高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·同济大学数学系编

九章丛书

高等数学

（第六版）

同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

· 知识点窍 · 逻辑推理 · 习题全解

· 全真考题 · 名师执笔 · 题型归类

下册

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

高等数学（第六版）同步辅导及习题全解（下册）

主 编 苏志平 郭志梅

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是高教版《高等数学》（第六版）教材的配套学习辅导及习题解答。编写的重点在于提供原教材中各章节全部习题的精解详答，并对典型习题做了详细的分析和提纲挈领的点评。每章都对知识点进行归纳和提炼，帮助读者梳理清楚各章脉络，统揽全局；并在教材给出的习题的基础上，根据每章的知识重点，精选了有代表性的例题，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书编写思路清晰、逻辑缜密、内容详尽，简明易懂，力求循序渐进地帮助读者分析并解决学习中遇到的问题。

本书可作为各专业本科学生《高等数学》课程教学辅导材料和复习参考用书及考研强化复习的指导书，也可以作为《高等数学》课程教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（第六版）同步辅导及习题全解. 下册 / 苏志平，郭志梅主编.—北京：中国水利水电出版社，2009
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-6751-1

I. 高… II.①苏…②郭… III.高等数学－高等学校－教学参考资料 IV.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 146922 号

策划编辑：杨庆川 责任编辑：杨元泓 加工编辑：郑秀芹 封面设计：李佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 高等数学（第六版）同步辅导及习题全解（下册）
作　　者	主编　苏志平　郭志梅
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	148mm×210mm　32 开本　总 15.25 印张　总 518 千字
版　　次	2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—7000 册
总 定 价	18.00 元（上册、下册）

前言

《高等数学》是大学数学课程中的一门重要的必修课，是理工科学生学习其他课程的基础和工具，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于高等数学自身的抽象性及其特有的逻辑方式，使得高等数学成为众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好高等数学，掌握更多的知识，我们根据国家教委审定的普通高等学校高等数学课程教学基本要求（教学大纲）和研究生入学考试教学大纲编写了这本辅导书。本书按照《高等数学》（同济大学编，第六版，高等教育出版社）的章节顺序，分为上下两册，共十二章，本册为第八至十二章。

本书旨在使广大读者学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。我们对教材课后的全部习题给了详细的解答。

本书顺应知识经济时代的新要求和素质教育的新形势，力求在讲解基本知识的过程中渗透数学思想方法，通过习题详解提高其读者的综合素质。叙述通俗易懂，思路清晰完整，解法简练灵活，从而使本书成为学生的优秀辅导书，同时也是广大教师的得力参考书。

由于时间较仓促，编者水平有限，难免书中有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2009 年 8 月

目 录

第八章 空间解析几何与向量代数

知识结构网络图

- 向量代数与空间解析几何
  - 向量代数
    - 向量及其线性运算
    - 数量积、向量积、混合积
  - 曲面、曲线
    - 曲面及其方程
      - 一般式
      - 旋转曲面
      - 柱面
      - 二次曲面
    - 空间曲线及其方程
      - 一般式
      - 参数式
      - 在坐标平面上的投影曲线
  - 平面、直线
    - 空间平面及其方程
      - 点法式、
      - 一般式
      - 截距式
      - 两平面的夹角
    - 空间直线及其方程
      - 一般方程
      - 对称式(点向式)
      - 参数式
      - 两直线的夹角
      - 直线与平面的夹角

8.1 向量及其线性运算

本节重难点及考研要求

重点及考点

1. 向量.

(1)定义.

既有大小又有方向的量称为向量.

(2)向量的表示.

用空间有向线段来表示向量,记为$\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}$ 表示以 A 为起点,以 B 为终点的向量. 有向线段的长度表示向量的大小,有向线段所指的方向表示向量的方向. 当向量定义为有向线段时,它只具有长度和方向两要素,与起点无关.

(3) 向量相等.

大小相等且方向相同的两个向量相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(4) 向量的模.

向量的大小称为向量的模,记为 $|\boldsymbol{a}|$.

(5) 单位向量、零向量及角向量.

模等于 1 的向量称为单位向量;模等于 0 的向量称为零向量,其方向是任意的;与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等且方向相反的向量称为负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$.

(6) 平行向量.

两个非零向量,如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行,记为 $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}$. 零向量与任何向量都平行.

(7) 向量的坐标.

将向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点与空间直角坐标系的原点重合,则向量 $\boldsymbol{a}$ 终点的坐标(x,y,z)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,记为(x,y,z),并且 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

设向量的起点和终点分别为 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$,则向量$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

(8) 方向角与方向余弦.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标轴的三个夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\mathbf{e}_a$,故 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,$\mathbf{e}_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,则

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(9) 向量在轴上的投影.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 u 轴的夹角为 φ,则 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影,记为 $Prj_u\boldsymbol{a}$ 或$(\boldsymbol{a})_u$.

$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$, $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+Prj_u\boldsymbol{a}_2$,

$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda Prj_u\boldsymbol{a}$.

向量在与其方向相同的轴上的投影为向量的模 $|\boldsymbol{a}|$.

在空间直角坐标系上,向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标(x,y,z)是 $\boldsymbol{a}$ 向各坐标轴的投影. 向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成分量形式 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

2. 向量的线性运算及性质

(1) 加减法运算.

向量加法运算服从平行四边形法则或三角形法则. 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, 则

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$,

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$,

若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点, 则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 即为从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$.

n 个向量相加 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ 等于 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点所确定的向量.

(2) 数乘运算.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积, 记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$, 则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$, $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向规定如下:

当 $\lambda>0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;

当 $\lambda<0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;

当 $\lambda=0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量, 方向任意.

(3) 性质.

① $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$; ② $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; ③ $\lambda(u\boldsymbol{a})=u(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda u)\boldsymbol{a}$.

(4) $(\lambda+u)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+u\boldsymbol{a}$,　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(5) 设 $\boldsymbol{a}$ 是一非零向量, 则 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ, 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

考研要求

1. 理解空间直角坐标系, 理解向量的概念及其表示.
2. 掌握向量的线性运算, 理解单位向量、方向角与方向余弦的概念. 向量的坐标表达式, 掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

课后习题解答(习题 8-1)

1. 解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 证明　设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于 M (如图 8-3 所示), 且 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$. 因为

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$, 即 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$.

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

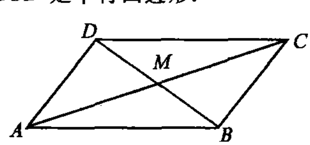

图 8-3

3. 解 如图 8-4 所示,由题意 $\overrightarrow{D_4D_3}=\overrightarrow{D_3D_2}=\overrightarrow{D_1B}=-\frac{1}{5}$

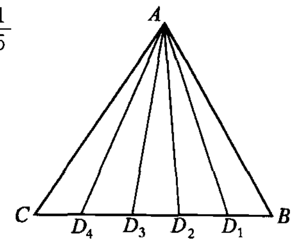

图 8-4

$\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$,

$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$,

$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$,

$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_4B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$.

4. 解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-0,-1-1,0-2\}=(1,-2,-2\}$;

$-2\,\overrightarrow{M_1M_2}=-2\{1,-2,-2\}=\{-2,4,4\}$.

5. 解 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$,

故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{11}=\pm\frac{1}{11}\{6,7,-6\}=\pm\left\{\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right\}$.

6. 解 A 点在第 4 卦限,B 点在第 5 卦限,C 点在第 8 卦限,D 点在第 3 卦限.

7. 解 在 xOy 平面、xOz 平面以及 yOz 平面上的点的坐标分别为$(x,y,0)$,$(x,0,z)$以及$(0,y,z)$,在 Ox、Oy、Oz 轴上的点的坐标分别为$(x,0,0)$,$(0,y,0)$,$(0,0,z)$.A 在 xOy 平面上,B 在 yOz 平面上,C 在 x 轴上,D 在y 轴上.

8. 解 (1) 点(a,b,c)关于 xOy 面的对称点是$(a,b,-c)$,关于 yOz 面的对称点是$(-a,b,c)$,关于 zOx 面的对称点是$(a,-b,c)$.

(2) 点(a,b,c)关于 x 轴的对称点是$(a,-b,-c)$,关于 y 轴的对称点是$(-a,b,-c)$,关于 z 轴的对称点是$(-a,-b,c)$.

(3) 点(a,b,c)关于坐标原点的对称点是$(-a,-b,-c)$.

9. 解 答案如图 8-5 所示.

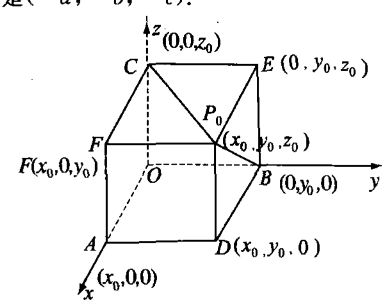

图 8-5

10. 解 过 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点有相同的横坐标 x_0 和相同的纵坐标 y_0,过 P_0 且平行 xOy 的平面上的点具有相同的竖坐标 z_0.

11. 解 如图 8-6 所示,各点坐标如下:

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$;$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$;

$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$;

$D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$;

$A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$;

$B'\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$;

$C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$;

$D'\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

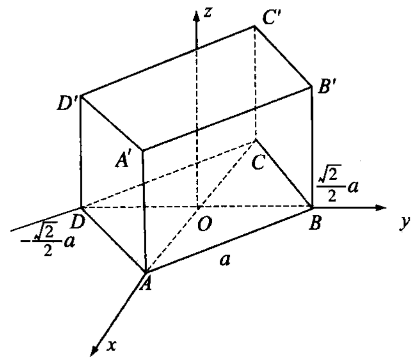

图 8-6

12. 解 M 到 x 轴上的投影 M' 为 $(4,0,0)$，故 M 到 x 轴的距离为 $|\overrightarrow{MM'}|$，故点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，同理点 M 到 y 轴的距离为 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

13. 解 设点 $P(0,y,z)$ 与 A、B、C 三点等距，则

$|\overrightarrow{PA}|^2=3^2+(y-1)^2+(z-2)^2$，$|\overrightarrow{PB}|^2=4^2+(y+2)^2+(z+2)^2$，

$|\overrightarrow{PC}|^2=(y-5)^2+(z-1)^2$.

因为 $|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2$，$|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2$，

所以 $\begin{cases}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\\4^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}y=1\\z=-2\end{cases}$，　所求点的坐标为 $(0,1,-2)$.

14. 证明 因为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$，

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$，

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$，

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，

从而 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{3-4,0-\sqrt{2},2-1\}=\{-1,-\sqrt{2},1\}$，

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$.

所以 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\frac{1}{2}$，$\alpha=\frac{2}{3}\pi$，$\beta=\frac{3}{4}\pi$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$.

16. 解 (1) $\cos\alpha=0$，则向量与 x 轴垂直、平行于 yOz 面.

(2) $\cos\beta=1$，则向量与 y 轴同向，垂直 zOx 面.

(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$,则向量既垂直于 x 轴,又垂直于 y 轴;

即向量垂直于 xOy 面,亦即与 z 轴平行.

17. 解 $\mathrm{Prj}_u\,\boldsymbol{r}=4\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times 4=2$.

18. 解 设 A 点坐标为(x,y,z),则 $\overrightarrow{AB}=\{2-x,-1-y,7-z\}$.

由已知得 $2-x=4,-1-y=-4,7-z=7$,

所以 $x=-2,y=3,z=0$,故 A 点坐标为(-2,3,0).

19. 解 $\boldsymbol{a}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$,

故 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13,在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

8.2 数量积、向量积、混合积

本节重难点及考研要求

重点及考点

1. 两向量的数量积

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个给定的向量,它们的数量积定义为:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$,其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

在空间直角坐标系下,若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

(1) 数量积的引入提供了刻画向量夹角关系的数学工具,这体现在:

非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,可通过 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ 计算得出.

上式又可理解为两个单位向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$、$\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 的数量积,即

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{b}^0$$

(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0$$

即 $\boldsymbol{a}$ 与单位向量 $\boldsymbol{b}^0$ 的数量积表示 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}^0$ 方向的投影.

(3) 用数量积表示向量的模:$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(4) 数量积提供了判断两个向量是否垂直的依据:

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

(5) 用投影可以表示向量的数量积:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}.$$

(6) 数量积满足下列运算规律：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，其中 λ 为实数.

2. 两向量的向量积

两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个新的向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其模为 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 且垂直于 $\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 可构成右手系.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ z_2 & y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2) 向量积提供了判断两向量是否平行(共线)的依据：

$$a\ /\!/\ b\Leftrightarrow a\times b=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

(3) 向量积满足下列运算规律：

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为实数).

其中，第一个运算规律说明向量积不具有交换律.这同通常的乘法运算有很大区别，不能照搬常用的乘法公式.如

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

(4) 向量积的引入为我们提供了刻画两向量公垂线方向的数学工具.$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向就是既与 $\boldsymbol{a}$ 垂直又与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的公垂线方向，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 a 和 b 所确定的平面.

3. 三向量的混合积

三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合乘法运算 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$. 在空间直角坐标系下，设

$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$，

$$\text{则}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

(1) 根据行列式的运算性质，得到混合积的交换法则：

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$.

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]$.