10
课后习题解答(习题 8-3)	12
8.4 空间曲线及其方程	14
本节重难点及考研要求	14
课后习题解答(习题 8-4)	15
8.5 平面及其方程	17
本节重难点及考研要求	17
课后习题解答(习题 8-5)	19
8.6 空间直线及其方程	21
本节重难点及考研要求	21
课后习题解答(习题 8-6)	23
总习题八全解	27
第九章 多元函数微分法及其应用	32
知识结构网络图	32
9.1 多元函数的基本概念	32

本节重难点及考研要求	32
课后习题解答(习题 9-1)	34
9.2 偏导数	37
本节重难点及考研要求	37
课后习题解答(习题 9-2)	38
9.3 全微分	40
本节重难点及考研要求	40
课后习题解答(习题 9-3)	41
9.4 多元复合函数的求导法则	44
本节重难点及考研要求	44
课后习题解答(习题 9-4)	45
9.5 隐函数的求导公式	50
本节重难点及考研要求	50
课后习题解答(习题 9-5)	51
9.6 多元函数微分学的几何应用	54
本节重难点及考研要求	54
课后习题解答(习题 9-6)	56
9.7 方向导数与梯度	60
本节重难点及考研要求	60
课后习题解答(习题 9-7)	61
9.8 多元函数的极值及其求法	64
本节重难点及考研要求	64
课后习题解答(习题 9-8)	66
9.9 二元函数的泰勒公式	70
课后习题解答(习题 9-9)	70
9.10 最小二乘法	73
课后习题解答(习题 9-10)	73
总习题九全解	74

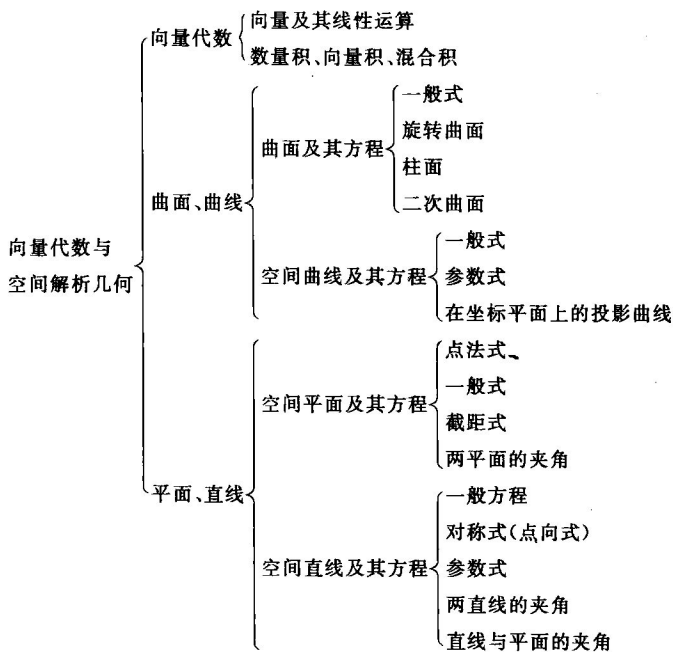
第十章 重积分	81
知识结构网络图	81
10.1 二重积分的概念与性质	81
本节重难点及考研要求	81
课后习题解答(习题 10-1)	83
10.2 二重积分的计算法	85
本节重难点及考研要求	85
课后习题解答(习题 10-2)	89
10.3 三重积分	104
本节重难点及考研要求	104
课后习题解答(习题 10-3)	107
10.4 重积分的应用	113
本节重难点及考研要求	113
课后习题解答(习题 10-4)	115
10.5 含参变量的积分	123
本节重难点及考研要求	123
课后习题解答(习题 10-5)	124
总习题十全解	127
第十一章 曲线积分与曲面积分	134
知识结构网络图	134
11.1 对弧长的曲线积分	134
本节重难点及考研要求	134
课后习题解答(习题 11-1)	136
11.2 对坐标的曲线积分	140
本节重难点及考研要求	140

	课后习题解答(习题 11-2)	142
11.3	格林公式及其应用	145
	本节重难点及考研要求	145
	课后习题解答(习题 11-3)	146
11.4	对面积的曲面积分	153
	本节重难点及考研要求	153
	课后习题解答(习题 11-4)	154
11.5	对坐标的曲面积分	157
	本节重难点及考研要求	157
	课后习题解答(习题 11-5)	158
11.6	高斯公式、通量与散度	161
	本节重难点及考研要求	161
	课后习题解答(习题 11-6)	162
11.7	斯托克斯公式、环流量与旋度	164
	本节重难点及考研要求	164
	课后习题解答(习题 11-7)	165
	总习题十一全解	168
第十二章	无穷极数	175
	知识结构网络图	175
12.1	常数项级数的概念与性质	175
	本节重难点及考研要求	175
	课后习题解答(习题 12-1)	176
12.2	常数项级数的审敛法	179
	本节重难点及考研要求	179
	课后习题解答(习题 12-2)	180
12.3	幂级数	182

本节重难点及考研要求	182
课后习题解答(习题 12-3)	183
12.4 函数展开成幂级数	185
本节重难点及考研要求	185
课后习题解答(习题 12-4)	185
12.5 函数的幂级数展开式的应用	189
本节重难点及考研要求	189
课后习题解答(习题 12-5)	189
12.6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质	195
本节重难点及考研要求	195
课后习题解答(习题 12-6)	196
12.7 傅里叶级数	198
本节重难点及考研要求	198
课后习题解答(习题 12-7)	199
12.8 一般周期函数的傅里叶函数	204
本节重难点及考研要求	204
课后习题解答(习题 12-8)	204
总习题十二全解	208

第八章 空间解析几何与向量代数

知识结构网络图



8.1 向量及其线性运算

本节重难点及考研要求

重点及考点

1. 向量.

(1) 定义.

既有大小又有方向的量称为向量.

(2) 向量的表示.

用空间有向线段来表示向量,记为 \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AB} 表示以 A 为起点,以 B 为终点的向量. 有向线段的长度表示向量的大小,有向线段所指的方向表示向量的方向. 当向量定义为有向线段时,它只具有长度和方向两要素,与起点无关.

(3) 向量相等.

大小相等且方向相同的两个向量相等,记为 $a = b$.

(4) 向量的模.

向量的大小称为向量的模,记为 $|a|$.

(5) 单位向量、零向量及角向量.

模等于1的向量称为单位向量;模等于0的向量称为零向量,其方向是任意的;与 a 大小相等且方向相反的向量称为负向量,记作 $-a$.

(6) 平行向量.

两个非零向量,如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行,记为 $a // b$. 零向量与任何向量都平行.

(7) 向量的坐标.

将向量 a 的起点与空间直角坐标系的原点重合,则向量 a 终点的坐标 (x, y, z) 称为向量 a 的坐标,记为 (x, y, z) ,并且 $|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

设向量的起点和终点分别为 $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$,则向量 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

(8) 方向角与方向余弦.

非零向量 a 与坐标轴的三个夹角 α, β, γ 称为向量 a 的方向角. $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 a 的方向余弦. 以向量 a 的方向余弦为坐标的向量就是与 a 同方向的单位向量 e_a ,故 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $e_a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,若 $a = (x, y, z)$,则

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

(9) 向量在轴上的投影.

设向量 a 与数轴 u 轴的夹角为 φ ,则 $|a| \cos\varphi$ 称为向量 a 在 u 轴上的投影,记为 $Prj_u a$ 或 $(a)_u$.

$$Prj_u a = |a| \cos\varphi, \quad Prj_u(a_1 + a_2) = Prj_u a_1 + Prj_u a_2,$$

$$Prj_u(\lambda a) = \lambda Prj_u a.$$

向量在与其方向相同的轴上的投影为向量的模 $|a|$.

在空间直角坐标系上,向量 a 的坐标 (x, y, z) 是 a 向各坐标轴的投影. 向量 a 可以表示成分量形式 $a = xi + yj + zk$.

2. 向量的线性运算及性质

(1) 加减法运算.

向量加法运算服从平行四边形法则或三角形法则. 设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

若把向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 移到同一起点, 则向量 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 的差 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 即为从 \mathbf{a} 的终点 A 向 \mathbf{b} 的终点 B 所引向量 \overrightarrow{AB} .

n 个向量相加 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n$ 等于 \mathbf{a}_1 的起点到 \mathbf{a}_n 的终点所确定的向量.

(2) 数乘运算.

向量 \mathbf{a} 与实数 λ 的乘积, 记为 $\lambda\mathbf{a}$. 若 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 则 $\lambda\mathbf{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. $\lambda\mathbf{a}$ 的模 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, $\lambda\mathbf{a}$ 的方向规定如下:

当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 \mathbf{a} 方向相同;

当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 \mathbf{a} 方向相反;

当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 为零向量, 方向任意.

(3) 性质.


$$\textcircled{1} \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}; \textcircled{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}); \textcircled{3} \lambda(u\mathbf{a}) = u(\lambda\mathbf{a}) = (\lambda u)\mathbf{a}.$$

$$(4) (\lambda + u)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + u\mathbf{a}, \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

(5) 设 \mathbf{a} 是一非零向量, 则 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a} \Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ , 使 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

考研要求

1. 理解空间直角坐标系, 理解向量的概念及其表示.
2. 掌握向量的线性运算, 理解单位向量、方向角与方向余弦的概念. 向量的坐标表达式, 掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

 课后习题解答(习题 8-1)

1. 解 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}) - 3(-\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 5\mathbf{a} - 11\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$.

2. 证明 设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于 M (如图 8-3 所示), 且 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$. 因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC}$, 即 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$. 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

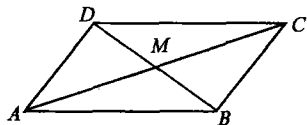


图 8-3

3. 解 如图 8-4 所示,由题意 $\overrightarrow{D_4D_3} = \overrightarrow{D_3D_2} = \overrightarrow{D_1B} = -\frac{1}{5}$

$$\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{5}\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{D_2A} = \overrightarrow{D_2B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{2}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{D_3A} = \overrightarrow{D_3B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{3}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{D_4A} = \overrightarrow{D_4B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{4}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

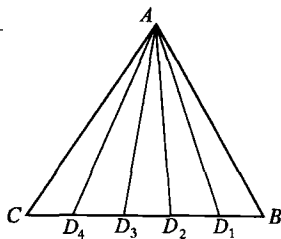


图 8-4

4. 解 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1-0, -1-1, 0-2\} = \{1, -2, -2\};$

$$-2\overrightarrow{M_1M_2} = -2\{1, -2, -2\} = \{-2, 4, 4\}.$$

5. 解 $|\mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11,$

故平行于向量 \mathbf{a} 的单位向量为

$$\pm \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \pm \frac{\mathbf{a}}{11} = \pm \frac{1}{11}\{6, 7, -6\} = \pm \left\{ \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11} \right\}.$$

6. 解 A 点在第 4 卦限, B 点在第 5 卦限, C 点在第 8 卦限, D 点在第 3 卦限.

7. 解 在 xOy 平面、 xOz 平面以及 yOz 平面上的点的坐标分别为 $(x, y, 0)$, $(x, 0, z)$ 以及 $(0, y, z)$, 在 Ox 、 Oy 、 Oz 轴上的点的坐标分别为 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$. A 在 xOy 平面上, B 在 yOz 平面上, C 在 x 轴上, D 在 y 轴上.

8. 解 (1) 点 (a, b, c) 关于 xOy 面的对称点是 $(a, b, -c)$, 关于 yOz 面的对称点是 $(-a, b, c)$, 关于 zOx 面的对称点是 $(a, -b, c)$.

(2) 点 (a, b, c) 关于 x 轴的对称点是 $(a, -b, -c)$, 关于 y 轴的对称点是 $(-a, b, -c)$, 关于 z 轴的对称点是 $(-a, -b, c)$.

(3) 点 (a, b, c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a, -b, -c)$.

9. 解 答案如图 8-5 所示.

10. 解 过 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点有相同的横坐标 x_0 和相同的纵坐标 y_0 , 过 P_0 且平行 xOy 的平面上的点具有相同的竖坐标 z_0 .

11. 解 如图 8-6 所示, 各点坐标如下:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right); B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right);$$

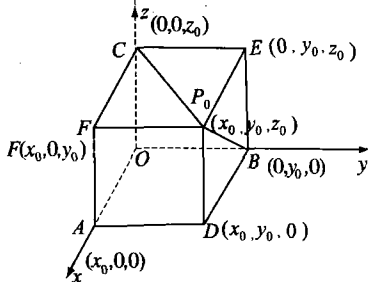


图 8-5

$$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right);$$

$$D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right);$$

$$A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right);$$

$$B'\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right);$$

$$C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right);$$

$$D'\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right).$$

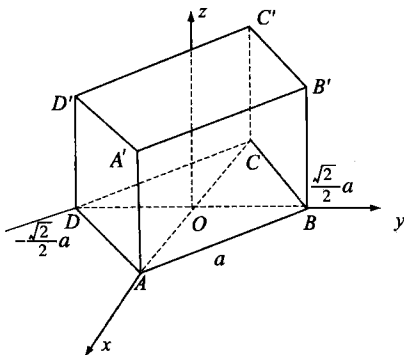


图 8-6

12. 解 M 到 x 轴上的投影 M' 为 $(4, 0, 0)$, 故 M 到 x 轴的距离为 $|\overrightarrow{MM'}|$, 故点 M 到 x 轴的距离 $d_1 = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$, 同理点 M 到 y 轴的距离为 $d_2 = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$, 点 M 到 z 轴的距离 $d_3 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

13. 解 设点 $P(0, y, z)$ 与 A, B, C 三点等距, 则

$$|\overrightarrow{PA}|^2 = 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2, \quad |\overrightarrow{PB}|^2 = 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2,$$

$$|\overrightarrow{PC}|^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2.$$

$$\text{因为 } |\overrightarrow{PA}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2, \quad |\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \\ 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} y = 1 \\ z = -2 \end{cases}, \quad \text{所求点的坐标为 } (0, 1, -2).$$

14. 证明 因为 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7,$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(10-2)^2 + (-1-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2},$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2, \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|,$$

从而 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 解 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1\} = \{-1, -\sqrt{2}, 1\},$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2.$$

$$\text{所以 } \cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

16. 解 (1) $\cos\alpha = 0$, 则向量与 x 轴垂直、平行于 yOz 面.

(2) $\cos\beta = 1$, 则向量与 y 轴同向, 垂直 xOx 面.

(3) $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, 则向量既垂直于 x 轴, 又垂直于 y 轴;

即向量垂直于 xOy 面, 亦即与 z 轴平行.

17. 解 $\text{Prj}_u r = 4 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \times 4 = 2.$

18. 解 设 A 点坐标为 (x, y, z) , 则 $\overrightarrow{AB} = \{2-x, -1-y, 7-z\}.$

由已知得 $2-x=4, -1-y=-4, 7-z=7,$

所以 $x=-2, y=3, z=0$, 故 A 点坐标为 $(-2, 3, 0).$

19. 解 $\mathbf{a} = 4(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + 3(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) - (5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = 13\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 15\mathbf{k},$

故 \mathbf{a} 在 x 轴上的投影为 13, 在 y 轴上的分向量为 $7\mathbf{j}.$

8.2 数量积、向量积、混合积



本节重难点及考研要求

重点及考点

1. 两向量的数量积

设 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 是两个给定的向量, 它们的数量积定义为: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\theta$, 其中 θ 是 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角.

在空间直角坐标系下, 若 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$

(1) 数量积的引入提供了刻画向量夹角关系的数学工具, 这体现在:

非零向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则非零向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$, 可

通过 $\cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ 计算得出.

上式又可理解为两个单位向量 $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ 的数量积, 即

$$\cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{b}^0$$

(2) 向量 \mathbf{a} 在向量 \mathbf{b} 上的投影为

$$\text{Prj}_b \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^0$$

即 \mathbf{a} 与单位向量 \mathbf{b}^0 的数量积表示 \mathbf{a} 在 \mathbf{b}^0 方向的投影,

(3) 用数量积表示向量的模: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$

(4) 数量积提供了判断两个向量是否垂直的依据:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

(5) 用投影可以表示向量的数量积:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{Prj}_b \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \text{Prj}_a \mathbf{b}.$$

(6) 数量积满足下列运算规律:

$$\text{交换律: } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

$$\text{分配律: } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

$$\text{结合律: } (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \text{ 其中 } \lambda \text{ 为实数.}$$

2. 两向量的向量积

两向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 的向量积是一个新的向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 其模为 $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, 方向垂直于 \mathbf{a} 且垂直于 \mathbf{b} , 并且 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 可构成右手系.

设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

$$(1) \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

(2) 向量积提供了判断两向量是否平行(共线)的依据:

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

(3) 向量积满足下列运算规律:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

$$\text{分配律: } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

$$\text{结合律: } (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) (\lambda \text{ 为实数}).$$

其中, 第一个运算规律说明向量积不具有交换律. 这同通常的乘法运算有很大区别, 不能照搬常用的乘法公式. 如

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0};$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b} = 2\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

(4) 向量积的引入为我们提供了刻画两向量公垂线方向的数学工具. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向就是既与 \mathbf{a} 垂直又与 \mathbf{b} 垂直的公垂线方向, 即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 垂直于 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 所确定的平面.

3. 三向量的混合积

三向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 的混合乘法运算 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 称为 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 的混合积, 记为 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$. 在空间直角坐标系下, 设

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2), \mathbf{c} = (x_3, y_3, z_3),$$

$$\text{则 } [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(1) 根据行列式的运算性质, 得到混合积的交换法则:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}].$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}].$$