理工科考研辅导系列　电子信息类

电磁场与电磁波

名校考研真题详解

金圣才　主　编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

理工科考研辅导系列（电子信息类）

电磁场与电磁波名校考研真题详解

金圣才 主 编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

编 委 会

前　　言

电磁场与电磁波是通信、电子、电气、信息等相关学科的重要专业基础课程，也是相关专业硕士研究生入学考试的必考内容。为了帮助广大读者掌握电路课程的学习方法和解题思路，顺利通过研究生入学考试或大学期末考试，我们在综合分析各大院校近年来出题特点的基础上，编写了本书。

本书共分为 7 章，每章包括四部分内容。第一部分主要是根据各高校的教学大纲、考试大纲等，对本章的重点与难点进行归纳，并进行简要解析；第二部分主要是精选知名院校近年的考研真题，并进行详细解答；第三部分主要是精选知名院校近年的本科期末考试真题，并进行详细解答；第四部分是典型题详解，该部分精选各类典型题并进行详解。

本书具有以下主要特点：

（1）所选题目均为知名院校近年的考研或期末考试真题，这些题目具有很高的有代表性。通过这些真题及其详解，读者可以在很大程度上判断和把握相关院校考研和大学期末考试的出题特点、解题要求等。

（2）对所有考试真题均进行了详细解答。了解历年真题不是目的，关键是要通过真题解答掌握和理解相关知识点，因此，本书不但精选了真题，同时还对所有的真题均进行了详细解答。

本书特别适合备战电磁场与电磁波考研和大学期末考试的读者，同时，对于参加相关专业同等学力考试、自学考试、资格考试的考生，本书也具有较高的参考价值。

参与本书编写的人员主要有王丹、陈志、董兵兵、许明波、孔丽娜、 张彩云、汤明旺、辛灵暖、吴义东、段辛云、段辛雷、辛灵轩等。

我们始终抱着一种严肃、认真的态度来编写本书，力求使内容准确、完整。但由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，敬请读者批评和指正。

在本书编写过程中，参考了很多考生的复习资料，不能一一核实其最终出处。如有疑问，请与编辑或作者（ytchenzip@163.com）联系。

编　者

2009 年 12 月

目　　录

第 1 章　矢量分析及电磁场的基本规律

1.1　重点与难点解析

（一）本章重点与难点

1. 电流连续性方程
2. 库仑定库
3. 电场强度
4. 安培力定律
5. 磁感应强度

（二）重点与难点解析

1. 电流连续性方程

根据电荷守恒定律可知，电流具有连续性，其方程为：

$$\oint_S J\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho \mathrm{d}\tau$$

$$\nabla J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

对于恒定电流，有：

$$\nabla J = 0$$

$$\oint_S J\mathrm{d}S = 0$$

这表明，空间的恒定电流场是无散场，恒定电流线没有起点和终点，形成连续的闭合曲线。

2. 库仑定库

真空中位于 r_1 处的点电荷 q_1 对位于 r_2 处的点电荷 q_2 的作用力为：

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2 \left(r_2 - r_1\right)}{4\pi\varepsilon_0 \left|r_2 - r_1\right|^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} R$$

3. 电场强度

在静电场中，若单位正电荷 q_0 在某一点受到的静电力为 $F(r)$，则定义该点的电场强度 $E(r)$ 为：

$$E(r) = \lim_{q_0 \to 0} \frac{F(r)}{q_0}$$

真空中的点电荷与连续分布电荷的电场强度表达式为：

点电荷：

$$E(r)=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R^3}R$$

体分布电荷：

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\frac{\rho(r')}{R^3}R\mathrm{d}\tau'$$

面分布电荷：

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s}\frac{\sigma(r')}{R^3}R\mathrm{d}S'$$

线分布电荷：

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{c}\frac{\rho_1(r')}{R^3}R\mathrm{d}l'$$

4. *安培力定律*

真空中的线电流回路 C_1 对回路 C_2 的磁场力为：

$$F_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{I_2\mathrm{d}l_2\times(I_1\mathrm{d}l_1\times R)}{R^3}$$

5. *磁感应强度*

真空中的电流分布的磁感应强度表达式为：

线电流：

$$B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C}\frac{I\mathrm{d}l'\times R}{R^3}$$

面电流：

$$B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S}\frac{J_S(r')\times R}{R^3}\mathrm{d}S'$$

体电流：

$$B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau}\frac{J(r')\times R}{R^3}\mathrm{d}\tau'$$

1.2 名校考研真题详解

【1-1】（电子科技大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）介质在外电场的作用下发生极化的物理机制是什么？受到极化的介质一般具有什么样的宏观特征？

答：介质极化的物理机制是：在外电场的作用下，介质中的非极性分子的正负电荷受到方向相反的电场力的作角，发生相对位移；而极性分子在电场的作用下，按一定方向有序排列；受到极化的介质中会出现宏观电荷分布（称为极化电荷或束缚电荷）。

【1-2】（电子科技大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）简述静电场边值问题的唯一性定理？它的意义何在？

答：给定区域 v 内的电荷分布以及区域 v 的边界 s 上的电位和电位的法向导数，则区域 v 内的电场是唯一确定的。

唯一性定理的意义：指出了电场唯一确定的条件并且为静电场边值问题的求解提供了理论依据。

【1-3】（电子科技大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）什么是位移电流？它是如何引入的？位移电流与传导电流有何本质上的区别？

答：位移电流是电位移矢量对时间的变化率，它是为了消除电荷守恒定律与安培环路定理之间的矛盾而引入的。位移电流与传导电流的本质区别在于：

传导电流是真实电流，会产生焦耳损耗，而位移电流不是真实电流，不会产生功率损耗。

【1-4】（国防科技大学 2004 年硕士研究生入学考试试题）写出麦克斯韦方程组的微分表达式和积分表达式？

解：微分表达式为：

$$\nabla H = J + \frac{\partial D}{\partial t},\ \nabla E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$\nabla D = \rho,\ \nabla B = 0$$

积分表达式为：

$$\oint_{l} H \mathrm{d}l = \int_{s}\left(\mathrm{J}+\frac{\partial D}{\partial \pi}\right)\mathrm{d}S,\ \oint_{l} E\mathrm{d}l = -\int_{s}\frac{\partial B}{\partial \pi}\mathrm{d}S$$
$$\oint_{s} D\mathrm{d}S = \int_{V}\rho \mathrm{dV},\ \oint_{s} B\mathrm{d}S = 0$$

【1-5】（国防科技大学 2004 年硕士研究生入学考试试题）在两种媒质的交界面处，试写出电磁场边界条件的一般形式？它们是由麦克斯韦方程的哪种形式推导出来的？理想导体表面电磁场的边界条件是什么？

答：电磁场边界条件的一般形式为：

$$\begin{cases} n(H_2 - H_1) = J_{\mathrm{S}} \\ n(E_2 - E_1) = 0 \\ n(B_2 - B_1) = 0 \\ n(D_2 - D_1) = \rho_{\mathrm{s}} \end{cases}$$

上述各式均是由麦克斯韦方程组的积分形式推出的。

理想导体表面电磁场的边界条件是：

$$\begin{cases} nH = J_{\mathrm{S}} \\ nE_2 = 0 \\ nB_2 = 0 \\ nD_2 = \rho_{\mathrm{s}} \end{cases}$$

【1-6】（北京理工大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）真空中两根半径为 a 的无限长平行导体圆柱上带有静电荷，单位长度电量为 ρ_1 和 $-\rho_1$，问空间一点处的电场强度是否可以用单根带电导体圆柱的电场公式叠加？即

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\hat{r}_1 + \frac{-\rho_1}{2\pi\varepsilon_0 r_2}\hat{r}_2$$

其中：r_1、r_2、$\hat{r}_1$、$\hat{r}_2$ 分别是两个圆柱轴线到场点的距离和单位矢量，试简述原因。

解：带异号电荷的两导线平行放置后，由于异号电荷的吸引作用，每根导线上的电荷在横截面不再是均匀分布，靠近的一侧分布密度大。因此，当场点与任一导线轴线的距离与导线半径 a 可比拟时，总的电场强度不能用单根带电圆柱的电场公式相叠加表示，当场点与任一导线轴的距离远大于导线半径 a 时，可以将单根导线上的分布电荷视为分布在轴线上，此时，总的电场强度可以用单根圆柱的电场公式相叠加表示。

【1-7】（国防科技大学 2002 年硕士研究生入学考试试题）论述矢位：

$$A(r,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J(r')\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\left(t-\frac{R}{C}\right)}}{R}\mathrm{d}V'$$

的物理意义。其中 $R=|r-r'|$，C 为光速。

答：上式说明，t 时刻 r 处的场不是 r'处的源产生的，而是 $t-\dfrac{R}{C}$ 时刻 r'处的源产生的。这也说明，在观察点 r'处，场的变化滞后于源的变化，滞后的时间 $\dfrac{R}{C}$ 等于电磁波从 r'点传到 r 处所需的时间，因此 A 常常被称为滞后位。

【1-8】（北京理工大学 2002 年硕士研究生入学考试试题）写出理想电介质中麦克斯韦方程组的四个基本方程的微分表达式，并说明每个方程的物理意义。

解：高斯定律：$\nabla D=\rho$，表明电场与电荷密度的对应关系。

法拉第定律：$\nabla E=-\dfrac{\partial B}{\partial t}$，表明时变的磁场可以产生电场。

磁场高斯定律：$\nabla B=0$，表明磁场的无散性和磁通连续性。

安培环路定律：$\nabla H=J+\dfrac{\partial D}{\partial t}$，表明分布电流和时变电场都是磁场的源。

【1-9】（北京理工大学 2000 年硕士研究生入学考试试题）简要回答或证明：

分别写出恒定磁场的矢量磁位 A 和标量磁位 V_{m} 的定义式，这两个位函数所满足的微分方程以及它们的适用范围。

解：选择库仑规范 $\nabla A=0$，矢量磁位 A 定义式为：

$$B=\nabla A$$
$$H(r,\varphi,z)=\left[\hat{r}H_{\mathrm{r}}(r,\varphi)+\hat{\varphi}H_{\varphi}(r,\varphi)+\hat{z}H_{\mathrm{z}}(r,\varphi)\right]\mathrm{e}^{-\gamma z}$$
$$E=\hat{\theta}\frac{E_0}{r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

矢量磁位 A 满足泊松方程 $\nabla^2A=-\mu_0J$，矢量磁位 A 适用于任意区域。

标量磁位 V_{m} 的定义式为：

$$H=-\nabla V_{\mathrm{m}}$$

标量磁位 V_{m} 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2V_{\mathrm{m}}=0$，标量磁位 V_{m} 适用于 $J=0$ 的区域。

【1-10】（清华大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）在交变场中，在理想导体和理想介质的交界面上，电场强度 E 和磁场强度 H 满足什么条件？

答：设交界面法线方向 e_{n} 由导体指向介质。在介质一侧内边界面上，电场强度 E 和磁场强度 H 满足如下条件：

$$\rho_{\mathrm{s}}=e_{\mathrm{n}}\bullet(\varepsilon E),\ e_{\mathrm{n}}\times E=0,\ e_{\mathrm{n}}\bullet H=0,\ e_{\mathrm{n}}\times H=J_{\mathrm{s}}$$

且导体一侧内部电场、磁场均为零。

【1-11】（清华大学 2001 年硕士研究生入学考试试题）证明：静电场中，如果均匀、线性、各向同性的介质中某点的自由电荷的体密度 ρ_{fv} 等于零，则该点的束缚电荷体密度脚 ρ_{bv} 必定等于零。

证明：根据束缚电荷体密度与极化强度 P 的关系式，得：

$$\begin{aligned}\rho_{bv} &= -\nabla\bullet P = -\nabla\bullet(D-\varepsilon_0 E)\\ &= -\nabla\bullet\left(\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}D\right) = -\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\nabla\bullet(D) = \rho_{fv}\end{aligned}$$

因为 $\rho_{fv}=0$，所以 $\rho_{bv}=0$。得证。

【1-12】（清华大学 2001 年硕士研究生入学考试试题）写出电荷守恒定律的积分和微分形式。

解：电荷守恒定律是物理学的基本定律之一。该定律指出，对于一个孤立系统，不论发生什么变化，其中所有电荷的代数和永远保持不变。

电荷守恒定律表明，如果某一区域中的电荷增加或减少了，那么必定有等量的电荷进入或离开该区域；如果在一个物理过程中产生或消失了某种符号的电荷，那么必定有等量的异号电荷同时产生或消失。

电荷守恒定律的积分形式为：

$$\int_V J\bullet \mathrm{d}V = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

微分形式为：

$$\nabla\bullet J = -\frac{\partial \rho_{fv}}{\partial t}$$

【1-13】（清华大学 2001 年硕士研究生入学考试试题）电场强度为 E，磁场强度为 H，角频率为 ω 的均匀平面波在真空中沿单位矢量方向 e_n 传播，令传播矢量 $k=e_n k$，证明：

（1）$k\bullet E=0$；（2）$k\bullet H=0$；

（3）$k\times E-\omega\mu_0 H=0$；（4）$k\times H+\omega\varepsilon_0 E=0$。

证明：根据均匀平面波的定义（等相面和等幅面重合）可知，其任意横向场分量（E_x、H_y 等）都可以表示为 $X=X_m e^{-jk\cdot r}$ 的形式，其中波矢量为：$k=k_x e_x+k_y e_y+k_z e_z$。

根据梯度公式：

$$\nabla X = \frac{\partial X}{\partial x}e_x + \frac{\partial X}{\partial y}e_y + \frac{\partial X}{\partial z}e_z$$

将 $X=X_m e^{-jk\cdot r}$ 代入上式，整理得：

$$\begin{aligned}\nabla X &= X_m e^{-jk\cdot r}(-jk_x)e_x + X_m e^{-jk\cdot r}(-jk_y)e_y + X_m e^{-jk\cdot r}(-jk_z)e_z\\ &= -jX_m e^{-jk\cdot r}k\end{aligned}$$

由此可知，对于时谐场的均匀平面波，当写成复矢量形式的时候，▽算子等价于－jk。同理可知，▽×算子等价于－jk×，▽·算子等价于－jk·。

根据麦克斯韦方程：

$$\begin{cases}\nabla\cdot D=\rho\\ \nabla\cdot B=0\\ \nabla\times E=-\dfrac{\partial B}{\partial t}\\ \nabla\times H=J+\dfrac{\partial D}{\partial t}\end{cases}$$

由题意可知，在时谐场条件下，对于复矢量形式，上述麦克斯韦方程可化简为：

$$\begin{cases}\nabla\cdot E=0\\ \nabla\cdot H=0\\ \nabla\times E=-\mathrm{j}\omega\mu_0 H\\ \nabla\times H=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E\end{cases}$$

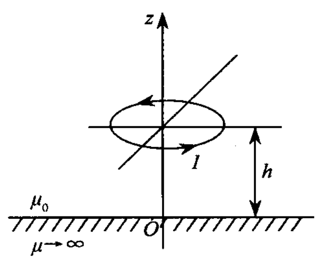
根据上面得到的等价关系，可得：

$$\begin{cases}-\mathrm{j}k\cdot E=0\\ -\mathrm{j}k\cdot H=0\\ -\mathrm{j}k\times E=-\mathrm{j}\omega\mu_0 H\\ -\mathrm{j}k\times H=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 E\end{cases}$$

整理得：

$$\begin{cases}k\cdot E=0\\ k\cdot H=0\\ k\times E-\omega\mu_0 H=0\\ k\times H+\omega\varepsilon_0 E=0\end{cases}$$

【1-14】（西安交通大学 2006 年硕士研究生入学考试试题）如下图所示，在一块很大的铁磁材料上方，$z=h$ 的平面内，有一载有恒定电流 I 的电流圆环。试定性说明此线圈的自感和受力情况，与将此线圈放在无限大的空气中的情况相比较，发生了怎样的变化？



答：恒定电流在空间激发出磁场，将铁磁性材料磁化，根据安培电流模型，磁化强度的方向与恒定电流产生的磁场方向相同。因此，最终作用的结果是通过线圈的磁通量变大。

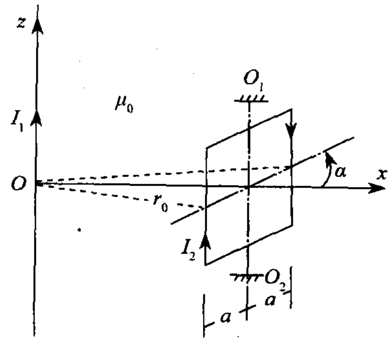
根据电感的性质：$u=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，式中 L 为自感。又由法拉第电磁感应定律：$u=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$。从而可以得出 $L=\dfrac{\Phi}{i}$。

可见，与放在无限大的空气中相比较，线圈自感增加，由于磁化现象，线圈将受到铁磁材料对它的吸引力，而线圈放在无限大的空气中不受力。

【1-15】（西安交通大学 2006 年硕士研究生入学考试试题）沿 z 轴的长直电流 I_1 旁边有一正方形线框，边长为 $2a$，载有电流 I_2，方向如下图所示。线框中心到 z 轴的距离为 r_0，线框可绕平行于 z 轴的轴线 O_1O_2 转动，当线框平面与 x 轴的夹角为 α 时，试求：

（1）长直导线与线框间的互感 M。

（2）线框所受的转矩。



解：

（1）根据安培环路定律，可以得出直电流 I_1 产生的磁场大小为：

$$H(r)=e_{\varphi}\frac{I_1}{2\pi r}$$

线框沿着垂直于该磁场方向的投影区域的横坐标为：

$$\sqrt{r_0^{\ 2}+a^2-2ra\cos\alpha}\leqslant x\leqslant\sqrt{r_0^{\ 2}+a^2+2ra\cos\alpha}\ ,\quad -a\leqslant z\leqslant a$$

因此，通过线框的磁通量为：

$$\Phi=\int B\mathrm{d}\sigma=\int_{\sqrt{r_0^{\ 2}+a^2-2ra\cos\alpha}}^{\sqrt{r_0^{\ 2}+a^2+2ra\cos\alpha}}\frac{\mu_0 I_1 2a}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 a}{\pi}\ln r\Big|_{\sqrt{r_0^{\ 2}+a^2-2ra\cos\alpha}}^{\sqrt{r_0^{\ 2}+a^2+2ra\cos\alpha}}=\frac{I_1\mu_0 a}{\pi}\ln\frac{\sqrt{r_0^2+a^2+2r_0a\cos\alpha}}{\sqrt{r_0^2+a^2-2r_0a\cos\alpha}}$$

所以有：

$$M=\frac{\Phi}{I_1}=\frac{\mu_0 a}{\pi}\ln\frac{\sqrt{r_0^2+a^2+2r_0a\cos\alpha}}{\sqrt{r_0^2+a^2-2r_0a\cos\alpha}}$$

（2）线框上下两边不受力，左右两边受力。

左边受力大小为：

$$F_1=B_1I_2(2a)=\frac{\mu_0I_1I_2 2a}{2\pi\sqrt{r_0^2+a^2-2r_0a\cos\alpha}}$$

方向：垂直于磁场 B_1 和电流 I_2 向内。

右边受力大小为：

$$F_2=B_2I_2(2a)=\frac{\mu_0I_1I_2 2a}{2\pi\sqrt{r_0^2+a^2+2r_0a\cos\alpha}}$$

方向：垂直于磁场 B_2 和电流 I_2 向外。

因此线框受到的力矩大小为：

$$L=F_1a\sin\alpha_1+F_2a\sin\alpha_2$$

其中 α_1、α_2 是力的方向与上下两边的夹角。

通过正弦定理，可以求得：

$$\sin\alpha_1 = r_0 \frac{\sin\alpha}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0 a\cos\alpha}}$$

$$\sin\alpha_2 = r_0 \frac{\sin\alpha}{\sqrt{r_0^2 + a^2 + 2r_0 a\cos\alpha}}$$

代入计算，得到转矩大小为：

$$L = \frac{2\mu_0 r_0 a^2 (r_0^2 + a^2) I_1 I_2 \sin\alpha}{\pi\left[(r_0^2 + a^2)^2 - 4r_0^2 a^2 \cos\alpha\right]} \quad \text{（方向向下）}$$

【1-16】（西安交通大学2003年硕士研究生入学考试试题）在真空中，电流分布为（圆柱坐标系）：$0<\rho<a$，$J=0$；$a<\rho<b, J=\frac{\rho}{b}\hat{z}$；$\rho=b$，$J_s=J_0\hat{z}$；$\rho>b$，$J=0$。求磁感应强度。

解：采用安培环路定理，分区域求解。

（1）当 $0<\rho<a$ 时，由于 $J=0$，因此 $B_1=0(0<\rho<a)$。

（2）当 $a<\rho<b$ 时，采用安培环路定理有 $\frac{B_2}{\mu_0}\cdot 2\pi\rho = \int_a^\rho \frac{\rho}{b}\cdot 2\pi\rho \mathrm{d}\rho$，因此：

$$(a<\rho<b) \quad B_2 = \frac{\mu_0}{3b}(\rho^2 - a^3/\rho)a_\phi$$

（3）在 $\rho=b$ 处，采用边界条件 $e_n\times(\frac{B_1}{\mu_0}-\frac{B_2}{\mu_0})=J_s$，因此有：

$$B_2(b) = \left\{\frac{\mu_0}{3b}(b^2 - a^3/b) + \mu_0 J_0\right\}a_\phi$$

（4）当 $\rho>b$ 时，采用安培环路定理，有：

$$\frac{B_2}{\mu_0}\cdot 2\pi\rho = \int_a^b \frac{\rho}{b}\cdot 2\pi\rho\mathrm{d}\rho + J_0\times 2\pi\rho$$

因此有：

$$\rho>b, B_2(\rho) = \left\{\frac{\mu_0}{3b}(b^3 - a^3)/b + \mu_0 J_0 b\right\}\Big/\rho$$

【1-17】（北京理工大学2005年硕士研究生入学考试试题）写出理想电介质（$\mu=\mu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_0 C$，$\sigma=0$）中瞬时麦克斯韦方程组的微分限定形式（即用 E 和 H 表示），并简要标明每个方程的物理意义。

解：麦克斯韦方程组是英国物理学家麦克斯韦在19世纪建立的描述电场与磁场的四个基本方程。

方程组的微分形式，通常称为麦克斯韦方程。在麦克斯韦方程组中，电场和磁场已经成为一个不可分割的整体。该方程组系统而完整地概括了电磁场的基本规律，并预言了电磁波的存在。

由麦克斯韦方程组的微分形式为：

$$\begin{cases}\nabla\times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}\\ \nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}\\ \nabla\cdot D = \rho\\ \nabla\cdot B = 0\end{cases}$$

因为 $J=\sigma E$，$D=\varepsilon E$，$B=\mu H$，且 $\mu=\mu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_0 C$，$\sigma=0$，所以上式可以化为：

$$\begin{cases}\nabla\times H=J+\dfrac{\partial D}{\partial t}=\sigma E+\varepsilon_0 C\dfrac{\partial E}{\partial t}=\varepsilon_0 C\dfrac{\partial E}{\partial t}\\ \nabla\times E=-\dfrac{\partial B}{\partial t}=-\mu_0\dfrac{\partial H}{\partial t}\\ \nabla\bullet D=\rho=\varepsilon_0 C\nabla\bullet E\\ \nabla\bullet B=0=\mu_0\nabla\bullet H\end{cases}$$

整理得：

$\nabla\times H=\varepsilon_0 C\dfrac{\partial E}{\partial t}$，其物理意义为：随时间变化的电磁场产生磁场；

$\nabla\times E=-\mu_0\dfrac{\partial H}{\partial t}$，其物理意义为：随时间变化的磁场产生电场；

$\nabla\bullet E=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0 C}$，其物理意义为：电场的散度与电荷密度成正比；

$\nabla\bullet H=0$，其物理意义为：磁场是无散的（无散度源），闭合磁力线，通过任何闭合面的磁通量总等于零。

【1-18】（华中科技大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）矢量 $a_x(yz-2x)+a_y xz+a_z xy$ 能否表示某静电场的电场强度 E？如能够，相应的位函数 φ 是什么？如不能，说明为什么？

答：因为 $\nabla\times[a_x(yz-zx)+a_y xz+a_z xy]=0$，故该矢量能表示某静电场的电场强度，相应的电位函数为 $\varphi=x^2-xyz$。

【1-19】（华中科技大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）矢量 $a_x(-ay)+a_y ax$（其中 a 为常量），能否表示某恒定磁场的磁感应强度 B？如能够，则在真空中空中产生此磁场的电流 J 是什么？如不能，说明为什么？

答：能表示某恒定磁场 B，产生该磁场的电流为：

$$J=\nabla\times B/\mu_0=a_z(2a/\mu_0)$$

【1-20】（华中科技大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）利用散度定理及斯托克斯定理证明：对任一矢量函数 A 有：$\nabla\bullet(\nabla\times A)=0$。

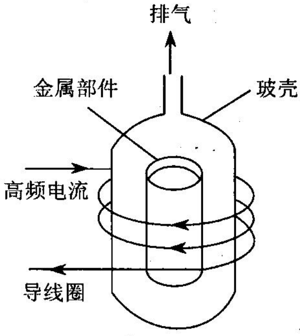
证明：在直角坐标系中，有：

$$\begin{aligned}&\nabla\bullet(\nabla\times A)\\&=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left[\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(a_x A_x+a_y A_y+a_z A_z)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=0\end{aligned}$$

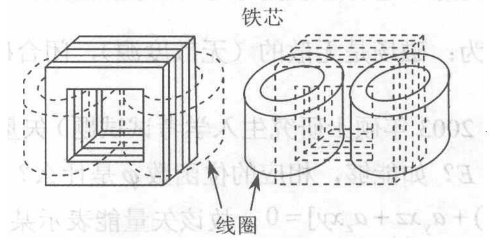
【1-21】（东南大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）在下图所示结构中，玻璃管壳内有金属部件。为了加热金属部件，同时避免玻璃管壳温度上升过高，往往在玻壳外套一线圈，在线圈中通以高频电流。试解释其工作原理。

答：高频电流在导线圈中激发出高频电磁场，变化的磁场在周围空间产生电场，当导体处在此电场中时，导体中的自由电子在电场力作用下作定向移动而产生电流即感应电流。从而形

成涡流，引起导体发热，这样就加热了玻壳中的气体。但由于玻璃可看作理想介质，不具有导体的性质，则在高频电磁场中不会产生传导电流引起发热。



【1-22】（东南大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）变压器中铁芯和线圈结构如下图所示，试解释为什么要采用薄铁板组成叠片式铁芯结构。



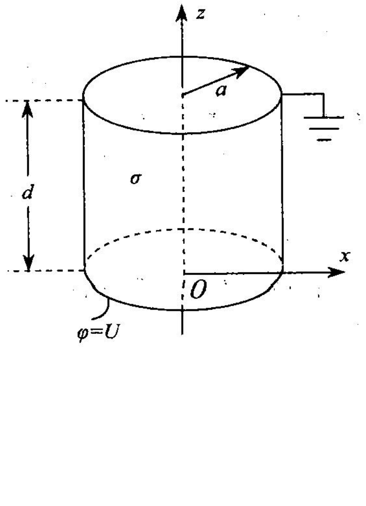
答：大块的导体在磁场中运动或处在变化的磁场中，都要产生感应电动势，形成涡流，引起较大的涡流损耗。为减少涡流损耗，变压器中广泛采用薄钢片叠压制成的铁心，利用铁的高磁导率，产生强的磁场分布，该磁场的方向是沿着环形铁片构成回路，这样涡流被限制在狭窄的薄片之内，磁通穿过薄片的狭窄截面时，这些回路中的净电动势较小，回路的长度较大，无法形成很强的涡流，因此降低了铁芯的发热。

【1-23】（东南大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）如下图所示，设半径为 a 的圆形平板电容器，板间距离为 d，并填充电导率为 σ 的均匀导电介质(ε,μ)，两极板间外加直流电压 U，忽略边缘效应。

（1）计算两极板间电场、磁场以及能流密度矢量（坡印亭矢量）。

（2）计算电容器内储存的能量。

（3）试证明：其中消耗的功率刚好是由电容器外侧进入的功率。



解：

（1）利用公式可求得两极板间的电场、磁场及能流密度矢量分别为：

$$E = e_z \frac{U}{d}$$

$$H = e_\phi \frac{r\sigma U}{2d},\ r \leqslant a$$

$$S = -e_r \frac{r\sigma U^2}{2d^2}$$

（2）存储的能量包括电场能量与磁场能量两部分，因此有：

$$W = W_e + W_m = \frac{\pi a^2 \varepsilon U^2}{2d} + \frac{\pi a^4 \mu \sigma^2 U^2}{16d}$$

（3）证明：热损耗功率为 $W_L = \frac{U^2}{R} = \frac{\pi a^2 \sigma U^2}{d}$

由电容器外侧进入的功率为：$W = \oint_{S_A} S \cdot dS_A = \frac{r\sigma U^2}{2d^2} \cdot 2\pi r = \frac{\pi a^2 \sigma U^2}{d}$

则两者相等，得证。

【1-24】（华中科技大学 2002 年硕士研究生入学考试试题）矢量场函数 A 的旋度 $\nabla \times A$ 在闭合的 S 上的面积分 $\oint_s (\nabla \times A) \cdot \mathrm{d}S =$ ______________。

答案：0。

解析：根据公式 $\oint_S \nabla \times A \mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times A) \mathrm{dV}$。

因为 $\nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0$，所以上式=0。

【1-25】（南京航空航天大学 2008 年硕士研究生入学考试试题）写出 Maxwell 方程组的微分形式，并简述每一个方程的物理意义。再写出场量之间必须满足的媒质本构关系。

解：$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$，推广的安培环路定律。

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$，法拉第电磁感应定律。

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$，磁通连续性定律。

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$，高斯定律。

第一方程表明传导电流能产生磁场，变化电场也能够产生磁场；第二方程是推广的电磁感应定律，表明变化的磁场也会产生电场；第三个方程本身是从恒定磁场中得到的，麦克斯韦将其推广到变化的磁场中，表明磁场是无源场，或者是无散场；第四个方程是高斯定理，它反映了电荷以发散的方式产生电场，即电场是有源场。这组方程表明变化的电场和变化的磁场相互激发、相互联系形成统一的电磁场。

场量之间必须满足的媒质本构关系为：

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

【1-26】（南京航空航天大学 2008 年硕士研究生入学考试试题）已知电场为：$\vec{A} = 10\vec{e}_x + 20\vec{e}_y + 20\vec{e}_z \mathrm{V/m}$，问：该电场是均匀电场吗？为什么？电场的大小为多少？方向余

弦为多少？如果另有一场量$\vec{B}=20\vec{e}_x-5\vec{e}_y-5\vec{e}_z\text{V/m}$，问：这两个矢量是否垂直，为什么？

解：电场$\vec{A}=10\vec{e}_x+20\vec{e}_y+20\vec{e}_z$是匀强电场。

因为电场与实践、空间坐标无关。

电场的大小为$\sqrt{10^2+20^2+20^2}=30\text{V/m}$

方向余弦为：$\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\cos\beta=\dfrac{2}{3},\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$

两个矢量相互垂直，因为$\vec{A}\bullet\vec{B}$。

【1-27】（南京航空航天大学 2008 年硕士研究生入学考试试题）（1）写出时变电磁场的边界条件的一般表达式。（2）推导媒质 1 为理想电介质（电导率$\gamma=0$），媒质 2 为理想电导体（电导率$\gamma\to\infty$）时，时变电磁场中电场的切向和法向边界条件。

解：

（1）时变电磁场的边界条件的一般表达式为：

$$\hat{n}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{J}_s$$
$$\hat{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0$$
$$\hat{n}\times(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0$$
$$\hat{n}\times(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=0$$

（2）媒质 1 为理想电介质（电导率$\gamma=0$），媒质 2 为理想电导体（电导率$\gamma\to\infty$）时，电场的切向边界条件：

$$\oint_c\vec{H}\times\mathrm{d}\vec{l}=\vec{H}_1\times(\vec{s}\times\vec{n})\mathrm{d}l=\vec{J}_s\times\vec{s}\mathrm{d}l$$

$$(\vec{n}\times\vec{H}_1)\times\vec{s}\mathrm{d}l=\vec{J}_s\times\vec{s}\mathrm{d}l$$

$\vec{n}\times\vec{H}_1=\vec{J}_s$，$\vec{J}_s$为传导电流密度。

法向边界条件：

$$\oint_c\vec{D}\mathrm{d}\vec{l}=q$$

$D_{1n}-D_{2n}=\sigma$；$D_{1n}=\sigma$，σ为自由电荷面密度。

【1-28】（南京航空航天大学 2008 年硕士研究生入学考试试题）一半径为a的导体球上带有电荷Q，在其外部有一厚度为d，介电常数为ε的介质层（如下图），试求：

（1）导体球内$\vec{E}_{内}$，介质中$\vec{E}_{介}$，及介质外电场强度$\vec{E}_{外}$。

（2）电介质ε与空气ε_0分界面上束缚面电荷密度。

（3）球的电位与电容。