奥林匹克数学系列讲座

国际数学竞赛解题方法

单墫 葛军

IMO

中国少年儿童出版社

AOLINPIKE SHU XUE XILIE JIANG ZUO

奥林　列讲座

国际数学竞赛解题方法

单墫 葛军

中国少年儿童出版社

封面设计：李恒辰
责任编辑：陈效师

国际数学竞赛解题方法

单墫 葛军

*

中国少年儿童出版社出版 发行

中国青年出版社印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×970　1/32　4印张　2插页　58千字

1990年6月北京第1版　1990年10月北京第2次印刷

印数5,001—15,000册　定价1.80元

内容提要

作者是中国数学奥林匹克教练组组长。他对第一届到第三十届IMO的试题进行了深入的研究和探讨，从总共182道题中，筛选出59道有代表性的问题，进行了分析和总结，使读者可以居高临下一览IMO的试题特点与风貌。

本书充分展示了作者深厚的数学功力和独到的解题才华。全书语言简练、明快、活泼，使人在繁难的数学问题面前心态平静、充满自信。作者巧妙地摘引了诗、歌、名句放在每节之前，使你仿佛在悦耳的古典或现代轻音乐中逐步进入角色。

现代数学的思想方法正在向中学渗透，有志参加IMO的同学、数学爱好者以及数学教育工作者必将从本书中得到有益的启示。

前　　言

国际数学奥林匹克（IMO），自1959年开始，每年一届，仅1980年中止一次，至1989年已经举行了三十届。

1989年，我国6名中学生在第三十届IMO中荣获4块金牌、2块银牌，总分居第一位。1990年，第三十一届IMO确定在中国举行。这两件事情对我国的数学竞赛与数学教育是有很重要意义的。

从第一届至第三十届IMO的试题共182道。对这些试题进行研究和探讨，不仅可以提高我国各级数学竞赛的水平，而且可以从中看到数学竞赛的演进，看到现代数学的思想方法在向中学渗透，因而也就可以看到数学教育发展的正确方向。

我们想做一点初步的工作，着重在两个方面：第一是加强分析，也就是设想自己来解某一道题，应当如何思考，如何找出解法；第二是加强总结，对解法的优劣作一些讲评，对题目的来源与推广作一些讨论。

我们从182道题中选出59道，这些题较有代表性，通过这些题，读者可以了解到IMO的试题的特点与风貌。

目　　录

1　三十年前

旧时王谢堂前燕，

飞入寻常百姓家。

——刘禹锡：《乌衣巷》

下面是三十年前（1959年），第一届IMO（在罗马尼亚古都布拉索夫举行）的两道试题（编号是原来的编号，括号中的国名是出这道题的国家，以下同此）。

例 1　（2，罗马尼亚）x取什么实数值时，等式

$$(a)\ \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2},$$

$$(b)\ \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1,$$

$$(c)\ \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$$

能成立？这里的平方根取非负数。

例 2　（3，匈牙利）设a、b、c及x为实数，并且$\cos x$满足二次方程

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0。\qquad (1)$$

求作一个使$\cos(2x)$能够满足的二次方程。

在$a=4$，$b=2$，$c=-1$时，比较一下这两个方程。

这两道题平平常常，在现在中学的习题里就能够找到，可见数学竞赛并非高不可攀。当然现在的水平大大地超过了三十年前，但这种类型的题目用作训练，加强基础，还是很有用处的。

虽然题目不难，也还是要谨慎从事，尤其罗马尼亚那道题，很容易出错。

这道题着重考察所谓算术根的概念。题目中的最后一句话“这里的平方根取非负数”，已经泄漏了天机。

此外还需要注意方程左边那个式子的定义域是 $x \geqslant \frac{1}{2}$。在这个定义域中，左式有意义而且取非负值。现在将（a）中的方程两边平方，由于

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} \cdot \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\sqrt{x^2-(2x-1)}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$$

（算术根），经过整理后，方程成为

$$2x+2|x-1|=2。$$

函数

$$2x+2|x-1|=\begin{cases}4x-2, & 若 x>1; \\ 2, & 若 x \leqslant 1。\end{cases}$$

所以（a）的答案是

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1。\quad （注意定义域！）$$

同样可得（b）无解，（c）的解为$\frac{3}{2}$。

本题的另一种解法需要一点技巧：将形如$\sqrt{a+2\sqrt{b}}$的式子化简。这只有在b可表成两个实数c、d之积，并且$a=c+d$时才是可能的。

例如$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{3},$$

其中$b=6=2\times3$，$a=5=2+3$。

现在先在（a）中，使方程两边同乘$\sqrt{2}$，得

$$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}=2。$$

这样$\sqrt{2x-1}$前面有一因数2，$2x-1=(2x-1)\cdot1$，$2x=(2x-1)+1$，所以

$$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}=\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}$$

$$=\sqrt{2x-1}+1。$$

同样（但请注意算术根）

$$\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}=\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}$$

$$=\left|\sqrt{2x-1}-1\right|=\begin{cases}\sqrt{2x-1}-1, & 若x>1;\\ 1-\sqrt{2x-1}, & 若\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1。\end{cases}$$

从而不难得出与前面相同的结果。

另一道题当然要用二倍角公式

$$\cos2x=2\cos^2x-1。$$

即

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}。\qquad (1)$$

这样，方程

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0$$

中的 $\cos^2 x$ 已经能用 $\cos 2x$ 的多项式代替。为了处理 $b\cos x$ 中的 $\cos x$，最好是先将它变成 $\cos^2 x$。为此，移项，得

$$a\cos^2 x+c=-b\cos x。$$

平方，得

$$(a\cos^2 x+c)^2=b^2\cos^2 x,$$

然后再用(1)式代入，经过化简，得

$$a^2\cos^2 2x+2(a^2+2ac-b^2)\cos 2x+(a+2c)^2-2b^2=0。$$

这就是所求的方程（用这个方法，可以从 X 满足的方程导出一个 X^2 满足的方程。只需先将奇次项移到方程的一边，然后再平方）。

在 $a=4$，$b=2$，$c=-1$ 时，新方程与原方程相同（这时 $\cos x$ 与 $\cos 2x$ 是同一个二次方程的根。容易算出 $x=2k\pi\pm\frac{2}{5}\pi$，k 为整数）。

“做学问当于无疑处有疑。”一道题做完以后，往往可以提出一些新的问题。例如在这里我们可以问：

当 a、b、c 为哪些值时，新方程与原方程相同？

答案是 $a:b:c=4:2:(-1)$，$1:(-2):1$ 或 $(-2):1:1$。

2 路在脚下

敢问路在何方？

路在脚下。

——电视剧《西游记》插曲

近年的竞赛题是不是特别难呢？

并不是这样。

如果说“今非昔比”的话，今天的竞赛题着重在自己去找路，不像过去的题，往往有成熟的套路。这就更富于竞争性，更需要发挥你的创造力，更有利于发展你的个性。

路，并不一定非常难找。往往就在脚下，只是需要你低头去看，去观察，去发现。

请看第三十届（1989年）的一道题：

例 （1，菲律宾）求证：集合$\{1,2,\cdots,1989\}$可以分为117个互不相交的子集$A_i(i=1,2,\cdots,117)$，使得

（1）每个A_i含有17个元素；

（2）每个A_i中各元素之和相同。

原始的问题是分为17个互不相交的子集。选题的委员会认为太容易了，将17改成117。其实“换汤不换药”，本质并无变化。

要证明“可以分为……，使得……”，最有效的方法就是构造法，即把符合要求的一种分法具体切实地写出来。

“登高必自卑，行远必自迩”。1989太大了，117太多了。我们先用小一些的数作试验品。例如将{1，2，…，10}分为5个具有类似性质的子集，能不能办到？（选题的人将题越改越难，我们正好反其道而行之。）

这个问题应该说是非常容易的，略一尝试就可得出一个答案，我们把它写成二行五列的表

1	2	3	3	5
10	9	8	7	6

每一列是一个子集，共有5个子集，每个子集两个元素。各子集互不相交，而且每相邻两列的元素之和相等（因为上一行右面的元素多1，而下一行右面的元素少1），所以各子集元素的和相同。

从这里向前推进一步：将{1，2，…，20}分为5个具有类似性质的子集也不困难，例如表

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16

就代表一种分法（并不是唯一的分法），其中每一列代表子集。这个表可以更简单地写成

1　2　3　4　5

5	4	3	2	1	（本行各数应加5）
1	2	3	4	5	（本行各数应加2×5）
5	4	3	2	1	（本行各数应加3×5）

使它的本质显露得更加清楚。

连续的20个整数（不限定为1～20）也可以这样处理，因为同一行的每个数都加上一个相同的数后，各列的和仍然相等。

当各子集的元数n是偶数时，上面的方法足以解决问题。现在考虑各子集的元数n是奇数的情况。先考虑最简单的情况：如何将{1,2，…，15}分为5个子集（$n=3$），具有上面所述的性质？

采用三行五列的表，第一行仍照顺序从左到右写下1至5。第二行的1至5(实际上是$1+5$至$5+5$)不能按照顺序从右到左写了（否则每列前两行的和相等，第三行无论怎么写也无法使各列的和相等）。

怎样写第二行，可以说是问题的关键。

这也许需要尝试好多次才能成功。不过，如果你希望有不很复杂的规律（不是杂乱无章），并且与原来的做法差别不太大的话，那么最好是（可能是事后诸葛的总结）：1仍旧写在最右面，2则与1隔一格，3再与2隔一格，4又与3隔一格（即转回到第2列），5与4隔一格，得到

1	2	3	4	5	
3	5	2	4	1	（本行各数应加5）
5	2	4	1	3	（本行各数应加2×5）

表中第三行，即将第二行左移一格。这时每相

邻两列有一个数相同（撇去应加的5的倍数），另两个数的和相等，因而各列的和均相等。

原来的问题已经不难解决了。我们可以列出17行117列的表：

1 ，2 ，3 ，4 ，5 ，……，113，114，115，116，117，

59 ，117，58 ，116，57 ，……，3 ，61 ，2 ，60 ，1 ，

117，58 ，116，57 ，115，……，61 ，2 ，60 ，1 ，59 ，

每两行与后两行相同

1 ，2 ，3 ，4 ，5 ，……，113，114，115，116，117，

117，116，115，114，113，……，5 ，4 ，3 ，2 ，1 ，

1 ，2 ，3 ，4 ，5 ，……，113，114，115，116，117，

117，116，115，114，113，……，5 ，4 ，3 ，2 ，1 ，

⋮

1 ，2 ，3 ，4 ，5 ，……，113，114，115，116，117，

117，116，115，114，113，……，5 ，4 ，3 ，2 ，1 。

（表中第j行各数应加上 $(j-1)\times117$，$j=1, 2, \cdots, 17$。）

表中每一列是一个子集，不难看出这些子集满

足要求。

选题委员会还考虑了问题的另一种变形：

"设$M=\{1, 2, \cdots, n\}$，若M可以表示为m个的互不相交的子集A_i（$i=1, 2, \cdots, m$）的并集，使得

（i）每个A_i的元数相同；

（ii）对$i=1, 2, \cdots, m$，A_i中所有元素的和相等。

求m所应满足的充分必要条件。"

我们设A_i的元数为l，则$lm=n$。由前面的讨论，不难得出在l为偶数或者l为大于1的奇数并且m为奇数时，M均可以表示为m个具有所述的子集的并。

在l为奇数、m为偶数时，由于

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

所以各子集的元素的和应为$\frac{n(n+1)}{2m}=\frac{l(n+1)}{2}$，

但n为偶数，l、$n+1$都是奇数，$\frac{l(n+1)}{2}$不是整数，矛盾！即合乎要求的分法并不存在。

于是m所应满足的充分必要条件是：

"$\frac{n}{m}$是整数，大于1并且在$\frac{n}{m}$为奇数时，m也是奇数。"

3　以曲求伸

尺蠖之曲，

为求伸也。

——《周易·系辞下》

上一节，我们先退到比较简单的情况，找出规律，然后再进到较为复杂，较为一般的情况。这种以曲求伸，欲进先退的方法，在数学中常常用到。我国著名数学家华罗庚先生就曾经指出：“善于‘退’，足够地‘退’，‘退’到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍！”

例　（29届4，爱尔兰）证明不等式

$$\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geqslant\frac{5}{4} \tag{1}$$

的解集是总长为1988的一些不相交的区间的并集。

我们先退到最简单的情况，即（1)的左边只有一项或两项。只有一项的情况是

$$\frac{1}{x-1}\geqslant\frac{5}{4}。\tag{2}$$

这个不等式的左边必须是正数，所以

$$x>1。\tag{3}$$

在(3）的限制下(2）可化成

$$\frac{4}{5} \geqslant x-1。$$

于是，(2) 的解为

$$\frac{4}{5}+1 \geqslant x > 1。\tag{4}$$

解集是一个长为$\frac{4}{5}$的区间（一端开，一端闭）。

只有两项的情况是

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2} \geqslant \frac{5}{4}。\tag{5}$$

在$(x-1)(x-2) \underset{(<)}{>} 0$时，(5) 可化为

$$(x-2)+2(x-1) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} \frac{5}{4}(x-1)(x-2)。$$

即

$$\begin{aligned}&-(x-1)(x-2)\\&+\frac{4}{5}\Big((x-2)+2(x-1)\Big) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0。\end{aligned}\tag{6}$$

(6)是一个二次不等式，当然并不难解。但我们的目的并不是解这个不等式，而是要求出 (5)的解集的总长。更重要的是，我们希望能通过这些特殊情况的讨论，**发现**普遍的**规律**。所以(6) 式左边没有进行化简，我们特别小心翼翼，唯恐这种化简会使可以发现的规律变得模糊不清。