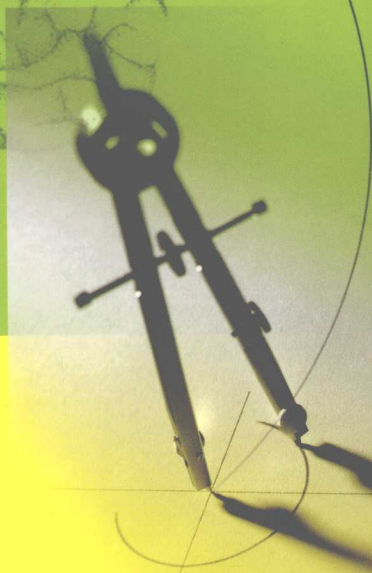


数学思维与解题基础

SHUXUE SIWEI YU JIETI JICHU

◎ 汪一敏 著

123



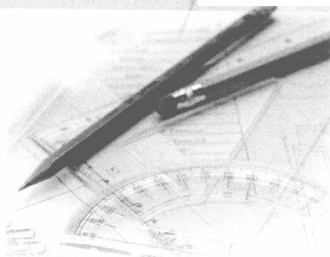
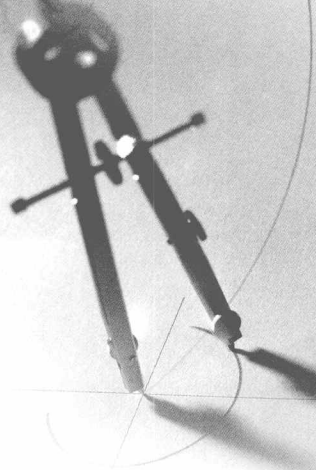
西南师范大学出版社

数学思维与解题基础

SHUXUE SIWEI YU JIETI JICHU

◎ 汪一敏 著

12



西南师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思维与解题基础 / 汪一敏著. —重庆:
西南师范大学出版社, 2009. 11
ISBN 978-7-5621-4756-5

I. 数… II. 汪… III. 数学课—中小学—课外读物
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 180514 号

数学思维与解题基础

汪一敏 著

责任编辑: 张浩宇

封面设计: 刘一群

出版: 西南师范大学出版社出版、发行

网址: www.xscbs.com

重庆·北碚 邮编: 400715

印刷: 杭州浙大同心教育彩印有限公司

开本: 850mm×1168mm 1/32

印张: 12

字数: 300 千

版次: 2009 年 11 月第 1 版

印次: 2009 年 11 月第 1 次印刷

书号: ISBN 978-7-5621-4756-5

定价: 29.80 元

前 言

从事初等数学、高等数学教学 30 余年,有一个问题始终萦绕在心头:“数学,学什么?教什么?”

语文教学强调“听、说、读、写”,重视“字、词、句、段、篇”;京剧学艺要学“唱、念、做、打”;学相声的关键在“说、学、逗、唱”。显然,不同行业对所学的内容和要求都不相同。那么数学学习呢?我在这里斗胆把它归纳为:数学要学“式、形、算、化”。

“式”,指的是各种数学表达式,包括算式、代数式、方程、不等式、函数式、行列式等;“形”,指的是各种图形,包括平面的、立体的、拓扑的等;“算”,指的是各种计算和推理,包括算理、方法、技巧等;“化”,指的是数学形式、结构的各种变化,包括化归、概括、提炼、抽象、凝聚等。

其中“式”、“形”主要指向数学知识,“算”、“化”则更多属于数学思维的范畴。当数学的教和学围绕着这两大块展开的时候,我们应该清醒地认识到,后者对提高学生的数学能力是至关重要的。因此,对一个从事数学教学(或将要从事数学教学)的人来说,了解和掌握数学思维的基础知识、数学解题的基本方式(模式),是十分需要的,同时它对提高数学教学的效率,有百益而无一害。

本书共分两篇,第一篇数学思维分三章,介绍了思维科学的基础知识,讲述了数学思维的四种基本形式,其中数学全息思维是作者提出的一个新观点,将“直觉”、“灵感”这些颇有争议的数学思维形式归于其中。第二篇数学解题分三章,分别讲述数学解题的思想、方式和策略,其特点是从数学发展的历史

看数学解题思想和解题方式的形成和作用,将零散的数学解题思想方法进行归纳,提出了数学解题的代数方式、几何方式、逻辑方式等。所选例题有一定的针对性,涉及高等数学、中学数学和小学数学。全书一气呵成,内容有机连贯。

本书既可作为师范院校的学生用书,也可作为中小学数学教师的教学参考书。

本书在编写的过程中,参考和吸收了许多专家、学者的观点和研究成果,谨在此表示衷心的感谢。在书中作者首次提出的一些新观点可供研究,不当之处,恳请各位专家、学者、师生不吝指正。

汪一敏

于杭州师范大学

2009年8月

目 录

第一篇 数学思维

第一章 了解思维.....	(4)
第一节 思维的涵义.....	(4)
第二节 思维的特征.....	(7)
第三节 思维的分类.....	(8)
第四节 思维的过程.....	(13)
第五节 思维的发展.....	(19)
第六节 思维的品质.....	(22)
第七节 思维的形式和方式.....	(28)
第八节 思维策略.....	(29)
第九节 思维风格.....	(33)
思考与练习.....	(39)
第二章 数学思维概说.....	(40)
第一节 数学思维的涵义.....	(41)
第二节 数学思维的特征.....	(44)
第三节 数学思维的结构内容.....	(51)
第四节 学习数学思维的意义.....	(54)
思考与练习.....	(61)



第三章 数学思维的基本形式	(62)
第一节 数学抽象思维	(63)
第二节 数学逻辑思维	(75)
第三节 数学形象思维	(105)
第四节 数学全息思维	(128)
思考与练习	(174)

第二篇 数学解题

第四章 数学解题思想	(184)
第一节 公理化思想	(185)
第二节 函数对应思想	(191)
第三节 逐渐逼近思想	(198)
第四节 符号化思想	(208)
第五节 概率统计思想	(219)
第六节 数学模型思想	(227)
第七节 数学优化思想	(236)
思考与练习	(247)
第五章 数学解题方式	(250)
第一节 代数方式	(251)
第二节 几何方式	(256)
第三节 逻辑方式	(264)
第四节 化归方式	(276)
第五节 联想、猜想方式	(283)
第六节 数学审美方式	(289)
第七节 数形结合方式	(301)
思考与练习	(308)



第六章 数学解题方法、策略	(312)
第一节 分析法与综合法	(313)
第二节 数学归纳法	(317)
第三节 构造法	(325)
第四节 辨用模式策略	(332)
第五节 分而后合策略	(337)
第六节 动静转换策略	(342)
第七节 进退先行策略	(348)
第八节 正难则反策略	(354)
思考与练习	(359)
附 录	(363)
主要参考文献	(371)

第一篇 数学思维

人们在工作、学习、生活中每逢遇到问题,总会“想一想”。这种“想”,就是思维,也就是我们平常所说的思考,它是通过分析、综合、概括、抽象、比较、具体化和系统化等一系列过程,对感性材料进行加工并转化为理性认识,从而解决问题的。通过思考得出结论一般来说还不是真正的难题,真正的难题在于思考本身。思考不得要领常常会将思维引向歧路,因此学会正确地思维比思考得出正确的结论更为重要。有这样一个故事,说现代原子物理学家卢瑟福在一天深夜发现一位学生还在埋头做实验,便好奇地问:“上午你在干什么?”“做实验。”“下午呢?”“也在做实验。”卢瑟福不禁皱起了眉头:“那晚上呢?”“也在做实验。”卢瑟福听了,严肃地说:“你一天到晚都在做实验,什么时间用于思考呢?”显然学生连思考都不重视,更谈不上使用正确的思维方式了。

人的智力水平可以通过思维反映出来。大脑思维的简单与复杂直接决定着一个人智力能力的高低。撇开先天因素,就后天而言,一个没有良好思维素质的人,他的智力水平也不会太高。而专业思维训练的主要目的就是通过培养良好的思维素质,提高人们的智力水平。从这个意义上说,思维不仅是一门学问,还是一种能力。

使用正确的思维方式,需要有一个前提,即首先要知道什么思维是正确的思维,才能组织训练。“训练”听起来并不感到十分复杂,但实际上它的复杂程度远远超过我们的想象。同样一句话,每个人的理解会不一样。G.波利亚在《怎样解题》一书中讲了这样一件事:一个小男孩要将他的宠物狗送到兽医那儿去治疗。

“兽医是干什么的?”

“是动物的医生。”

“动物的医生是哪一种动物?”

小男孩认为人的医生是人,那么动物的医生应该是动物。如果你认为那仅仅是儿童特有的,那你就错了。有这样一个笑话,虽然是笑话,但实际生活中确有类似事情:

据说,1910年美军某部队传递了这样一条命令:

营长对值班军官说:明晚8时左右,哈雷彗星将可能在这个地区看到,这种彗星每隔76年才能看见一次。命令所有士兵身着野战服在操场上集合,我将向他们解释这一罕见的现象。如果下雨的话,就在礼堂集合,我为他们放一部有关彗星的影片。

值班军官对连长说:根据营长的命令,明晚8时哈雷彗星将在操场上空出现。如果下雨的话,就让士兵穿着野战服列队前往礼堂,这一罕见的现象将在那里出现。

连长对排长说:根据营长的命令,明晚8时,非凡的哈雷彗星将身穿野战服在礼堂中出现。如果操场上下雨,营长将下达另一个命令,这种命令每隔76年才会出现一次。

排长对班长说:明晚8时,营长将带着哈雷彗星在礼堂中出现,这是每隔76年才有的事。如果下雨的话,营长将命令彗星穿上野战服到操场上去。

班长对士兵说:在明晚8时下雨的时候,著名的76岁的哈雷将军将在营长的陪同下身着野战服,开着他那彗星牌汽车,经过操场前往礼堂和我们见面。

这就是为什么同在一个教室,用同样的教科书,听同样教师的课,学生的差别会那样大!实际上,在一些情况中,教师所说的并非是学生所理解的。“望文生义”可能是大众理解问题的一个特色,成语“空穴来风”的本意是事出有因,因为空的洞穴才能进风。然而很多人包括一些电视主持人却将其理解成事出无因,无缘无故。语言的这种“约定俗成”还行,但数学不行。 $\frac{1}{2}$ 加 $\frac{1}{3}$ 让它等于 $\frac{1}{5}$,能行吗?显然不行。

尽管人们对同一信息的理解会各不相同,但各学科都有自己的思维特点和方式,我们应当尽量地去了解和掌握。大家都知道司马光砸缸的故事,说明正确的思维才能导致最好的结果。因此,了解和掌握数学思维,是学好数学的第一步。

第一章 了解思维

研究数学思维的理论,必然涉及思维科学本身。思维科学是从各个学科中概括出思维的基本规律而发展起来的。反过来,它对研究各个学科的思维理论又具有普遍的指导意义。数学思维笼统地说是人们在数学活动中的思想或心理的过程与表现,细究起来可以分为数学思维的特征、过程、形式、方式(方法)、规律等。也就是要搞清楚数学活动中思维的基本规律。本章着重讲述一般思维科学的涵义、特征、分类、过程、品质、策略、风格等基本概念和原理。

第一节 思维的涵义

思维,就是人们通常所说的“思考”、“想”、“动脑筋”,是人的大脑对客观事物的认识过程。人的认识过程大致可以分为两个阶段,即感性认识阶段和理性认识阶段。

1. 感性认识阶段:感性认识阶段是对事物的认识的低级阶段,它是由人的感觉器官和被认识的对象直接接触而实现的。感性认识包括三种形式:感觉、知觉和表象。

感觉和知觉都是客观事物直接作用于人的感觉器官时所产生的反映,不同的是,感觉反映的是客观事物的个别属性,知觉则综合了客观事物的各个属性,是对事物整体表面特征和外部联系的



反映。感觉和知觉统称感知,是认识的基础。

表象是思维主体在较长时间内所记忆的客观事物感性形象的总称,是人脑反映客观世界的最基本的映像,也是形成理性意象和创造性再造意象的基础与前提(意象:被认识和理解了的一部分表象),它是比感知更高一级的感性认识形式,是感知的保存和再现。同感知一样,它具有具体形象性,但同时它也有一定的概括性。它不但反映了个别事物的主要特点和轮廓,而且还反映了一类事物的共同的表面特征,它常常把多次认识到的形象综合起来。表象是感性认识和理性认识的中介和桥梁。

2. 理性认识阶段:理性认识阶段是为了获得对客观事物的本质联系和规律性的认识。它需要在感性认识的基础上,对感性材料进行分析、选择、加工与整合,进行科学的抽象,需要透过事物的外部现象,把握事物的内部本质。这一系列的活动过程往往表现为概括、推理和判断等集中形式。正是这些形式构成了理性认识,它们是认识的高级阶段,也就是我们通常所说的思维。

比如,我们认识一个人,总是先从知道他(她)的姓名、性别、外表长相,从听他(她)说话,看他(她)做事开始的,以后对他(她)的了解逐渐地慢慢增多,直到认识他(她)的性格特点,他(她)的爱好,他(她)的思想,他(她)的精神境界。事实上,我们对他(她)的认识,就经历了感性认识和理性认识的两个阶段。同样,在学习数学解题理论时,我们也会经历感性认识和理性认识的两个阶段。在感性认识阶段,我们接触到的是数学习题的一个一个的习题类型,一个一个的解题方法,一个一个的解题思维策略……随着知识和经验技能的积累和掌握,我们开始意识到数学解题有一些共同的特征与规律,这时,我们的认识就进入了理性认识的阶段。

一般来说,感觉和知觉获得的印象,通常借助于词的作用,在头脑中进行进一步的整理和加工,这种整理、加工是抛开事物个别的、表面的现象,抓住事物普遍的、内部的本质,使人的认识由感性



阶段上升到高一级的理性阶段,这个过程称为思维。现代认知心理学认为人类是信息加工的系统,类似于计算机是一个操作信息的加工符号系统,思维是人的信息加工的过程,信息加工的过程和结构可用图 1-1 表示。

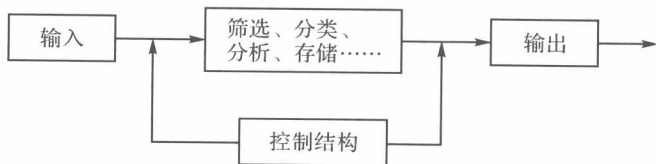


图 1-1

因此,思维是发生于人脑中的理性意识活动,是主体对信息的系统加工,它发生于人的认识的理性阶段。或者说,思维是人脑对客观事物本质属性和规律性的间接的、概括的、能动的反映。抽象和概括等是思维的工具。

也有学者认为思维是人们认识客观事物活动过程中产生的理性认识,是一种对事物的本质及内在联系的认识。济南大学社会科学院苏富忠教授把思维看作是一种操作,他认为:思维是主体以其机体结构,特别是以其中的心理结构为依据,在整体整合和心理相对独立的整合作用下,在其他心理过程参与下,在自体内外矛盾推动下,遵循特定的逻辑规律,运用多种思维方法,操作特定的心理工具、肢体或外物,拓通特定的思路,主动建构一定新成果的操作过程。^①

还有的认为思维就是推理、解决问题和决策。

虽然众多学者对思维的概念有不同的见解和定义,但他们都一致地把记忆看成是思维的基础,推理是思维的基本活动。由于人脑的左半球是语言中枢,主管语言和逻辑思维,右半球主管音

^① 苏富忠. 建构性操作论的思维观. 心理学探新, 1994 年第 2 期



乐、绘画等形象思维材料的综合活动,所以,思维既是高级神经生理活动,也是复杂的心理操作,是一个动态的关联系统。

第二节 思维的特征

由上节知道,思维属于理性认识的范畴,它揭示的是同类事物的本质属性和不同事物间联系的客观规律性。因此,思维对客观事物的反映具有概括性和间接性这两个基本特征。

首先,思维是对事物概括的反映过程。思维通过对现实世界中的个别事物的现象和它与其他事物的联系中区分出合乎规律的、一般的、本质的认识,从而形成概念。思维是对客观事物全体的了解,是全面地、概括地反映现实的过程。例如“三角形三内角和等于 180° ”是对所有三角形内角和的一种概括。

其次,思维是对事物间接的反映过程。也就是说人们不仅通过感官直接感知事物,而且能够认识知觉所提供的现象、材料,或在某个阶段上知觉没有提供过的东西。也就是人们在实践过程中,可以借助已有的知识推断出新的知识的结论。虽然有时候我们并未见到事态发展的结局,但我们可以通过事物的内在联系,通过思维进行判断,得出合乎规律的结论。例如,我们测量了一个三角形的两个角分别是 60° 和 45° ,那么我们就不用再测量第三个角,就可以知道,它必定是 75° 无疑。这就是思维的间接性。

思维还具有变异性与相对稳定性。主体和主体思维都是发展着的具体存在,随着思维的展开,思维及其成果都会不断地发展变化。思维的这种变异性,导致思维的分化,思维不断地由低级向高级发展。另一方面,在思维变异的前提下,在一定的时间范围内,某种思维总是稳定在一定的质态上。主体创造了某种思维之后,当他反复开展此种思维,便会在其心理和机体以结构的方式固定发展的成果。这些成果是后续思维发展的内在动力。



思维还与语言共存。语言在人脑的形成发展和思维的产生中起着巨大的作用。早期的心理语言学家就认为:思维是“言语减去声音”。通过对原始思维以及对儿童思维发展(儿童思维是人类思维发展的缩影)的研究,已有充分的证据表明:“只是抽象思维靠语言,形象思维不靠语言。形象思维的感知是只可意会,不可言传的”^①。事情显然正是如此,当思维可用语言来描述和表达时,思维其实已经属于抽象思维的范畴了。所以“形象思维先于语言,也先于抽象思维”^②。众所周知,人类思维不同于动物思维和机器思维,前者是原发性思维,后者是模拟性思维,这种不同的根本原因是因为人类有语言。人们通过抽象的语言活动,表达了他们的思想,恩格斯也说过,首先是劳动,而后是语言和它一起成了人类思维发展的最主要的推动力。因此,不论在什么时候,什么条件下,抽象思维和语言都是不可分割的,思维是被语言表现的,语言是表现思维的,两者的区别是:语言是在劳动实践和社会交往中长期形成的一种物质符号体系,思维是人们头脑中产生的反映现实的精神属性。

思维在反映现实的过程中,还表现出了问题性。人们通过思维的认识过程,把已获得的感性材料进行组织、加工、整理,使之能够反映事物的本质和规律,为了达到这一目的,往往必须先提出问题,再提出假设,最后解决问题——揭示出事物的特征及相互间的联系与关系,以说明事物的本质属性及规律性。

第三节 思维的分类

以不同的视角或不同的标准,对思维进行分类,有许多不同的分类方法。在这些分类中,每一种思维类型(或形式)都有自己独

①② 钱学森主编,关于思维科学,上海人民出版社,1986年版



特的,不同于其他思维类型(或形式)的思维方式方法和思维策略。因此,思维的分类对我们搞清思维的结构,研究思维的理论提供了十分有效的手段,下面介绍一些常见的分类。

一、从思维过程的指向性或思维概括的维度多长,可把思维分为集中思维(Convergent Thinking)和分散思维(Divergent Thinking)。集中思维又称求同思维或聚敛性思维。这一分法最早是由美国心理学家吉尔福特 1959 年在斯坦福大学发表的一篇名为《智慧的三个侧面》的演讲稿中首先提出来的,它对思维的研究产生了深刻的影响。

集中思维是指把问题所提供的各种信息聚合起来,以已有的知识与经验为依据,思维的指向集中于同一方向,通过运用逻辑规则,寻求出唯一正确的答案。这种思维的主要特点是求同,它不能抛开旧经验的束缚,不从另外的角度和观点看问题,因而是一种有方向、有范围、有条理、有组织的思维。学校教育中教给学生的思维几乎全部是集中思维。

集中思维本身又可分为定向思维、纵向思维和构造性思维等。

发散思维是指从同一个目标出发,沿着不同的途径去思考,从多方向探求答案的思维。在数学解题中,发散思维表现为依据定义、定理和已知条件,从各种不同的角度,探求和寻找解决问题的不同途径,不局限于既定的模式,思维呈发散放射状。这种思维的主要特点是寻求变异,不囿于传统方法,不墨守成规,例如在解决如下问题中的思维就具有这种特性。

问题:能用 6 根火柴棒(不允许折断)摆成 4 个等边三角形吗?

发散思维是创造性思维的重要组成部分,其本身又可分为逆向思维、横向思维和探索性思维。

集中思维和发散思维既有联系,又有区别。例如我们在解决数学问题时,首先要弄清楚条件和结论,在这个过程中,会产生大量的联想和若干个解题的方案,这表现为发散思维,接下来要对一