算學叢書

第一種

最小二乘式

李協著

商務印書館發行

中華民國十三年六月初版
中華民國二十一年十一月國難後第一版
中華民國二十三年七月國難後第二版

算學叢書 最小二乘式一冊 (三二一六)
每冊定價大洋壹元貳角
外埠酌加運費匯費

著作者 李協

發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

三五二三上

最小二乘式

目錄

最小二乘式

敍論

余今將以一種最緻密之算法.名曰最小二乘式,介紹於吾國.此法用於測量地域,用於物理化學等觀察,平其舛差可以得極精確之結果,爲用甚要且鉅也.

中國訖今尙無最小二乘式算法譯本,或關乎此法之著述,足徵吾國人對於科學之懈弛.顧此法在歐洲則非新創,蓋闡明已百餘年矣.

1795年,德意志著名數學家Gauss年始十八歲,已闡明最小二乘式之理.同時法人Legendre亦有此發明.1806年已著論行世.而Gauss之法則於1809年始經宣佈.

發明之權,以前後論,自應屬之Legendre.顧Gauss獨能力窮此術,闡發無遺,踵其後者又能窮致其用,而在法國則反寂然也.

最小二乘式之名,則由Legendre始,蓋Legendre 1806年所發表之著作'測定彗星軌道新法'(*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*)其附卷有*Sur la méthode des moindres carrés*,最小二乘法論文也.Gauss第一宣布關乎此法之著作,則爲臘丁文,名曰*Theoria motus corporum coelestium inseconibus conicis solem ambientium*,以後又有關乎此法之著作凡六種.

踵 Legendre 及 Gauss 而起者,若 Bessel, Euler, Jobueger, Lambert, Boscowich, Lagrange, Laplace 等,皆有功於此術者也.

今且進而言此法之原理.蓋人之官覺能力有限制,器具之精良非臻盡美,則觀察不能無舛差也.同一竿也,使甲乙並量其高,甲所報與乙所報不能盡同也.同一角也,用此器及彼器量其度分秒,二器所得不能一致也.同一人也,同一器也,使反覆量之,此次所得與彼次所得又不能無異也.一直角三角形也,量其三邊之長不能恰合於商高之定例也.(句方股方之和等於弦方,西人名曰 Pythagora's Law, 在中國則商高時已知此定理.'周髀算經'曰,故折矩以爲句廣三,股脩四,徑隅五,旣方其外半之一矩環而共盤得成三四五.又曰,若求邪至日者,以日下爲句,日高爲股,句股各自乘,並而開方除之得邪.)量其三角,不能並爲二直角無盈朒也.

今欲免舛差之弊,有一法可乎?曰,凡量一物大小,恃一人,用一器,觀察一次足矣,羣言紛淆反足亂人意也.量直角三角形,得其二邊足矣,他邊之長可布籌而知也.得其二角足矣,他角可由一百八十度減已知之角而知也.畫蛇添足,非徒無益,又足害事也.

爲是言也,是無異士師之折獄,但據一證人之詞以爲斷,欲得其平難矣.夫證人多矣,詞各有異,苟合而加以審察,方可得其眞情.測算亦然,必合多數之觀察窮其舛差之由來,究其大小,始可得幾近無差之結果.此則需乎平差之術 (Ausglechung-srechung),此最小二乘式算法之所由來也.

第一章 論觀察之差及其分類

觀察者之能力,與所獲舛差之大小頗有關繫.后羿一射,萬夫決拾;弱子操弓,慈母閉門.蓋羿之於射有不失正鵠之能力,弱子則東西南北且莫適從,遑云射乎,無怪乎慈母之閉門也.然耕當命僕,織當命婢,射亦當命習射者,言舛差則就習射者言,不當就不習射者言之也.今試懸一招焉,畫同心三圜於其上,聚習射者而命之射,以圜心爲的,中之者鮮矣.不出乎初圜者,射之上者也,然爲數無幾.介乎初次圜之間者,次焉者也,能者居多焉.介乎次圜三圜之間者,下焉者也,在習射者之中亦不數睹焉.並三圜而不能入,則可無與於此射矣.故舛差有無理之舛差,有有理之舛差.招在東而射西,無理者也.雖不中鵠不遠矣,有理者也.舛差有麤微之別焉.次圜之外,麤者也.次圜之內,微者也.首圜之內,則更微矣.觀察者須能免於麤舛差,始可以事觀察.

麤舛差之原不特此也.使以經緯儀測角而風撼其三足架,遠視鏡軸之方向已失而觀察者莫覺.使以氣壓儀測高而氣溫驟變,寒暑針已報其差而觀察者弗睹.凡此類事,一有不愼,麤舛隨之,不能免除,亦不足以事觀察也.

麤差可免,微差不能也.取術愼,觀察細,練習頻,固可限其差於極微極細.然欲純然無差,不可及也.

舛差之所由來,命曰差源.今欲於各種觀察之結果探其差源,難能事也.然以舛差發現之情形,可別之爲二類:(1)其發現

也恆有一定之律,其方向恆不變,或常爲正,或常爲負.(2)其發現也無一定之律,其方向非不變,可爲正,可爲負.請舉例以明之.設布尺量距.使尺之長稍有過焉,雖其差僅微忽,然每布尺一次卽增一微忽之差,其差與布尺之次數爲正比,與所量之距之遠近爲正比,其方向常爲正.如是者,名曰有律之舛差.

使所用布尺無微忽之過與不及,而布尺時或稍前,或稍後,雖其前後之差亦不過微忽,而其結果亦可以使觀察之數頗有出入.但布尺或過前過後,二者不敢必其一有而他無,其機會相等也,或巧遇之而過前者與過後者數適相等,正負適相消,則其差爲零,然而不可必也.或不巧遇之而俱過前或俱過後,其差俱爲正或俱爲負,則其差爲極盈,或正負之數不等而以正負之差爲差,則其差較弱,然亦不可必也.如是者,名曰無律之舛差.抑有一事可以斷言者,則無律之差,其增長率常遲於有律之差也.

舛差之源不一類,必探其源,別其類,始可以言平差.

二類之差,或其一與焉,或兩者俱與焉,必審觀察之結果而別之.

例若量一物之大小,用同一器,守同一法,受同一外感(氣候或他物理上感觸),反復數次而所得結果互有出入,但其差甚微,非可以視作麤者,則其源蓋無律者也.反是,若每量一次用器異,外感殊,法亦不一,而各得微差,則其源或爲有律,或爲無律,或俱有責焉,必合二者所得舛差之量而審別之,乃可以定某類舛差分劑之多寡.

第二章　論或是率,舛差之或是率

天下事物,有可見其眞是者,有不可見其眞是而敢言其或是者.謂河中有鯉,吾敢言其眞是也;謂釣於河而得鯉,吾但可言其或是也.或是者有等差焉.謂良馬日馳五百里,吾敢信其多分是而少分非,謂駑蹇日馳五百里,吾敢信其少分是而多分非.擲一骰於盆中,而欲得⁙:,必不可得也.⚀至⚅任取其一,必可得也.獨欲得⚄則或可得或不可得,且多分不可得而僅少分可得.其不可得之率爲六之五,其可得之率爲六之一.蓋骰之六面,五面非⚄,僅一面爲⚄也.其可得之率,名曰或是率.

或是率何以定.曰,凡事物之遇也,有其機緣焉,機緣多者頻遇,機緣寡者罕遇.遊於稷下者所見多齊人,遊於郢者所見多楚人.於稷下則齊人之機緣多,而於郢則楚人之機緣多也.骰之六面,⚄居其一,是⚄之機緣僅六之一也.故言某事物之或是率者,以某事物機緣之數與凡所可有機緣之數相比也.舛差亦然.命某舛差機緣之數爲 m, 凡所可有機緣數爲 n, 則該舛差之或是率爲

$$W=\frac{m}{n} \tag{1}$$

n 必大於 m, 故或是率 W 必恆小於 1. 設 $m=n$, 則 $W=1$: 其義云何?則或是進而爲眞是也.設使骰之六面俱爲⚄,則每擲皆⚄,不必言或是矣.⚄之機緣於是有六,而骰所可現之面亦爲六,卽凡所可有機緣之數爲六.以六比六,等於一.故一者,眞是之謂也,亦可命爲或是率之單位.

設 $m=0$，則 $W=0$，無機緣，卽無或是率也。故一骰所以不能擲七點者，以骰之六面無七點之機緣也。

設欲以二骰擲七點，則可。其機緣凡有六，因 $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$，俱爲七也。而凡所可有之機緣則凡三十六。因此骰之每一面，皆有一機緣與他骰任一面並列，故此骰六面，一一與他骰之六面相遞並列，其機緣之數爲 $6\times6=36$ 也。於是知七點之或是率爲 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

設囊中有黑豆五，白豆七，黃豆九，任出其一，則黑豆之或是率爲 $\frac{5}{21}$，白豆之或是率爲 $\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$，黃豆之或是率爲 $\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

設囊中三色豆之數如上。任出其一，欲其或爲黑或爲白，則黑豆之機緣有五，白豆之機緣有七，二豆之機緣共有十二，而凡所可有機緣之數爲二十一。故黑白豆任出其一之或是率爲 $\frac{12}{21}$.

普通論之，甲之機緣爲 a，乙之機緣爲 b，丙之機緣爲 c，甲乙機緣之和爲 $a+b$，凡所可有機緣之數爲 $a+b+c$. 故甲或乙任出其一之或是率爲 $W=\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}$.

甲獨出之或是率爲 $W_1=\frac{a}{a+b+c}$，乙獨出之或是率爲 $W_2=\frac{b}{a+b+c}$，故甲或乙任出其一之或是率爲

$$W=W_1+W_2, \tag{2}$$

名曰或是率之和。

設觀察時,一舛差 ϵ_1 之或是率為 W_1,又一舛差 ϵ_2 之或是率為 W_2,又一舛差 ϵ_3 之或是率為 W_3,如是例推,則多舛差或是率之和為

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots\cdots \qquad (2')$$

設有二囊.甲囊貯黑豆五,白豆七.乙囊貯黑豆三,白豆六.而欲由每囊中各出一黑豆,則因甲囊中每一黑豆各有與乙囊中任一黑豆並出之一機緣,故二囊同時出一黑豆之機緣為 $5\times3=15$,而凡所可有機緣之數則為 $(5+7)(3+6)=12\times9=108$.故二囊同時出一黑豆之或是率為 $\frac{15}{108}=\frac{5}{36}$.

普通論之,設甲囊中有黑豆 a',白豆 b',乙囊中有黑豆 a'',白豆 b''.欲同時由二囊中各出一黑豆,則其或是率為

$$W=\frac{a'a''}{(a'+b')(a''+b'')}=\frac{a'}{a'+b'}\cdot\frac{a''}{a''+b''}.$$

由甲囊出一黑豆之或是率為 $W'=\frac{a'}{a'+b'}$,由乙囊出一黑豆之或是率為 $W''=\frac{a''}{a''+b''}$.故二囊同時各出一黑豆之或是率為

$$W = W'\cdot W'', \qquad (3)$$

名曰或是率之積.

設觀察多次,其每次舛差命為 ϵ', ϵ'', ϵ''',……,各舛差之或是率為 W', W'', W''',……,則其或是率之積為

$$W = W'\cdot W''\cdot W'''\cdots\cdots. \qquad (4)$$

以上所舉諸例,各事物之機緣數,皆假定為可數而知者也.故其或是率亦易知之.設其或是率不能算得,則可以其出現之頻數,返而推其或是率.

例如言煤礦工人，千人中僅二百五十人壽達六十齡。則任指一煤礦工人，推其壽命，可否達六十，其或是率不過 $\frac{250}{1000}=\frac{1}{4}$。

今再以是例推之於舛差。顧舛差之眞值，難得知也。然一事物，觀察至多次，則雖不得其眞，而其近似乎眞者可比推而見也。近似乎眞者，維何？曰，平均值是也。

下舉之例，豫定者二事。(一)麤舛差絕不至出現。(二)觀察用同法，用同器，同一謹密行之。

設一距離，量之二次。第一次得其長爲 l_1，第二次爲 l_2，二者數不相符，則俱非可命爲眞長也。

姑命 L 爲距離之長。所量得者或過之，爲 $l_1=L+\epsilon_1$；或不及，爲 $l_2=L-\epsilon_2$。是其舛差之方向，或爲正或爲負也，而正與負之機緣正相等耳。故舛差之和，必可望至正負相消而等於 0，卽 $\epsilon_1+\epsilon_2=0$ $(\epsilon_1=+\epsilon;\ \epsilon_2=-\epsilon)$。以兩次所得之值 l_1 及 l_2 相加而二分之，卽得

$$L=\frac{L+\epsilon_1+L+\epsilon_2}{2}=\frac{2L}{2}=\frac{l_1+l_2}{2}, \tag{4}$$

名曰觀察結果之平均值，雖非眞值而較爲密近者也。

若觀察 n 次，得 $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots, l_n$ 諸值。每次各帶一舛差爲 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\cdots\cdots, \epsilon_n$，其方向或爲正或爲負。因距機緣相等，故可命正負之數相等，卽其和 $\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3\cdots\cdots+\epsilon_n=[\epsilon]^{(1)}=0$。姑命 L 爲距離之長，則 $l_1=L+\epsilon_1,\ l_2=L+\epsilon_2,\ l_3=L+\epsilon_3, \cdots\cdots,\ l_n=L+\epsilon_n$。

(1) 凡數之和以方弧〔 〕代諸加號，爲 Gauss 所創用。本書依用之。下倣此。

而

$$L=\frac{L+\epsilon_1+L+\epsilon_2+L+\epsilon_3+\cdots+L+\epsilon_n}{n}=\frac{[L+\epsilon]}{n}$$

$$=\frac{nL+[\epsilon]}{n}=\frac{[l]}{n}, \qquad (4)$$

爲觀察 n 次距離之平均值,雖不可遽命爲距離之眞長,而較之觀察二次之平均值則更密近矣.

觀察之次數愈多,則其平均值愈近眞值.

不得觀察之眞值以定各舛差之或是率,就其平均值定之,亦可也.玆借一現成之例以明之.

昔 Bessel 測東普魯士之經緯度,其於 Trenk 站所測 Mednick-Fuchsderg 之角,凡十八次,其結果列舉如下表:

號數	觀察角度	舛差
1	83° 30′ 36.25″	−1.38″
2	7.50	−2.63
3	6.00	−1.13
4	4.77	+0.10
5	3.75	+1.12
6	0.25	+4.62
7	3.70	+1.17
8	6.14	−1.27
9	4.04	+0.83
10	6.96	−2.09
11	3.16	+1.71
12	4.57	+0.30
13	4.75	+0.12
14	6.50	−1.63
15	5.00	−0.13
16	4.75	+0.12
17	4.25	+0.62
18	5.25	−0.38
	總計 87.59	+10.71 −10.64
	平均值 83° 30′ 34.87″	

上表舛差,以各次觀察之數與其平均值相較而得者也。設論各舛差之或是率,則視各舛差之在

0″ 及 1″ 間者凡八

1″ 及 2″ 間者凡七

2″ 及 3″ 間者凡二

3″ 及 4″ 間者凡〇

4″ 及 5″ 間者凡一

總計舛差凡十有八。

由上統計中,可見舛差之小者,其遇也頻,舛差之大者,其遇也疏。蓋所用器壹,所用法同,其行量術也同一謹密,小差不能免,大差亦未易數數睹也。

由此觀之,舛差之或是率,關乎舛差之大小(關乎其精麤)。上統計中,舛差之在 0″ 及 1″ 間者凡八遇,與舛差總計十八相比爲 $\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$. 取 0″ 及 1″ 之平均值爲 0.5″, 則 0.5″ 之或是率爲

$$W(0.5'')=\frac{4}{9}=0.444\cdots\cdots.$$

但舛差之或是率,不但與其精麤有關繫也(如上例舛差之平均值爲 0.5), 且與其平均值上下二界之距有關繫(簡曰界距)。上例平均值 0.5″, 其上下二界之距爲 0″ 至 1″=1″, 其或是率固爲 0.44…矣。設狹其界距,令由 0.25″ 至 0.75″, 其平均值仍爲 0.5″, 而其遇之次數僅爲三,即其或是率爲 $W(0.5'')=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$.舛差之數愈多,所取之界距愈狹,則或是率之大小可作與界距大小爲正比觀之。

上理若以分析法推之,命舛差 ϵ 之或是率爲 $W(\epsilon)$,因或是率關乎 ϵ 之大小,可命爲 ϵ 之函數,其關繫可以 $\phi(\epsilon)$ 代之.又因其或是率與界距之大小爲正比,命界距爲 $d\epsilon$ (ϵ 之微分,蓋界距卽舛差增長之一段也),則或是率可總二關繫爲

$$W(\epsilon)=\phi(\epsilon)\,d\epsilon. \tag{5}$$

卽舛差 ϵ 在 $d\epsilon$ 界距中之或是率也.其上下二界爲

$$\epsilon-\frac{d\epsilon}{2} \text{ 及 } \epsilon+\frac{d\epsilon}{2},$$

或

$$\epsilon-d\epsilon \text{ 及 } \epsilon+d\epsilon.$$

ϵ 至 $d\epsilon$ 之間愈狹,則 $\phi(\epsilon)d\epsilon$ 之值愈小.設 $d\epsilon$ 小至無窮,則 $\phi(\epsilon)d\epsilon$ 亦小至無窮.如此,則借微分算法,可算一舛差於任意界距中之或是率.

設有多數舛差,ϵ 之或是率爲 $\phi(\epsilon)d\epsilon$, ϵ' 之或是率爲 $\phi(\epsilon')d\epsilon$, ϵ'' 之或是率爲 $\phi(\epsilon'')d\epsilon$, 如是例推,皆以 $d\epsilon$ 等距遞列.於此諸舛差中欲任遇一舛差,則其或是率爲 ϵ 或 ϵ' 或 ϵ'' 等任遇其一各或是率之和(公式 2').又命其距 $d\epsilon$ 小至無窮,則任取上下二界 a 及 b 間一舛差之或是率爲

$$W_a^b=\int_a^b\phi(\epsilon)\,d\epsilon. \tag{6}$$

第三章　論舛差函數

上章公式(6)內之 $\phi(\epsilon)$，名曰舛差函數.欲知舛差在任二界 a 及 b 間之或是率,必先知此函數.此函數之性質究若何,吾敢斷言者,有以下三端.

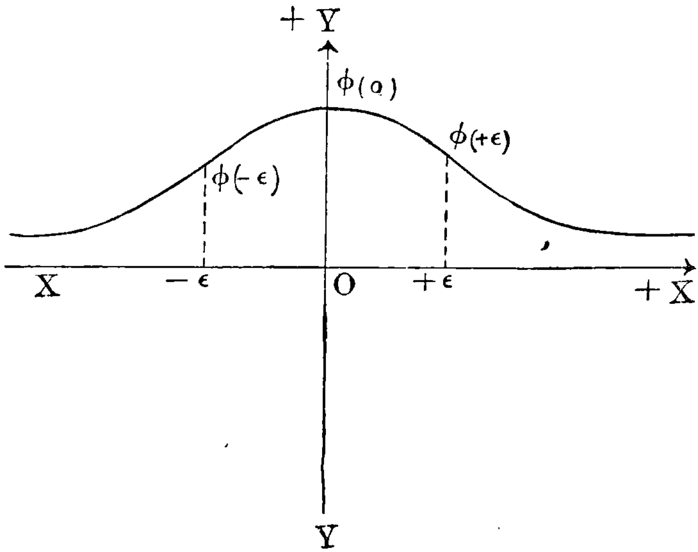
(1) 此函數必爲偶函數.因觀察多次,正舛差與負舛差機緣當相等(見上章),則應

$$\phi(+\epsilon)=\phi(-\epsilon) \qquad (7)$$

若非偶函數,則不能符此例也.

(2) ϵ 之值增(無論正負,以其絕對值言之).則 $\phi(\epsilon)$ 之值減.因舛差愈巨,其或是率應愈少也.

(3) $\epsilon=0$ 則 $\phi(\epsilon)=Max.$,卽舛差等於 0 則其或是率應最大也.



第一圖

試作圖以表之.作縱橫二軸 X 及 Y. 度 ϵ 於橫軸上,自元點 O 起向右爲正,向左爲負.由 X 任何點垂直向上度 $\phi(\epsilon)$ 與 Y 平行,則各點 $\phi(\epsilon)$ 之端點可聯成一曲線.試思此曲線應作何狀.

如第一圖:(1) 此曲線在 Y 軸兩側,必互相對稱,因 $\phi(+\epsilon)=\phi(-\epsilon)$ 故也.(2) X 軸必爲此曲線之漸近線,因舛差之遇,固麤者稀而細者密,然其麤細稀密,究無絕定之界限也.

舛差函數之性質,於此可略見一斑.顧其於 ϵ 之關繫眞狀,猶未知也,則請用下法以明之.

1. 用代數平均值求舛差函數法

一筆之長,兩次量之,得數不相符,則疑其一過長,一不足也.合兩得數而折中之,則約得其實矣.若更多次量之,則其得數之或過或不及,二者約各居其半,以其機緣相等故也.合多次得數,而以觀察之次數除之,則愈密近矣.名曰折中數,或曰代數平均值.代數平均值之或是率,在各觀察得數中,可以謂爲最大者也.

命各次觀察之得數(各次觀察俱同等審愼者)爲 $l_1,l_2,\cdots\cdots,l_n$,各帶一舛差爲 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots\cdots,\epsilon_n$,數之眞值命爲 χ.

觀察所得之數補其舛差,卽爲眞值.故

$$\chi=l_1+\epsilon_1=l_2+\epsilon_2=\cdots\cdots=l_n+\epsilon_n$$

$$=\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}+\frac{\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n}{n}=\frac{\Sigma l}{n}+\frac{\Sigma\epsilon}{n}.$$

上式右端之第一項,非他,卽觀察數 l 之代數平均值也.命爲 x,故

$$x=\frac{l_1+l_2+\cdots l_n}{n}=\frac{[l]}{n},\tag{8}$$

而
$$\chi=\frac{[l]}{n}+\frac{[\epsilon]}{n}=x+\frac{[\epsilon]}{n}.\tag{9}$$

n 愈增,則 $\frac{[\epsilon]}{n}$ 之值愈減.若 $n=\infty$,則 $\frac{[\epsilon]}{n}=0$ 而 $\chi=x$,卽觀察數之代數平均值可以作其眞值觀也.然孰有此力觀察一事物至無窮次乎?故其眞值吾不能驟得.若得觀察數之眞值,則其所帶舛差之眞值亦不難由

$$\epsilon_1=\chi-l_1,\ \epsilon_2=\chi-l_2,\cdots\cdots,\ \epsilon_n=\chi-l_n$$

各式而顯然畢露.惟吾所知者,仍不過觀察數之代數平均值也,故其舛差亦不能卽得其眞而不過爲其或是之值命爲

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n$$

$$x=l_1+\lambda_1=l_2+\lambda_2=\cdots\cdots=l_n+\lambda_n,$$

或
$$x=\frac{[l]}{n}+\frac{[\lambda]}{n}.\tag{10}$$

惟上曾命 $x=\frac{[l]}{n}$,則必 $\frac{[\lambda]}{n}=0$.

n 爲觀察之次數,不能期其至於無窮,故

必
$$[\lambda]=0.\tag{11}$$

由此可知舛差之性質,有正有負.積之,則彼此相消而化爲烏有也.

予於第二章之末,已以或是率之積用於觀察之舛差,命 λ_1 之或是率爲 $\phi(\lambda_1)d\lambda_1$, λ_2 之或是率爲 $\phi(\lambda_2)d\lambda_2,\cdots\cdots.\lambda_n$ 之或是率爲 $\phi(\lambda_n)d\lambda_n$. 則於 n 次觀察命各舛差相遞俱見,其或是率爲各舛差或是率之積(公式(3')),卽