全国高等院校土木工程类应用型系列规划教材

有限元法基础

赵维涛　陈孝珍　主编

科学出版社
www.sciencep.com

全国高等院校土木工程类应用型系列规划教材

有限元法基础

赵维涛　陈孝珍　主　编
白丽丽　何　伟　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书通过对三节点三角形平面单元的详细分析，介绍了有限元法的基本思想和基本原理。主要内容包括有限元的基本概念、弹性力学基本理论、平面问题有限元、杆系结构有限元、空间问题与板壳单元等，并结合结构静力分析、振动分析及结构稳定分析对有限元软件 ANSYS 进行了详细的介绍。本书对有限元方法的原理说明力求简明，避免繁琐公式的推导，可作为有限元学习的入门读物。

本书可作为土建、水利、道桥等专业的教材，也可供航空航天、机械工程、动力工程等领域的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法基础／赵维涛，陈孝珍主编．—北京：科学出版社，2009

（全国高等院校土木工程类应用型系列规划教材）

ISBN 978-7-03-025187-9

Ⅰ．有… Ⅱ．①赵…②陈… Ⅲ．有限元法 Ⅳ．0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 138976 号

责任编辑：陈迅／责任校对：柏连海

责任印制：吕春珉／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2009 年 9 月第一次印刷 印张：10

印数：1—3 000 字数：223 800

定价：18.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62137026（BA08）

前　言

有限元法是求解工程问题的一种有效的数值计算方法，在许多领域中已成为进行科学研究和工程分析的重要方法和手段。有限元的出现，使得许多科学理论在技术上得以实现和应用，极大地推动了人类技术能力的发展，是广大工程技术人员需要掌握的必要知识。

我国很多高等工科院校已经开设了有限元课程，并编写了一批优秀的有限元教材，但随着高等教育体制的改革和科学技术的发展，一些教材已经不能适应目前教学的要求。尽管介绍有限元法的书籍较多，但讲授的起点都比较高，对于只学习过材料力学的学生来说，具有一定的困难。编者在总结多年教学经验的基础上，编写了这本教材。全书主要介绍了弹性力学的基本理论、平面问题有限元、杆系结构有限元、空间问题及板壳有限元等。本书以平面问题有限元为主，对有限元方法的原理说明力求简明，对于一些比较深奥的问题，尽量避免繁琐公式的推导，多以结论或工程经验的形式给出，使学生通过本课程的学习，能较为全面地了解和掌握有限元法的基础理论知识，熟练运用有限元软件，达到理论和应用相结合的目的，为后续学习有关课程及将来从事相应工作奠定基础。

本书适合于土木类和机械类本科生使用，适用学时为 32～40 学时；也可以作为工程技术人员学习有限元的入门教材。

本书共分 6 章，第 1～3 章由沈阳航空工业学院的赵维涛编写，第 4、5 章由南阳理工学院的陈孝珍编写，第 6 章由华北水利水电学院的何伟编写；全书的习题及其参考答案部分由哈尔滨工程大学的白丽丽编写。

由于作者水平有限，书中难免会有不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2009.4.15

目　录

第一章 绪 论

学习要点 本章主要介绍了有限元的一些基本概念和基本原理，如节点、单元、离散化、有限元基本步骤等，并简单介绍了有限元及有限元软件的发展状态和发展趋势。

1.1 有限元的基本概念

1.1.1 什么是有限元

有限元法是求解工程问题的一种有效的数值计算方法，在许多领域中例如，土木工程、海洋结构工程、航空航天，已成为进行科学研究和工程分析的重要方法和手段。有限元的出现，使得许多科学理论在技术上得以实现、得到应用，极大地推动了人类技术能力的发展，是广大工程技术人员需要掌握的必要知识。

有限元法的实质是将复杂的连续体划分为有限多个简单的单元体，化无限自由度问题为有限自由度问题，将连续场函数的(偏)微分方程的求解问题转化成有限个参数的代数方程组的求解问题。

有限元法的基本思想是先化整为零、再积零为整，也就是把一个连续体人为分割成有限个单元，即把一个结构看成由若干通过结点相连的单元组成的整体，先进行单元分析，然后再把这些单元组合起来代表原来的结构进行整体分析。从数学的角度来看，有限元法是将一个偏微分方程化成一个代数方程组，然后利用计算机进行求解的方法。由于有限元采用了矩阵算法，因此借助计算机便可以快速地算出结果。早在公元 3 世纪的时候，我国数学家刘徽提出的用分割法求解圆周的方法就是有限元基本思想的体现。经典结构力学求解刚架内力的位移法，将刚架看成是由许多在节点处连接的杆件单元组成，先研究每个杆件单元，最后将其组合进行综合分析。这种先离散、后整合的方法便是有限元法的基本思想。

1.1.2 基本概念

任何连续体都可以假想地分割成有限个简单形状单元体的组合，在有限元法中将这些简单形状的单元体称为单元，把单元与单元之间设置的相互连接点，称为节点，如图 1.1所示。从理论上说，单元的分割可以是任意的，不过在实际计算中必须根据研究对象的特点，使单元分割既满足力学分析要求，又能使计算简便。

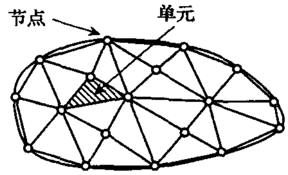

图 1.1 单元与节点

在有限元法中引入节点的概念是至关重要的，有了节点，才可以将实际连续体看成是仅在节点处相互连接的单元群组成的离散型结构，从而可使研究的对象转化成可以

使用计算机计算的数学模型。实际上，两个相邻单元在整个交界处(包括节点)都是相互连接的、相互作用的，而有限元法假定除节点外，都不相互连接和相互作用，这一点是不符合实际的。但是，在有限元分析中将要求两相邻单元在公共交界处变形协调，并将两单元在公共交界处相互作用的内力按静力等效原则移置到节点上后，实践证明这种假设是合理的，可使复杂问题大为简化。

1.1.3 基本步骤

1. 结构离散化

结构离散化就是将结构分成有限个小的单元，单元与单元、单元与边界之间通过节点连接。结构离散化是有限元分析的第一步，关系到计算精度与计算效率，是有限元法的基础步骤，包括以下三个方面：选择单元类型；网格划分；节点编码。

2. 单元分析

通过对单元的力学分析建立单元刚度矩阵。

3. 整体分析

整体分析包括以下三个方面：形成整体载荷列阵；形成整体刚度矩阵，得到总体平衡方程；引入边界条件，求解总体平衡方程，求出节点位移。

1.2 有限元的发展状况

1960 年，Clough 在他的一篇论文“平面分析的有限元法”中最先引入了有限元法(finite element method)这一术语。这一方法是结构分析专家把杆件结构力学中的位移法推广到求解连续体介质力学问题而提出来的。这一方法的提出，引起了广泛的关注，吸引了众多力学、数学方面的专家和学者对此进行研究。数学家的研究表明，有限元法可应用于求解偏微分方程，可用于具有变分泛函的任何数学问题。而且，数学家对有限元的思路早就有了，不过没有用“有限单元”这个术语。此后，大量学者、专家开始使用这一离散方法来处理结构分析、流体分析、热传导、电磁学等复杂问题。从 1963 年到 1964 年，Besseling 、B. H. pian 等人的研究工作表明，有限元方法实际上是弹性力学变分原理中瑞雷-里兹法的一种形式，从而在理论上为有限元方法奠定了数学基础。但与变分原理相比，有限元方法更为灵活，适应性更强，计算精度更高。这一成果也大大刺激了变分原理的研究和发展，先后出现了一系列基于变分原理的新型有限元模型，如混合元、非协调元、广义协调元等。1967 年，Zienkiewicz 和 Cheung 出版了第一本关于有限元分析的专著。

20 世纪 70 年代后，有限元法进一步得到蓬勃发展，其应用范围扩展到所有工程领域，成为连续介质问题数值解法中最活跃的分支。由变分法有限元扩展到加权残数法与能量平衡法有限元，由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩

展到稳定性问题、动力问题和波动问题，由线性问题扩展到非线性问题，分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等，由结构分析扩展到结构优化乃至于设计自动化，从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等领域。近年来随着计算机技术的普及和计算速度的不断提高，有限元分析在工程设计和分析中得到了越来越广泛的重视，已经成为解决复杂的工程分析计算问题的有效途径，现在从汽车到航天飞机几乎所有的设计制造都已离不开有限元分析计算，其在机械制造、材料加工、航空航天、汽车、土木建筑、电子电器、国防军工、船舶、铁道、石化、能源等科学研究各个领域的广泛使用已使设计水平发生了质的飞跃。目前流行的有限元分析软件主要有 ANSYS、SAP、NASTRAN、ADINA 、ABAQUS、MARC、COSMOS 等。纵观当今国际上有限元软件的发展情况，可看出有限元软件的一些发展趋势：与 CAD 软件的无缝集成；更为强大的网格处理能力；由求解线性问题发展到求解非线性问题；由单一结构场求解发展到耦合场问题的求解；程序面向用户的开放性等。

第二章 弹性力学基本理论

学习要点 弹性力学是固体力学的一个分支，研究弹性体由于外力作用或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移；是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有所需的强度、刚度和稳定性，并寻求或改进它们的计算方法；是有限元法的理论基础。本章简单介绍了弹性力学的一些基本理论，为后续课程的学习奠定理论基础。

2.1 弹性力学的基本假设

为了建立相应的数学模型，如果精确考虑所有各方面的因素，则导出的方程非常复杂，实际上不可能求解。因此，通常必须按照研究对象的性质和求解问题的范围，做出若干基本假设，从而略去一些暂不考虑的因素，使得方程的求解成为可能。

1. 假定物体是连续的

也就是假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。这样，物体内的一些物理量，例如应力、形变、位移等，才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。实际上，一切物体都是由微粒组成的，都不能符合上述假定。但是，可以想见，只要微粒的尺寸，以及相邻微粒之间的距离，都比物体的尺寸小得多，那么，关于物体连续性的假定，就不会引起显著的误差。

2. 假定物体是完全弹性的

也就是假定物体完全服从虎克定律——应变与引起该应变的那个应力分量成比例；反映这种比例关系的常数，即所谓弹性常数，并不随应力分量或应变的大小和符号而变。具体地说，当应力分量增大到若干倍时，应变也增大到同一倍数；当应力分量减小到若干分之一时，应变也减小到同一分数，当应力分量减小为零时，应变也减小为零(没有任何剩余形变)；当应力分量反其符号时，应变也反其符号，而且两者仍然保持同样的比例关系。由材料力学已知，脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，可以作为近似的完全弹性体；塑性材料的物体，在应力未达到屈服极限以前，也可以作为近似的完全弹性体。

3. 假定物体是均匀的

也就是假定，整个物体是由同一材料组成的。这样，整个物体的所有各部分才具有相同的弹性，因而物体的弹性常数才不随位置坐标而变，可以取出该物体的任意一小部分来加以分析，然后把分析的结果应用于整个物体。如果物体是由两种或两种以上的材料组

成的，那么，只要每一种材料的颗粒远远小于物体，而且在物体内均匀分布，这个物体也可以当作是均匀的。

4. 假定物体是各向同性的

也就是，物体内一点的弹性在所有各个方向都相同。这样，物体的弹性常数才不随方向而变。显然，木材和竹材的构件都不能当作各向同性体。至于钢材的构件，虽然它含有各向异性的晶体，但由于晶体很微小，而且是随机排列的，所以钢材构件的弹性(包含无数多微小晶体随机排列时的统观弹性)，大致是各向相同的。

凡是符合以上四个假定的物体，就称为理想弹性体。

5. 假定位移和形变是微小的

这就是说，假定物体受力以后，整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，因而应变和转角都远小于1。这样，在建立物体变形以后的平衡方程时，就可以用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸，而不致引起显著的误差，并且，在考察物体的形变及位移时，转角和应变的二次幂或乘积都可以略去不计。这才可能使得弹性力学中的代数方程和微分方程简化为线性方程。

2.2　弹性力学平面问题

任何一个弹性体都是空间物体，一般的外力都是空间力系。因此，严格来说，任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。但在满足一定的条件下，一些空间问题可以简化为平面问题，这样处理可以大大减少工作量，并且能够满足工程上对精度的要求。弹性力学平面问题可以分为两类：一类是平面应力问题；另一类是平面应变问题。

2.2.1　平面应力问题

几何特征：一个方向的尺寸比另两个方向的尺寸小得多，例如等厚度平面薄板。

受力特征：外力和约束，仅平行于板面作用，沿 z 方向不变化。

应力特征：如图2.1选取坐标系，以板的中面为 xy 平面，垂直于中面的任一直线为 z 轴。由于板面上不受力，有

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,(\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,(\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0 \tag{2.1}$$

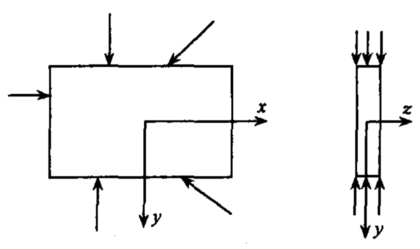

图2.1　平面应力问题

因板很薄，且外力沿 z 轴方向不变，可认为整个薄板的各点都有

$$\sigma_z=0,\tau_{zx}=0,\tau_{zy}=0 \tag{2.2}$$

由剪应力互等定理，有

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0, \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0 \tag{2.3}$$

因此，平面应力问题只有三个应力分量，仅为 x、y 的函数，与 z 无关，即

$$\sigma_x = \sigma_x(x,y), \sigma_y = \sigma_y(x,y), \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xy}(x,y) \tag{2.4}$$

2.2.2 平面应变问题

几何特征：一个方向的尺寸比另两个方向的尺寸大得多，且沿长度方向几何形状和尺寸不变化，例如水坝，如图 2.2 所示。

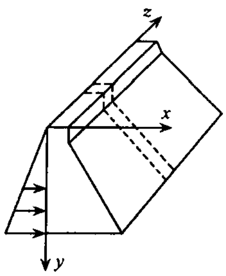

图 2.2 平面应变问题

受力特征：外力和约束平行于横截面作用，沿长度 z 方向不变化。

应变特征：如图 2.2 选取坐标系，以任一横截面为 xy 面，任一纵线为 z 轴，则任一横截面均可视为对称面，有沿 z 方向的位移

$$w = 0 \tag{2.5}$$

所有各点的位移矢量都平行于 $x\,y$ 平面，则

$$\varepsilon_z = 0, \gamma_{zy} = \gamma_{yz} = 0, \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0 \tag{2.6}$$

因此，平面应变问题只有三个应变分量，仅为 x、y 的函数，与 z 无关，即

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x,y), \varepsilon_y = \varepsilon_y(x,y), \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{xy}(x,y) \tag{2.7}$$

2.2.3 平衡微分方程

平面问题的平衡微分方程，描述了微元体应力分量与体力分量之间的关系。无论是平面应力还是平面应变问题，平衡方程是一致的。取出一块 dxdy，厚度为一个单位长度的微元体，将其所受力画在其上，如图 2.3 所示。设单位体积上的体积力为

$$G = \{G_x\, G_y\}^{\mathrm{T}} \tag{2.8}$$

由 $\sum F_x = 0$，得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + G_x = 0 \tag{2.9}$$

由 $\sum F_y = 0$，得

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + G_y = 0 \tag{2.10}$$

由力矩平衡方程，得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{2.11}$$

式(2.9)和式(2.10)称为平面问题的平衡微分方程，式(2.11)证明了切应力互等定理。

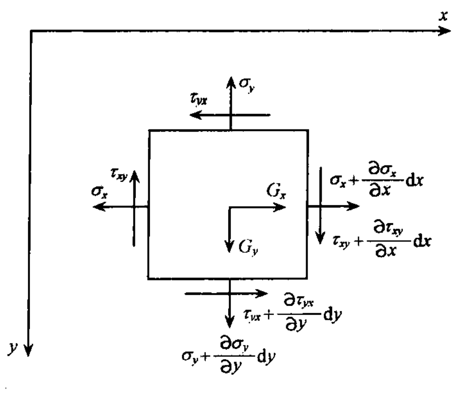

图 2.3 微元体受力图

2.2.4　几何方程

平面问题的几何方程，描述了弹性体内任意一点的应变与位移之间的关系。经过弹性体内的任意一点 P，沿 x 轴和 y 轴的方向取两个微小长度的线段 $PA = \mathrm{d}x$ 和 $PB = \mathrm{d}y$，如图 2.4 所示。

假定弹性体受力以后，P、A、B 三点分别移动到 P'、A'、B'。经推导后得出平面问题中表明形变分量与位移分量之间的关系式，为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

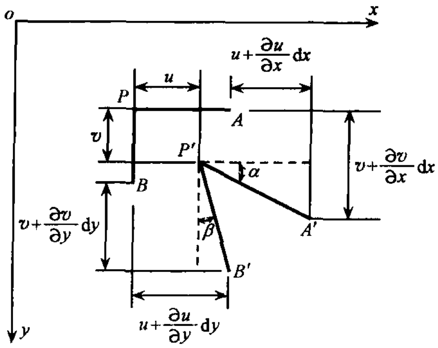

图 2.4　变形图

几何方程反映了弹性体内任一点的位移与该点应变间的关系，是弹性力学的基本方程之一。由以上几何方程可见，当物体的位移分量完全确定时（表示成为 x 和 y 的确定函数时），形变分量即完全确定。反之，当形变分量完全确定时，位移分量却不能完全确定，还需要引入边界条件。

2.2.5　物理方程

平面问题的物理方程，描述了弹性体内任意一点的应变分量与应力分量之间的关系。在完全弹性和各向同性的情况下，物性方程即为材料力学中的广义胡克定律，为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

式中：E——弹性模量；

G——剪切模量；

μ——泊松比。

三个弹性常数的关系为 $G = E/2(1+\mu)$，在平面应力问题中，$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$，则

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

这就是平面应力问题中的物理方程，由式(2.13)中的第三式可得

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{2.15}$$

该式可用于计算薄板厚度的改变。

在平面应变问题中，$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ ，则

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

这就是平面应变问题中的物理方程，由式(2.13)中的第三式可得

$$\sigma_z = -\mu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{2.17}$$

由式(2.14)和式(2.16)可以看出，只要将式(2.14)中的 E 换成 $E/(1-\mu^2)$ ，μ 换成 $\mu/(1-\mu)$ ，则式(2.14)就变成了式(2.16)。因此，两种平面问题的物理方程可以写成统一的形式，若以应变表示应力，则两种平面问题物理方程的统一形式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E'}{(1-\mu'^2)}\begin{bmatrix} 1 & \mu' & 0 \\ \mu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu'}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D\varepsilon} \tag{2.18}$$

式中：$\boldsymbol{\sigma}$——应力矩阵；

$\boldsymbol{D}$——弹性矩阵；

$\boldsymbol{\varepsilon}$——应变矩阵。

弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为对称矩阵，表达式为

$$\boldsymbol{D} = \frac{E'}{(1-\mu'^2)}\begin{bmatrix} 1 & \mu' & 0 \\ \mu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu'}{2} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

对于平面应力问题，$E' = E$ 、$\mu' = \mu$ ；对应平面应变问题，$E' = E/(1-\mu^2)$ 、$\mu' = \mu/(1-\mu)$ 。

2.2.6 边界条件及圣维南原理

通过边界条件可以建立边界上的物理量与内部物理量之间的关系，这是建立力学模型的重要环节。按照边界条件的不同，可分为位移边界问题、应力边界问题和混合边界问

题。在位移边界问题中，弹性体在全部边界上的位移分量都是已知的；在应力边界问题中，弹性体在全部边界上所受的面力都是已知的；在混合边界问题中，弹性体的一部分边界具有已知位移，另一部分边界则具有已知面力，此外在同一边界上还可能出现混合边界条件。实际情况可能还要复杂，但每一边界都必须给出两个边界值。

在求解弹性力学问题时，使应力分量、形变分量、位移分量完全满足基本方程，并不困难。但是，要使得边界条件也得到完全满足，却往往发生很大的困难(因此，弹性力学问题在数学上被称为边值问题或边界问题)。另一方面，在很多的工程结构计算中，都会遇到这样的情况：在物体的一小部分边界上，仅仅知道物体所受的面力的合成，而这个面力的分布方式并不明确，因而无从考虑这部分边界上的边界条件。在上述两种情况下，圣维南原理有时可以提供很大的帮助。

圣维南原理的描述是：如果把物体的一小部分边界的面力，变换为分布不同但静力等效的面力(主矢量相同，对于同一点的主矩也相同)，那么，近处的应力分布将有显著的改变，但是远处所受的影响可以不计。

圣维南原理对弹性力学在工程中的应用有着重要的意义，如图 2.5 所示的悬臂梁在自由端受集中力偶的作用。显然，在自由端表面无法提出逐点力的边界条件，但利用圣维南原理，可以用图 2.5 所示静力等效的分布面力表示力偶作用，这样得到的解答对梁的绝大部分区域的解是准确的，而只有自由端局部小范围可能不够精度。

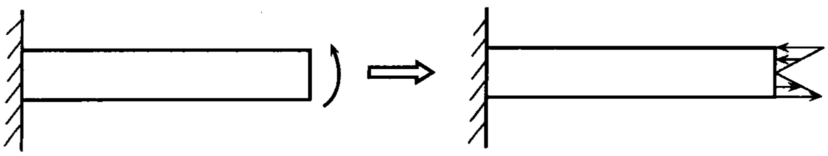

图 2.5　按圣维南原理等效处理的弯矩

2.2.7　平面问题的基本解法

综合起来，弹性力学平面问题的基本方程有 8 个：2 个平衡微分方程、3 个几何方程、3 个物理方程。这 8 个基本方程中包含 8 个未知函数(坐标的未知函数)：3 个应力分量 σ_x ，σ_y ，$\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ；3 个形变分量 ε_x ，ε_y ，γ_{xy} ；2 个位移分量 u ，v 。基本方程的数目恰好等于未知函数的数目，因此，在适当的边界条件下，从基本方程求解未知函数是可能的。在实际求解中，根据所取基本未知量的不同，弹性力学平面问题的基本解法可以分为两类：以应力为基本未知量的称为应力法；以位移为基本未知量的称为位移法。

2.3　能量原理

系统的能量极值原理指出：在所有满足内部连续条件和运动学边界条件的位移中，满足平衡方程的位移使系统的总势能取驻值。如果驻值是极小值，则平衡是稳定的，反之，使系统势能取驻值的位移函数，则是表达平衡状态的微分方程的解。

处于稳定平衡状态的弹性体具有弹性应变能 U ，设应变能密度为 W ，则

$$U = \iiint W \mathrm{d}V \tag{2.20}$$

对于没有初应力、初应变的线弹性体，应变能密度为

$$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.21}$$

系统的总势能为

$$\Pi = \iiint W\mathrm{d}V - \iiint \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\mathrm{d}V - \iint \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\mathrm{d}S \tag{2.22}$$

式中：$\boldsymbol{u}$——位移矢量；

$\boldsymbol{G}$——体积力；

$\boldsymbol{q}$——系统边界 S 上的表面力。

上式中，第一项积分是系统的弹性应变能，后面两项积分是系统的外力功，一项为体积力 $\boldsymbol{G}$ 所做的功，一项为系统边界上的表面力 $\boldsymbol{q}$ 所做的功。

小　结

1）弹性力学的基本假设。

① 假定物体是连续的；② 假定物体是完全弹性的；③ 假定物体是均匀的；④ 假定物体是各向同性的；⑤ 假定位移和形变是微小的。

2）平衡微分方程。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + G_x = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + G_y = 0 \end{cases}$$

3）几何方程。

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

4）物理方程。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E'}{(1-\mu'^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu' & 0 \\ \mu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu'}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D\varepsilon}$$

5）圣维南原理。

如果把物体的一小部分边界的面力，变换为分布不同但静力等效的面力（主矢量相同，对于同一点的主矩也相同），那么，近处的应力分布将有显著的改变，但是远处所受的影响可以不计。