科學圖書大庫

自然科學叢書之一

數　學

(十一至十五册合訂本)

湯元吉　主編

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

自然科學叢書之一

數　　學

（十一至十五册合訂本）

湯元吉　主編

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月五日再版

自然科學叢書之一

數　　學 (3)

全套 24 單册，合訂五册，不分售

基本定價 20.80

主編　湯元吉

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號

發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號

承印者　大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號　電話9719739

序

居今日而欲致國家於富強之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身羈異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲。前歲之多，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以迻譯刋行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢承，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋溯、李煥燊、南登岐、孫賡年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊倰（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，復承臺灣新生報謝總社長然之、王社長嘯生及顏副總經理伯勤慨允由該社擔任印刷及發行工作，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心*譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。玆值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

中華民國五十一年元月湯元吉序於臺北

---

* 該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄭堃厚、湯元吉等九人。

編 輯 要 旨

一•本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二•本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三•本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事敎授各該有關課業之敎師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四•原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種敎學措施，學生於作成論文後，校方尙需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五•本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六•本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七•本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，敎育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尙冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尙祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指敎，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第十一册目錄

立體幾何（續）

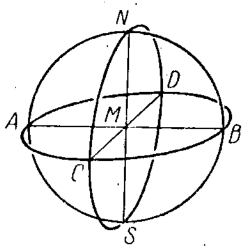
三角學入門

立 體 幾 何（續）

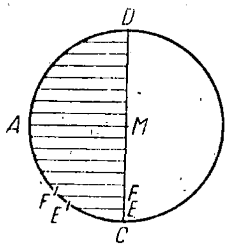
球（Kugel）

球 的 畫 法

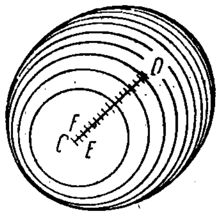
第十册〔884〕節所述的直角平行投影（或稱正投影）中，一 912
個球的每個圖形都是一個圓，其直徑乃與球的直徑相等。各位如果做一個球的模型，並且畫一張略圖的話，就可自己弄個明白。但在傾斜平行投影中，是不是也是這種情形呢？



912 a



912 b



912 c

在〔912*a*〕圖中，是以傾斜平行投影畫出通過一個圓球的三個截面。這三個截面都是通過球的中心，因此它們都是最大的**球體圓**（Kugelkreis）。各位可在一個球體模型（好比地球儀上）設法使自己明瞭，球體表面上是能畫出小的和大的以及最大的圓圈的！在地球儀上最大的球體圓是經線圈，最大的緯線圈則僅有赤道一條。

我們奉勸各位，可用鐵線作成三個大小相等的圓型，並且使之符合〔912*a*〕圖的形狀。

〔912*a*〕圖所顯示的三個圓中，僅有一個與畫面平行的是眞正的圓，其直徑 AB 和 NS 乃和球體直徑相等。有直徑 AB 和 CD 的第二截面是一個水平截面，有直徑 NS 和 CD 的第三截面是一個與畫面互成直角的縱截面。此縱截面和水平截面的圖形

都是橢圓，可依照第十册〔892〕節所講的方法把它畫出來。

我們看了這三個最大球體圓之圖，便可想像一個球體的綜合圖形如經傾斜平行投影，是不會顯出圓的輪廓的。為了獲得此綜合圖形，我們特在〔912*b*〕圖中畫出水平圓的平面圖（即由上往下看的圖），保持其原有形狀，並將其直徑 CD 分為 16 等分。在〔912*c*〕圖內則以傾斜平行投影法畫出同樣的直徑 CD（但已縮小一半），也把它分成 16 等分。現在要將〔912*c*〕圖中介於 C 和 D 之間的分割點視為許多球截面的中心，此等球體截面是和畫面平行，亦即平行於〔912*a*〕圖中的垂直圓（其直徑為 AB 和 NS）。這些球的截面在〔912*c*〕圖中，也同樣顯出沒有縮小和變形的許多圓。這些圓的直徑，其眞實長度可取自〔912*b*〕圖。好比在〔912*c*〕圖中，以 EE' 為半徑，E 為圓心所畫的圓，其半徑之長就是取自〔912*b*〕圖；然後以 F 為圓心，FF' 為半徑畫圓，都是如此，其餘可類推。在此還要注意這些圓，那一部分可以看見，那一部分看不見。依此方法形成的綜合圖形，按其輪廓看來好像是球體以傾斜平行投影所顯示的圖形：這是一個橢圓，與圓形相差極微，在畫草圖時每可以圓代之。

球體上的探討

以球面作為幾何軌跡

913 在第四册〔391〕節中已有說明，球體的表面是空間所有點的軌跡，這些點與一已知點（即圓心）有相等的距離。此距離稱為球體的半徑。

當吹玻璃球的時候，由於空氣壓力向各方面均勻傳播之故，所以會促成球的形狀。

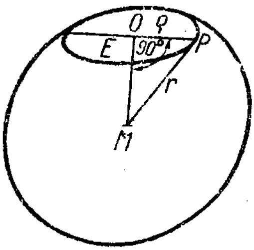
球與其截面

我們設想一個球被一個平行移動的平面 E 所截；由此形成的截面就叫做**球截面**。

在此易於證明的是：

凡平坦的球截面都是一個圓面

在〔913a〕圖中垂直於畫面的球截面 E，係由曲線所圍成。



913 a

此一曲線為什麼是一條圓周線，亦即曲線上每一個點為什麼都與一中心有相等距離，這是我們現在所欲加以證明的。若由球體的中心點 M 引垂線 MO 垂直於截面 E，即可求得此中心點 O。現在以截線上任一點 P 聯結 O 和 M，則對每一點 P 均可適用：$\measuredangle POM=90°$（因由 M 點已作垂線垂直於 E 平面）；其次因為球體半徑 $r=MP$, 及垂直線段 MO 均為常數，故對所求曲線的每一點 P 都可適用：

$$\rho=PO=\sqrt{r^2-(OM)^2}$$

這是一個常數值，故可證明曲線是一個圓。

當截面 E 作理想中平行於本身的運動時，便形成各種大小的球體圓，亦即大小不等的球截面：

設 $MO=0$，亦即截面係從球的中心通過，則球截面的圓周便是一個最大的球體圓；若以 $OM=0$ 代入前面的等式，各位亦可看出這種情形。設 $MO=r$，則球截面就收縮變成一點；在此情形之下，可將點視為逐漸變小的圓面之極限。而在此極限情形中，平面 E 遂與球體接觸於一點，成為一個**切線平面**（Tangential-Ebene）。

地球非真正的圓球

地球在數學上並非準確的圓球形狀，是不言可喻的，因為由 914
於山川的凹凸，地球的表面並不是一個平滑的，而是一個不整齊的粗糙球面。不過地球的"凸凹山川"與其碩大無比的體積相較，那是微不足道的。最高的山峯為亞洲的喜馬拉雅山，海拔雖有 8880 公尺，然而地球的半徑竟達 6370 公里之長。世界聞名的大川，如中國之黃河長江，其深度如何，更不值一提了。

習 題

1) 以比例尺 $R\,1:100{,}000{,}000=1:10^8$ 畫一圓，其半徑為6370公里；試在其圓周表示一個 8880 公尺的高地！結果如何？

各位經過計算之後便可發現，一個山脈高出海平面的最高峰與地球半徑相比，實在是小巫見大巫（參閱第九册中之〔854〕節）。因此，一個小小的地球儀配以平坦的光滑表面，並未失其眞實性。

假如我們顧及南北兩極的扁平率，試問地球與眞正圓球形的偏差究有多大？由地球中心至赤道的距離大約是 6377 公里，至南極或北極的距離大約是 6356 公里。這個偏差嚴格說來是相當的大，但如用比例尺畫出來却又變小了；各位試解答下面第二題，便可看的很清楚：

2) 以比例尺 1：60,000,000 畫一圓，其半徑爲 6377 公里，並以 6356 公里作半徑再畫一同心圓！

各位計算的結果顯示，在用厚紙板製成的地球儀上，地球的扁平率自然要比製造地球儀時難予避免的偏差小得多了。

球的各部份

915 一個球倘被一平面截成兩個立體，則此二立體稱爲**球缺**或**截球體**(Kugelabschnitt 或 Kugelsegment)。假如它們是大小不同的兩部份，那末，不僅小的部份叫做球缺，大的部份亦作如此稱呼。參閱第五册〔530〕節中所講的**圓缺**或稱**弓形**(Kreisabschnitt)!

一個截球體（但只有這個！）的彎曲表面稱爲**球帽**或**球冠**。各位要注意，選用這些名詞是多麼的恰當啊！

球帽的高 h_k 和截球體的高是垂直於**截面圓**，並且是由截面圓的中心直達帽頂的線段。

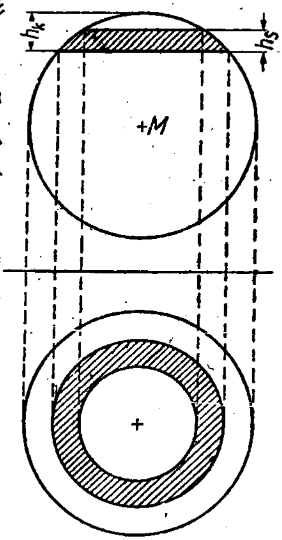
在二平行截面之間是一個**球層**或稱**實體帶**。

在二平行截面間的球體表面部份，是一條**面帶**，亦稱爲**球體腰帶**。這又是一個頗爲巧妙的名稱！球體層和面帶的高 h_s 是二截面的垂直距離。

在〔915a〕圖中，是將直角平行投影所畫出的一個球體層（正面和平面圖）。

被刻卜勒氏（Kepler）很恰切的命名爲球齒的**球心角體**（Kugelsektor），是以球帽與圓錐面爲界，而此圓錐面是決定於帽的球體圓及體之中心。在〔915b〕圖中畫的是一個球心角體的正面圖，在其右邊是一個埋頭鑽，用此鑽頭就可鑽成球心角體，假如它是够大，而且其尖端能鑽至球體中心的話。

試由各位的周遭舉出許多球形與其各部份的例子！



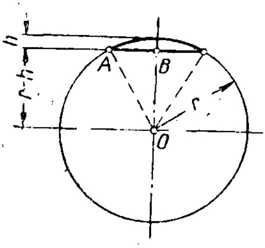
915 a

計 算 法

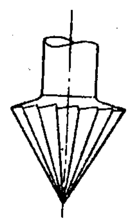
1） 球的體積

第一册〔59〕節中所介 916

紹的幾何學家歐幾里得氏（Euklid），他僅知道球的體積與其半徑的立方（卽三次冪）成比例。（我們很快就會講到這個問題。）球的一套完整的計算法是阿基米得氏（紀元前287至212年）首先完成的。因爲他首先使球與外接於它的直圓柱發生了關係，所以人們卽將一個球與外接圓柱之圖形雕刻在這個偉大的希臘數學家之墓碑上，並且經過多少年以後，那裏的人都還認識這塊墓碑。阿基米得氏出生的叙拉古城（Syrakus）是由希臘人在西西里島上建造的，該城所用的錢幣也鑄有同樣的圖形，藉以紀念這偉大的居民。



915 b

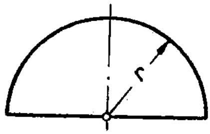


915 b

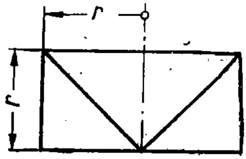
爲了溫故而知球的新算法，特應用一個**半球**與一**直圓柱**和一倒置的**直圓錐**互作比較，而這些物體的底面和高都是相同的。

在〔916a〕圖中畫了一個正面的半球（半徑＝r），在〔916b〕圖中是它的透視圖。各位試設想一個半球的乾酪蓋所包圍的空間，以作比較！〔916c 及 916d〕二圖是表示一個圓柱（半徑＝高＝r）和一個直圓錐（底面半徑＝高＝r），而此圓錐放在圓柱中，其底面與圓柱的頂面疊合，因此圓錐的尖端正好位於圓柱底面的中心。在〔916e〕圖中是將圓柱中的圓錐取出後畫出來的剩餘體。爲了可以很清楚的想像這個剩餘體的形狀，各位可以假設那圓柱是由上往下被鑽成的漏斗形。

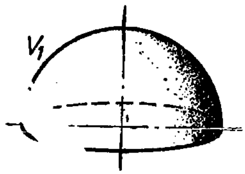
現在要將〔916e〕圖中剩餘體之體積V_2與〔916b〕



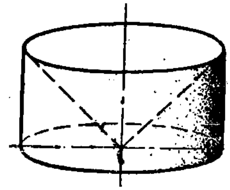
916 a

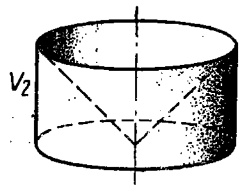


916 c

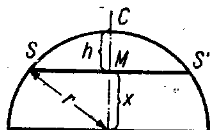


16 b

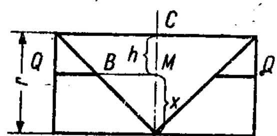

916 d



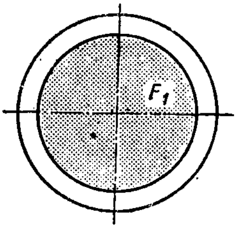
916 e



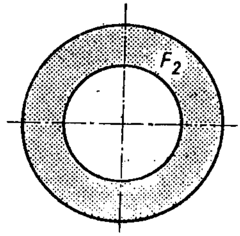
916 f



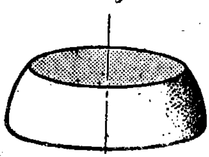
916 i

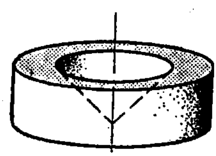


916 g



916 k


916 h


916 l

圖中半球之體積V_1作一比較。

根據第十册〔898〕節中所述的卡瓦雷利定理，我們斷定 $V_1=V_2$。但何時才能證明這主張是對的呢？倘若將半球和剩餘體置於平行的平面中間，而能證明同高的橫截面在任何位置均有相等的面積之時，就可獲得 $V_1=V_2$ 的證明。

在〔916f 至 k〕各圖中，是將這兩個高度相同的物體放在平行的平面之間。此外通過二體各作一個橫截面，平行於等高的那些平面，但在何處作此截面，則屬隨心所欲之事（如SS'和QQ'）。

由這橫截面所能證明的一切，都適用於用同樣方法所作成的一切橫截面，這是符合卡瓦雷利定理的。在〔916f, g, i 及 k〕各圖中，各位可以看見兩個被截物體的正面圖和平面圖；在〔916h 及 l〕二圖中，却是所截下半部物體的透視圖。

由下底面至橫截面的距離，在兩個物體中都是 x；這是暫時引用的一段長度，到後來經過計算就會自然消失的。

通過半球，且在〔916f〕圖中以線段 SS' 出現的橫截面SS'，其面積假定是 F_1；它是一個圓面，可照第九册〔859〕節所講的方法計算之：

$F_1=\pi\cdot(SM)^2$；按畢達哥拉定理得

$(SM)^2=r^2-x^2$，因此

$F_1=\pi\cdot(r^2-x^2)$，參看〔916f〕之圖形！

通過剩餘體所作成的，而在〔916i〕圖中是以二條線段所表示的橫截面 QQ'，到了〔916k 及 l〕圖中則顯示爲用黑點表現出來的圓環 F_2。玆計算如下：

$F_2=\pi\cdot(MQ)^2-\pi\cdot(MB)^2$；$MQ=r$；$MB=x$（什麼緣故？請注意等腰直角三角形之腰！）

$F_2=\pi\cdot(r^2-x^2)$； 倘將 F_1 和 F_2 作比較，即得：

$F_1=F_2$（按第一册〔61〕節所講的等量定理）

因爲 x 是任意選定的，所以根據卡瓦雷利定理已經證明半球和剩餘體都是等積的，即 $V_1=V_2$；但因依照第十册〔894〕和〔901

〕二節所講，可以計算圓柱和圓錐的體積，故易於求得剩餘體的體積，後者乃與圓柱體積減去圓錐體積之差相等：

$$V_2=\pi\cdot r^2\cdot r-\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot r=\pi\cdot r^3-\frac{1}{3}\pi\cdot r^3=\frac{2}{3}\pi\cdot r^3$$

整個球的體積 V 是等於 V_2 的二倍，即

$$\boxed{V=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3}$$

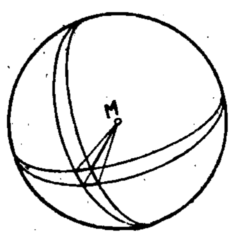
2）球的全面積 O

917 球的表面不能和以上所講一切物體的表面一樣，可以展開成爲一個平面。各位如將一個橡皮球切開，就容易看出這種情形。因此，必須尋求一個新的方法，才能計算球的表面。

假如我們能解方程式 $V=f(O)$，意即：如能利用球面的大小以計算球的體積，那麼我們現在面對的問題，便變成以 O 當作 r 的函數進行計算，這是行得通的，因爲 V 是 r 之函數，我們是曉得的。

各位還記得地球儀上的**經線圈**（即經過南北極的子午線圈）和**緯線圈**嗎？（緯線圈或稱**平行圈**；平行圈所構成之平面是與赤道平面平行的）。由於這些橫直相交的線，就把地球表面分爲許多**球面四角形**，似此圖形各位在一般地圖上是可以看出來的。假如採用相當密的經線和緯線，那麼就可以把那些球面四角形看成平面四角形，而不致有太大的差誤。若將如此四角形的角和球的中心 M 聯成直線，如〔917a〕圖所示，結果便會形成一個角錐，它是以四角形爲底及以 r 爲高的。設以 F_1 表示球面四角形的面積，即可依下面的近似公式求角錐體之體積：

$$V_1=\frac{1}{3}F_1\cdot r$$



917 a

假如我們設想地球或其他球體的總表面分爲許多四角形，如 F_1，F_2，F_3……等，

則球的總表面 O 必等於 $F_1+F_2+F_3+\cdots\cdots$之和，而所有角錐之總體積就是球的體積：

$$V=\frac{1}{3}F_1\cdot r+\frac{1}{3}F_2\cdot r+\frac{1}{3}F_3\cdot r+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(F_1+F_2+F_3+\cdots\cdots)\cdot r=\frac{1}{3}\cdot O\cdot r$$

但根據〔916〕節所述，知 $V=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3$；如將此 V 值代入前式內，則得$\frac{4}{3}\pi\cdot r^3=\frac{1}{3}\cdot O\cdot r$；以$\frac{3}{r}$乘方程式二邊，可得下式：

$$\boxed{O=4\pi\cdot r^2}$$

由此可見球的全面積是等於同大等高的直圓柱之側面積〔$(2\pi\cdot r)\cdot(2r)$〕，或等於最大球體圓之四倍〔$4\cdot(\pi\cdot r^2)$〕，或等於最大球體圓的直徑與圓周之乘積〔$(2\pi\cdot r)\cdot(2r)$〕。

3） 截球體 (Kugelabschnitt)

〔916f〕圖中的截球體和〔916i〕圖中的剩餘體，二者之高都 918
是 h，這一點已滿足卡瓦雷利定理的條件，〔916〕節中業經加以證明了。因此，截球體的體積是等於剩餘體的體積。後者是等於圓柱（其高為 h）減錐臺（其高為 h）之差，可計算如下：

$$V=\pi\cdot r^2\cdot h-\frac{1}{3}\pi\cdot h\cdot[r^2+r(r-h)+(r-h)^2]$$

$$=\pi\cdot r^2\cdot h-\frac{1}{3}\pi\cdot h\cdot[r^2+r^2-rh+r^2-2rh+h^2]$$

$$=\pi\cdot r^2\cdot h-\frac{1}{3}\pi\cdot h\cdot[3r^2-3rh+h^2]$$

$$=\pi\cdot r^2\cdot h-\pi r^2\cdot h+\pi\cdot r\cdot h^2-\frac{1}{3}\pi\cdot h^3$$

$$=\frac{3}{3}\pi\cdot r\cdot h^2-\frac{1}{3}\pi\cdot h^3$$

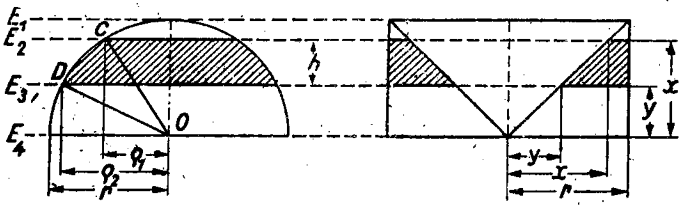
$$\boxed{V=\frac{\pi\cdot h^2}{3}(3r-h)}$$

習 題：

令截球體的h增大至極限值$h=2r$！然後可求得那一個公式？

4） 球層（即實體帶）的體積

919 球層的體積亦可依照卡瓦雷利定理計算。



919 a 919 b

〔919a 及 b〕圖的圖形是符合於〔916f 及 i〕圖的圖形，但還包含兩個截面 E_2 和 E_3。此二平行平面間之球層，根據剛才所說的定理，是與同一平面間的剩餘體等積的。在〔919a 及 b〕二圖中，特用陰影線將此二立體很明顯的表現出來。若以 x 表示平面 E_2 與 E_1 間的距離，而以 y 表示平面 E_3 與 E_4 間的距離，那麼在〔919b〕圖中顯出的 x 和 y 就是圓錐底面的半徑，而剩餘體的體積 V 則可當作圓柱（其高爲 h）與錐臺（其高爲 h）之差計算如下：

$$V=\pi\cdot r^2\cdot h-\frac{\pi}{3}\cdot h\cdot(x^2+xy+y^2)$$

因爲在球體層上不能直接量出 r，x 和 y的大小，但可用遊尺量得〔919a〕圖所示二截面的半徑 ρ_1,ρ_2 及高 h，故可以 ρ_1,ρ_2 和 h 代替 r,x 和 y：

$$\begin{aligned}(OC)^2&=r^2=\rho_1{}^2+x^2\\ \underline{(OD)^2}&\underline{=r^2=\rho_2{}^2+y^2}:\end{aligned}\qquad \text{將此二式相加：}$$

$$2r^2=\rho_1{}^2+\rho_2{}^2+x^2+y^2\;;\quad r^2=\frac{\rho_1{}^2+\rho_2{}^2+x^2+y^2}{2}$$

將此值代入 V 式中：

$$V=\pi\cdot h\cdot\frac{\rho_1{}^2+\rho_2{}^2+x^2+y^2}{2}-\frac{\pi}{3}\cdot h\cdot(x^2+xy+y^2)$$