普通高等教育“十一五”规划教材

电动力学

杨世平 张 波
李敬林 袁国勇 编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

电动力学

杨世平　张　波
李敬林　袁国勇　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是作者在多年教学经验的基础上，结合当前学生的新特点编写而成。本书加强了对基本概念与基础理论的文字描述，相应的减少了部分定理、推论等繁杂的证明过程；此外，还针对学生的兴趣调整了教学内容，并增加了与电动力学相关的研究进展。全书内容包括电动力学的数学基础与基本理论、狭义相对论、静电场与静磁场、电磁波及其与物质的相互作用、电动力学相关研究领域简介。

本书适合理科物理专业本科生学习使用，也可作为教师等相关人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

电动力学/杨世平等编著. —北京：科学出版社，2010
普通高等教育"十一五"规划教材
ISBN 978-7-03-026761-0

Ⅰ.①电… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①电动力学-高等学校-教材 Ⅳ.①O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 021372 号

责任编辑：胡云志 杨 然 / 责任校对：朱光光
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 2 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 2 月第一次印刷 印张：16
印数：1—3 000 字数：323 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

1820 年，安培在奥斯特实验的基础上，设计了 4 个精巧的电流对电流作用的示零实验，提出了安培定律。在此基础上，安培对比“静力学”与“动力学”的研究对象及其名称后，提出动电理论应当称为“电动力学”(electrodynamics)。随后，安培又进一步总结了当时有关动电理论的研究成果，于 1822 年和 1827 年分别发表了《电动力学的观测汇编》和《电动力学理论》共两本专著。实际上这只是电学和磁学的第一次结合，与现在的电磁学(electromagnetism)没有严格的区分。

1831 年，法拉第电磁感应定律的发现及电磁场思想的提出，促使电学与磁学更加紧密地结合在一起。此后，麦克斯韦经过多年的艰辛努力，于 1895 年出版了《电磁场的动力理论》，创立了真正统一的“电磁场理论”。

我们已经知道电磁学是研究电磁现象和规律的学科，是普通物理学的一个重要组成部分。电磁学通常包括静电场和电介质、稳恒电流及液体与气体中的电流、静磁场和磁介质、电磁感应、电磁振荡及电磁波。电磁学着重由实验定律出发，阐明电磁现象各方面的基本规律及其应用。最后，电磁学总结出作为电磁现象普遍规律的麦克斯韦方程组，但是不作为内容的重点。

按照现代的观点，电动力学是研究电磁现象一般规律的学科。电动力学以电磁运动最基本的方程——麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式为基础(结合物质结构的知识，建立起完整的电磁场理论)，分别从宏观和微观两个角度来阐述各种电磁现象。由于狭义相对论起源于经典电动力学，因此电动力学通常还包括狭义相对论。

从上面的分析不难看出电磁学与电动力学的异同。它们的差别主要表现在以下几个方面：①电磁学与电动力学研究的对象相同，即电磁现象；②电磁学是电动力学的基础，最后给出麦克斯韦方程组，而电动力学从麦克斯韦方程组开始；③电磁学主要是通过实验定律来分析电磁现象，而电动力学则利用矢量场论、张量分析等数学工具来研究电磁现象，更注重理论推演；④电磁学偏重研究静电场和静磁场的问题，而电动力学的主要研究内容之一则是迅变电磁场；⑤电动力学包括狭义相对论。

电动力学在大学本科层次属于理论物理学范畴，相对普通物理学而言涉及的数学知识更丰富，需要学习和记忆的公式更多，一些概念的理解也更加困难，习题求解不仅较难且用时也较多。虽然对于部分初学者来说可能会感到电动力学难学，但是，由于电动力学理论体系非常严谨，系统性、条理性和逻辑性都非常强，狭义相对论中所包含的物理思想又非常深刻等，因此，常常能够提升读者学习理论物理的兴趣。同时，电动力学中还蕴含着丰富的哲学思想和美学成分，一些研究方法不仅适用于电动力学，而且也适用于物理学的其他分支学科，甚至对物理学以外的自然科学、社会科学都有借鉴作用。因此，对于一个即使将来不从事物理学研究的

学生，学好电动力学也是非常必要的。此外，通过电动力学的学习，可以了解继承与创新的关系，可以更深刻地理解科学实验与理论模型之间的关系，从而对培养学生的创新意识、科学研究和解决实际问题的能力等都具有非常重要的作用。

物理学研究的主要目的是通过发现新现象、总结新定律、提出新思想、探究新方法、建立新理论来揭示物理世界的奥秘。通过对电动力学的学习，特别是对电动力学及狭义相对论的建立过程的深入了解，相信读者可以逐渐领会科学研究的真谛，从而提升自己从事科学研究的信心和勇气。

电动力学的理论对铁氧、铁电体的研究，超导体物理、等离子体物理、非线性光学、激光物理、量子电动力学和广义相对论等的发展起到了非常重要的作用。电动力学在技术方面的应用更加广泛，主要涉及电力工业技术、通信技术、测井技术、光电子技术和激光技术等。

总之，不论读者将来是从事物理学理论研究或实验研究，还是在与物理相关的领域工作，学好电动力学课程可以受益终生。

如何学好理论物理学的课程，长期以来大学物理教师和物理科研工作者对此问题都有较大的争议。一些人认为应当通过基本方程的建立、重要定理的证明、数学在物理中的应用技巧和大量的习题练习等才能真正学好理论物理学的课程。但是，随着科学技术的不断发展和人类生活环境的不断更新，人们需要学习的知识越来越多。同时，大学本科阶段课程种类不断增加，而一门课程的学时却不断减少，这些都使得传统学习方式受到质疑和冲击。在这样的大背景下，我们认为大学物理专业的学生应当把学习的重点放在对理论物理学基本规律的掌握、对物理模型和物理图像的深刻理解上。同时，要在了解物理理论的发展过程、掌握物理学的基本研究方法等方面下工夫。初学者一定不要被繁杂的数学公式所吓倒，更不能只记得描述定理、定律、现象的数学公式，以及机械的套用公式解题，而应当看清这些数学公式背后的物理学本质。当然，对能够体现物理学基本思想、加深对物理现象的理解和掌握基础科研方法等有重要作用的推导、证明和解题练习还是必要的。因此，本书在利用数学解决物理问题的许多方面减少了证明、推导及数学分析，增加了对这些内容的语言描述及物理实质的分析和讨论，同时对相应的习题也做了精心的挑选，并根据难易程度进行了分类。

随着中国教育体制的不断改革及高等院校的不断扩招，普通高等院校特别是地方高等院校和师范院校的定位和培养目标显得越来越多元化，由此产生两大困难：一是教师感到物理学中理论物理部分越来越难教；二是一部分物理学专业及相近专业的学生学习理论物理的困难在不断增加。产生这些困难的原因主要有：学生学习目标多元化；传统教材偏重公式的推演和逻辑性，而基本概念、基本理论和基本方法的描述又过于简化；教材对理论在学科前沿的应用描述不够或即使涉及也多数难以自学；学生学习理论物理的能力存在较大的差别。要解决这些问题，我们认为应当改变传统的教学方式和教学内容，使理论物理教学适应不同层次学生的需求。

经过几年的教学实践，我们认为分层次教学在解决前面描述的困难时可能是比较有效的方法。分层次教学有两种方式：①学生分流培养（同一年级分班教学），但是，对于许多院校，可能因为师资或教学成本等原因无法实现；②教师教学中分层次讲授，主要是课堂讲授与自学、研究性学习相结合，要求不同层次的学生掌握不同的学习内容。

要在实践中达到同一班级分层次教学的目的，需要一本相应的教材。在此基础上，我们编写了这本《电动力学》。讲授本书一般需要 54 学时（即 3 学分，包括所有不带 * 号的内容），书中带 * 号的内容可以根据具体情况有选择地讲授，讲完全部内容可能需要 90 学时。

本书的特点之一是加强了对基本概念与基础理论的文字描述，而相应地减少了部分定理、推论等繁杂的证明过程（其中一部分作为练习题供读者选做）。本书的第二个特点是在教学内容上做了较大的调整。在实践中我们发现学生对于狭义相对论的学习有比较大的兴趣，而提前学习这方面的知识对后续内容的学习也有所帮助，所以将相对论放在第 2 章。为了加强理论基础的学习，又不削弱电动力学的理论体系，本书将电动力学的势函数描述方法和电磁场的动量等放到第 1 章。为了使教材更精练，且减少与电磁学的重复，我们将静电场和静磁场合并为一章，并以求解方法为主。此外，本书还将描述迅变电磁场的电磁波传播、辐射，以及与物质的相互作用合并为一章。上述几个方面的调整，一是让读者在学完第 1、2 章后就掌握电动力学的基本理论和研究方法，二是利用电磁场基础理论解决实际问题的描述更为集中。本书的特点之三是作为选修内容，增加了静电场泊松方程的数值求解方法，这不仅为研究性学习提供了更多的选择，而且让学生了解数值计算在现代物理学研究和应用中的重要性。本书的特点之四是为了使多数学生不至于陷入繁杂的习题之中，我们将所有习题划分为三个层次（第一层次为必做题，第二层次为选做题，第三层次为难度较大或对应 * 号章节的习题）。本书的特点之五是将与电动力学相关的研究进展编为一章（除了超导体和高温超导、等离子体物理、光子晶体等内容之外，还增加了冷原子物理和左手材料两方面的内容）供教师以讲座的形式有选择地讲授。

采用这样的教材学习或教师分层次讲授，还应当改革考试和考核方式。如何考试并使不同层次的学生在得到的分数上基本公平，是一个较难的教学研究课题，在此不再赘述。

由于编写时间比较仓促，且作者水平有限，书中难免存在疏漏或不妥之处，希望读者批评指正。

作　者

2009 年 10 月于河北师范大学

目　录

第1章　电动力学的数学基础与基本理论

在本章中，第一，复习及补充了一些电动力学常用的数学知识；第二，通过静电场、静磁场的实验定律总结出静态场的基本方程；第三，根据静态场方程、电磁感应定律及位移电流等假设总结出电磁场的基本方程，即麦克斯韦方程组，以及求解方程组的边界条件和边值关系；第四，引入了电磁场的势函数，以及满足它们的方程；第五，介绍电磁场的能量、动量，以及能量和动量守恒定律。

本章包含了除相对论时空理论以外的所有涉及电动力学的基本理论、普遍规律和求解电磁场方程的基本方法。以后各章将从这些基本方法出发解决电磁场的有关实际问题。

1.1　电动力学的数学基础

物理学、应用物理学、天文学等专业大学本科阶段所学的高等数学知识中的大多数都会在电动力学中得到应用，特别是矢量场论。编写本教材时我们假设读者在开始学习电动力学之前已经基本掌握了电动力学所需的多数数学知识。在本节，我们仅对电动力学中常用的一些数学知识给予提示或复习，同时简要介绍一些高等数学没有涵盖而电动力学又常用的数学知识，但是略去了严格或繁琐的数学论证。

1.1.1　矢量分析与张量简介

1. 矢量代数中两个常用公式

在电动力学中有两个常用的矢量公式，即

(1) 矢量混合积公式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix} \tag{1.1.1}$$

(2) 双重矢量积公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.1.2}$$

注意式(1.1.1)和式(1.1.2)蕴含的规律，记忆它们对我们有非常大的帮助。

2. 矢量点乘和叉乘的微分运算

两个矢量的点乘(标量积)与叉乘(矢量积)的微分运算如下：

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B} \tag{1.1.4}$$

注意式(1.1.4)中等式右边两项矢量积不能随意交换。

3. 并矢与张量

物理学中的物理量均可以称为张量。例如，标量称为零阶张量，矢量称为一阶张量(在三维空间中有三个分量)。在物理学的研究中有时会遇到具有 9 个分量(三维空间)的物理量，人们通常称为张量(二阶张量的简称)。一般情况下可以通过并矢来定义张量。

1) 并矢的定义

将矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不做任何运算简单的并在一起，即写成 $\boldsymbol{AB}$(一般情况 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$)，称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的并矢，有 9 个分量。两个单位矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 可以构成 9 个并矢，即 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j(i,j=1,2,3)$。

2) 张量的定义

如果一个物理量有 9 个分量[记为 $T_{ij}(i,j=1,2,3)$]，当用 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 作为基的时候，张量可以定义为

$$\boldsymbol{T}=\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1.1.5}$$

而

$$\boldsymbol{I}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.1.6}$$

称为单位张量，它有 6 个为 0、3 个为 1 的分量。

从上面的定义可以看出并矢就是张量，但要注意不是所有张量都可以用并矢来表示。

3) 张量的矩阵表示

我们已经知道一个矢量 $\boldsymbol{A}\left(=\sum A_i\boldsymbol{e}_i\right)$ 可以用行矩阵或列矩阵表示，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\quad 或\quad \boldsymbol{A}=(A_1,A_2,A_3) \tag{1.1.7}$$

同样，一个张量也可以用矩阵表示为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}T_{11}&T_{12}&T_{13}\\T_{21}&T_{22}&T_{23}\\T_{31}&T_{32}&T_{33}\end{pmatrix} \tag{1.1.8}$$

单位张量实际上是一个单位矩阵

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1.9}$$

4）张量的代数运算

两个张量的加法定义为

$$\boldsymbol{T}+\boldsymbol{V} = \sum_{i,j}(T_{ij}+V_{ij})\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1.1.10}$$

即两个张量的相应分量相加后得到的新的张量。

并矢与矢量的点乘规则为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{AB} &= (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{CB} \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

因此，可知并矢与矢量的点乘是一个矢量，且一般不能交换位置，即一般 $\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{AB}$。

并矢与矢量的叉乘为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \\ \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{AB} &= (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

因此，并矢与矢量的叉乘仍然为并矢，且一般情况下 $\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{AB}$。

两并矢的点乘定义为

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{AD} \tag{1.1.13}$$

可见，两个并矢的点乘仍然是并矢，且一般情况

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{CD}\neq\boldsymbol{CD}\cdot\boldsymbol{AB}$$

两并矢的二次点乘满足下面的运算规则：

$$\boldsymbol{AB}:\boldsymbol{CD} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}) \tag{1.1.14}$$

也就是说两个并矢的双点乘得到的是一个标量。

从上述并矢与并矢及矢量的运算规则可以知道张量与张量、张量与并矢的运算性质，即张量与张量的点乘为张量；张量与张量的二次点乘为标量；张量与矢量的点乘为矢量；张量与矢量的叉乘为张量。

在电动力学中常用到的是单位张量与矢量、并矢的点乘，它们分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{AB} &= \boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{AB} \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

因此，矢量、张量与单位张量的点乘后不变。单位张量与并矢的双点乘为并矢中的两个矢量的点乘，即

$$\boldsymbol{I}:\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.1.16}$$

1.1.2 场的梯度、散度和旋度

如果在给定空间中的每一点,都对应着某个量的确定值,我们就说在该空间中确定了一个场。如果空间每个点的量值是物理量,如温度、速度、电磁场强度等,则相应的场称为温度场、速度场、电磁场。场一般用空间和时间坐标的函数来描述。若物理量是标量,则相应的场为标量场,用函数 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 描述($\boldsymbol{x}$ 为空间任意一点 P 的位置矢量,t 为时间);若物理量为矢量,则称为矢量场,用函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$ 描述。在直角坐标系中

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x},t) &= \varphi(x,y,z,t)\\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{F}(x,y,z,t)\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

当 φ、$\boldsymbol{F}$ 不显含 t 时,称为稳定场(或称为静场),否则称为变化场(时变场)。如果已知场函数,则可以通过它们随时空坐标的变化关系(梯度、散度、旋度等)了解场的各种性质。反之,如果知道了场函数随时空坐标的变化关系,可以得到描述场的函数。实际上电动力学的重要任务之一,就是通过求解电磁场方程(用散度、旋度给出的方程)确定描述电磁场的电场强度和磁感应强度。

1. 标量场的梯度

在空间一点 P,标量场函数 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 的全微分能够表示为

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1.1.18}$$

引入矢量微分算符∇,它在直角坐标系中的具体形式为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.1.19}$$

则 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 的全微分改写为

$$\mathrm{d}\varphi = \left[\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right]\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.1.20}$$

式中,$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$。在 $\boldsymbol{l}$ 方向上的导数可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{e}_l = |\nabla\varphi|\cos\theta \tag{1.1.21}$$

式中,$\boldsymbol{e}_l=\mathrm{d}\boldsymbol{l}/\mathrm{d}l$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向上的单位矢量;θ 为矢量$\nabla\varphi$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 之间的夹角。

在 P 点的方向导数有无穷多个,但是只有一个最大值,即 $\theta=0$ 的值,该值为矢量$\nabla\varphi$ 的绝对值。数学上将$\nabla\varphi$(或写成 $\mathrm{grad}\varphi$)定义为标量场 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 的梯度。在直角坐标系中

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.1.22}$$

梯度的大小是空间某点标量场函数的最大变化率,它刻画了标量场的空间分

布特征。已知梯度即可求出 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 沿任意方向的方向导数。在标量场中，$\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 等于常数的曲面称为等值面。利用式(1.1.20)得到梯度与等值面相互垂直。

从∇的定义式可知，矢量微分算符具有双重特性，即∇具有矢量特性和微分特性。在应用中要特别注意∇仅仅是一个符号，它只有对某个函数作用以后，才是一个真实的矢量函数或标量函数，因此式(1.1.22)中的 $\nabla\varphi\neq\varphi\nabla$。由于∇的矢量算符性质，它不仅可以对标量函数作用，也可对矢量函数、张量函数作用。

∇与矢量函数可以做点乘和叉乘运算，作用后在直角坐标系中的具体形式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.1.23}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \tag{1.1.24}$$

∇与∇算符的点乘($\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\Delta$，称为拉普拉斯算符)作用到标量函数上为

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{1.1.25}$$

当式(1.1.25)等于零或等于某个函数时，得到的方程称为拉普拉斯方程或泊松方程，它是电动力学中最常见的标量函数方程。∇对矢量的点乘、叉乘和 $\nabla^2\varphi$ 在柱坐标及球坐标中的具体形式等见附录Ⅰ。

下面我们给出在电动力学中常用的两个公式：

(1) 设 $\boldsymbol{r}$ 为空间 $P'(x',y',z')$ 点到空间 $P(x,y,z)$ 点的位置矢量，即 $\boldsymbol{r}=(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z$，$r=|\boldsymbol{r}|=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$，则

$$\nabla r=\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1.1.26}$$

(2) 两个标量函数 φ、ψ 乘积的梯度运算公式为

$$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi \tag{1.1.27}$$

2. 高斯公式与矢量场的散度

对于矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的任意曲面 S

$$\Phi=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 通过曲面 S 的通量。如果 S 为闭合曲面，则规定 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向由曲面内指向曲面外。矢量场的通量用来描述空间某一区域(闭合曲面 S 内)场的发散或会聚情况。

$\Phi>0$，进入闭合曲面的场线少于从闭合曲面穿出的场线，称 S 面内有源；$\Phi=$

0,进入闭合曲面的场线等于从闭合曲面穿出的场线,称 S 面内无源;$\Phi<0$,进入闭合曲面的场线多于从闭合曲面穿出的场线,则称 S 面内有负源。

矢量场的通量计算一般通过高斯公式来实现。高斯公式实际上是一种积分变换公式(面积分与体积分的变换关系),有时又称为高斯定理。在高等数学中高斯公式一般表示为

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.1.28}$$

从式(1.1.23)可知,式(1.1.28)等号右边的被积函数可以写成$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$,因此高斯公式又可以表示为

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V \tag{1.1.29}$$

要特别注意高斯公式中 V 是任意闭合曲面 S 所围区域的体积。

矢量场的通量具有局域性质,即它不能反映矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在空间任意一点的发散和会聚情况。为了反映矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在空间任意一点的发散和会聚情况,可以将曲面 S 缩小,使它所包围的区域的体积化为微元 ΔV,此时通量可以近似的用下式表示:

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\approx\nabla\cdot\boldsymbol{A}\Delta V$$

因此,当 $\Delta V\to 0$ 时,定义

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1.1.30}$$

为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在空间 $\boldsymbol{x}$ 点的散度,又记做 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$。散度在直角坐标系中的表示形式见式(1.1.23)。

一个矢量场的散度用来描述矢量场在空间某点上的发散或会聚情况。空间某点 $\boldsymbol{A}$ 的散度大于零,说明该点有源;$\boldsymbol{A}$ 的散度小于零,说明该点为负源;$\boldsymbol{A}$ 的散度等于零,则表明该点无源,矢量场从该点连续通过。如果空间各点的散度均为零,则该矢量场 $\boldsymbol{A}$ 称为无源场。

实践中有几个与散度有关的常用公式:

(1) 位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3 \tag{1.1.31}$$

(2) 矢量$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$的散度

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0,\quad r\neq 0 \tag{1.1.32}$$

对于 $r=0$ 的情况,我们在本节最后给出。

(3) 标量函数 φ 与矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 乘积的散度

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.1.33}$$

证　根据散度的定义

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})&=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi A_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi A_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi A_z)\\&=\varphi\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial x}A_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}A_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}A_z\\&=\varphi\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

3. 斯托克斯公式与矢量场的旋度

矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿任意闭合曲线 L 的积分

$$\Gamma=\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的环量。$\Gamma=0$，表明 $\boldsymbol{A}$ 的场线在该区域内无涡旋状态存在，即场线不闭合；$\Gamma\neq0$，则表明 $\boldsymbol{A}$ 在该区域内有涡旋状态存在，场线闭合。环量是用来刻画矢量场在空间某一有限区域内是否有涡旋存在的物理量。

计算矢量场的环量一般通过斯托克斯公式来实现。斯托克斯公式也是一个积分变换公式(线积分与面积分的变换关系式)，它的数学表达式为

$$\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\tag{1.1.34}$$

要特别注意，式(1.1.34)的 S 是以曲线 L 为边界的任意曲面。规定曲线 L 的方向与曲面 S 的法线方向成右手螺旋关系(图 1-1)。

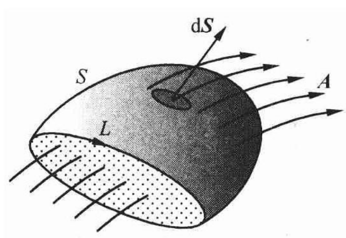

图 1-1

矢量场的环量也具有局域性质，即它不能反映矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在空间任意一点的环流情况。将式(1.1.34)中的 L 无限缩小，使得 S 上各点 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 相同，式(1.1.34)可以近似表示为

$$\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\approx(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\Delta\boldsymbol{S}=(\nabla\times\boldsymbol{A})_n\Delta S$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为面元法线方向上的单位矢量。当 $\Delta S\to0$ 时，得到

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_n=\lim_{\Delta S\to0}\frac{\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}\tag{1.1.35}$$

定义 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 为矢量场的旋度，在数学上常用 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 表示。旋度刻画了矢量场场线在空间某点上的环流特征。旋度在直角坐标系中的表示形式由式(1.1.24)给出。当空间各点 $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为无旋场。

在电磁场计算中，下面几个公式常用到：