·高等师范院校试用教材

初等数学解题研究

□沈文选主编

□湖南科学技术出版社

高等师范院校试用教材

初等数学解题研究

主　编：沈文选

副主编：熊　萍　陈传理

沈呈民　邵光华

编著者：（按姓氏笔画为序）

王列慧　叶　军　沈文选

沈呈民　邵光华　陈传理

陈志云　黄美剑　康纪权

熊　萍

湖南科学技术出版社

2

$+\frac{1}{2n}) - (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$

$f(n) = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}) - (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$

$= (1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n})$

$+ (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1})$

$= (1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}$

$- (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+$

初等数学解题研究

主　　编：沈文选

责任编辑：陈一心

出版发行：湖南科学技术出版社

社　　址：长[illegible]馆路 3 号

印　　刷：核工[illegible]南 306 印刷厂

（印装质量[illegible]题请直接与本厂联系）

厂　　址：衡阳市黄茶岭光明路 12 号

邮　　编：421008

经　　销：湖南省新华书店

出版日期：1996 年 5 月第 1 版第 1 次

开　　本：850×1168 毫米　1/32

印　　张：10.875

字　　数：286,000

印　　数：1—4,150

征订期号：地科 194—28

ISBN 7－5357－1914－7

O・149　定价：13.80 元

前　言

数学教育正处于一个新的发展时期，越来越多的问题需要我们去探索研究：如何提高学生的数学素质，如何解答无穷无尽的数学问题，如何从新的理论高度来探讨数学解题研究，并逐步建立并完善数学解题理论体系……，对于这些问题的共同兴趣与思考，把我们几位在高等师范院校从事初等数学研究教学的同仁联系在一起，合作编著了这本解题研究专著．作为目前高等师范院校数学系、科设置《初等数学解题研究》课程的试用教材．

本书是初等数学解题研究的初步尝试，书中总结概括了近年来这方面的许多研究成果，同时又提出作者的许多见解．有些正在讨论中的问题，作者力求给予全面、客观的评述．作为“研究”，也大胆地提出了我们的一些观点，这些观点，大体上触及到了数学教育改革中亟待解决的主要理论和实践问题．初等数学解题方法系统建构是一个新的概念，对于这个概念的内涵和外延的理解目前尚未取得国内外专家的共识，作者深知目前所建立的理论框架只是初步的，不完善的，但是形势的需要迫使我们不得不先作抛砖之举，“始生之物，其形必丑”．我们恳切地期待着同行、专家以及后来者的斧正．

本书的编写是采取专题讨论的方式．各章节具有一定的独立性，使用时可以根据教学大纲的要求和实际需要，着重教学其中的某些章节，而把其余留给学生自学参考．

本书第一章由沈文选（湖南师范大学）编写；第二章由王列惠

(§2.1、§2.2,贵州师范大学)、沈文选(§2.3、§2.4)编写;第三章由沈文选(§3.1、§3.2、§3.3)、陈志云(§3.4,华中师范大学)编写;第四章由沈呈民(§4.1、§4.2、§4.3,东北师范大学)、邵光华(§4.4,§4.5,曲阜师范大学)编写;第五章由熊萍(广州师范学院)和沈文选编写;第六章由黄美剑(浙江师范大学)和沈文选编写;第七章由康纪权(四川师范学院)编写.

叶军参与了第一章部分内容的写作与修改,熊萍、陈传礼、沈呈民、邵光华审读了部分书稿.沈文选主持了全书的编写工作,并进行了统稿,改写了部分章节.限于编者水平,书中难免有不少缺点和错误,希望读者批评指正.

编　者

1996年元月

目 录

第一章　数学解题与解题研究

§1.1　数学问题与问题解决

1.1.1　数学问题

我们可以从三个方面来认识“数学问题”这一概念.

1. 把问题看成一个系统

什么是“系统”?一个系统就是由互相关联、互相作用的若干部分(即要素)组成的具有一定功能的统一整体. 用 V 表示要素,E 表示有机联系,则一个系统可记为 $R(V,E)$.

元素(对象)、性质、联系、关系、状态、功能的形态等都可被认为是系统的要素;系统作为一个有机整体,它具有不同于各个组成要素的整体功能;系统不是孤立的,它与更大的系统相联系,是更大系统的要素或子系统,且称这个更大的系统为其环境;系统随着环境的改变而变化,以适应环境. 在研究系统时,要把系统置于环境之中去等等. 这些都是“系统”的一些要点.

对某人 M 来说,面对某个构成抽象(或具体)的系统 R(此时 (M,R) 又可构成一个更大的系统),若当 M 接触 R 后,知道 R 中的全部元素、元素的性质和元素间的关系,(或 M 并不与 R 发生关系)就称 R 是相对于 M 的稳定系统,并记为 R_0. 如果这个系统中至少有一个元素、性质或关系是他所不知的,那么称 R 相对于 M 就是问题系统,并记为 R_x. 某系统 R 是稳定系统还是问题系统,是由 M 决定的,取决于 M 的知识、经验、技能等.

当 M 要求(不管这要求是用什么方式表示的)从 R 中确定他不了解的元素、性质和关系时,R 对于 M 就变成了问题,可见,对于这个人 M 来说,这个问题系统就是一个问题. 例如,“哥德巴赫

猜想”对试图解决它的所有人而言都是一个问题；“用圆规和直尺能否三等分任意一个角”、“关于五次方程的根式求解”，对某些人它们是问题，而对另外一些人，它们则不是问题等等.

如果这个系统的元素、性质和关系等是与数学有关的，那么它就是一个数学问题.

2. 数学问题的特征是形式化

数学问题的产生渊源于人类的社会实践，即生产、生活和科研活动的需要. 为实际问题变成数学问题后，都抽去了对象的物质性，变成了抽象的形式，即纯粹形式化的问题. 著名的哥尼斯堡七桥问题，最初并不是一个数学问题，当欧拉把它抽象成“一笔画”问题时，它主被形式化了，从而变成了一个数学问题. 数学问题的形式化特征，使得问题对象的物质性被抽去，只保留了数学所关心的本质属性，这样就有利于数学概念、命题的形成，为研究数学和学习数学提供了便利，更加有利于我们理解和认识数学知识. 但是，了解形式化问题的获得过程，也是很重要的. 形成形式化的数学问题，就是为实际问题建立适当的数学模型. 因此，我们在解决数学问题时，不但要解那种纯粹形式化的数学问题，还要解一些带有物质背景的实际问题，学会为实际问题建立数学模型.

3. 数学问题的结构

数学问题，由四部分组成，这就是：条件(r)、目标(o)、运算(p)、依据(z). 或者说由四类信息组成：条件信息、目标信息、运算信息、依据信息.

(1) 条件（初始状态 r）——系统 R 的问题性特征（即题的条件）

条件或条件信息，是指问题已知的和给定的东西，它们可以是数据、可以是关系，也可以是问题的状态.

所谓关系，是指对条件的限制. 这些关系可以是已知条件之间的关系；可以是已知条件与未知条件之间的关系；可以是数量关系，例如函数关系；可以是位置关系，例如平行、垂直、相切等等.

问题的状态，是指在问题所涉及的范围内，解决问题过程中的

某一时刻的表达形式.问题在最初时刻的表达形式,就是初始状态(或原始状态).问题的状态往往很重要,状态不同就会决定解题的方法不同,问题的结果也会不同.

在很多情况下,问题的条件不是明确给出的,尤其是不少关系是隐蔽的,需要问题解决者自己去发掘、寻找.

(2) 目标(最终状态 o)——系统 R 的稳定性特征(即题的结论).

一个问题的目标或目标状态,是指一个问题系统变成了稳定系统.也就是说,问题一旦达到目标状态,就认为它不再是一个问题系统,而是一个稳定系统.在此之前的该问题各个状态,包括初始状态,都属于问题系统.在问题由初始状态变成目标状态的过程中,所经过的那些状态,可以看作是问题的中间状态.

问题的目标状态有时完全给定,有时不完全给定,或总称为一个目标函数.例如"有非零解的齐次线性方程组的解"就是一个具体的目标函数,求它的解就是求出它的一个基础解系,它所有的解都可以由这个基础解系线性表出,而方程组的基础解系并非唯一.

数学问题通常有如下几种类型的目标状态:在证明题中,目标状态是完全给定的;在求解题(包括填空、选择题)中,目标状态不是完全给定的;在某些综合问题中,前两种目标状态都有.

(3) 运算(解 p)——由 r 至 o 的转化(即解题过程)

运算或运算信息是指允许对条件采取的行动.它们可以是逻辑运算,数学变换,推导与计算,也可以是具体的操作.

通过运算可以改变问题的状态,把运算用于解题过程中的各个状态,就可以不断地改变问题的状态,向目标状态过渡.

(4) 依据(解题基础 z)——系统 R 的机理和转换基础(即解题的根据)

依据或依据信息是指允许运算或允许运算信息.在证明题中允许运用的推理规则、定义、定理;在求解题中允许运用的运算公式、法则;在作图题中允许运用的作图工具和使用规定;在操作题中允许运用的操作规则等等都是依据信息.

依据或依据信息，是解题的基础，是问题由初始状态向目标状态转化的理论根据.

条件、目标、运算、依据是数学问题的四大组成部分，又可以说是数学问题的四要素.

显然，一般问题的四要素也如上所述，只不过数学问题是由 r 转化为 o 时，靠的是数学手段，即成份 z 与 p 具有数学特点罢了.

解答问题时，全面认识具体问题的组成，对最终完成解题具有非常重要的意义.

1.1.2 数学问题的分类

数学问题可以按照多种不同的标准进行分类.

1. 按要素分析分类

如果一个题的四个要素 r、o、p、z 都是与数学有关的，那么该题是纯数学题；如果仅在 z、p 出现数学内容，那么它就是数学应用题.

一个题系统的问题性(即问题的类型)取决于主体 M 对它的四个基本要素，哪些是已知的，哪些是未知的. 一道题，对于 M 来说，若 r 明确，p、z 已知，o 明确(或不明确)，则称为标准性题，记为 R^0_r；若 r、z、p、o 中有一个不知道，则称为训练性题，记为 R^1_r；若 r、z、p、o 中有两个是不知道的，则称为探索性题，记为 R^2_z；若 r、z、p、o 中有三个是不知道的，则称为问题性题或研究性题，记为 R^3_r.

在中学数学课本里，大多数是标准性题和训练性题，即我们称作的练习与习题，其他题型常在选拔性考试或课外补充题中出现. 显然，上述题型的划分是相对于主体 M 和环境而言的. 事实上，同一道数学题，对于不同的主体可能是不同的题类；又随着 M 的知识，技能增减，可以使问题类别"升格"或"降格"；另外，还随着解题环境的不同，也可能影响类别(因解题环境对解题者存在着暗示或干扰作用).

例 1 求证：$\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

此题对于已经学过同角三角函数关系的学生来说，r：左边为 $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$，右边为 $\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$；$o$：同角三角函数关系；$p$：化为

$\sin\alpha, \cos\alpha$；z：左边＝右边．这四个要素都是已知的，因此是一道标准性题．

例 2 分解因式：x^4-13x^2+36．

此题对于学过用十字相乘法和平方差公式的学生来说，除了结论 z 是未知的之外，其他三个要素 r、o、p 都是已知的，因此是一道训练性题．

例 3 设 a 和 b 都是正数，求证：$\sqrt{2}$ 必在 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a+2b}{a+b}$ 之间．

此题对于未学过作差比较法的学生来说，已知的是条件 r 和结论 z 这两个要素，其余的两个要素 o、p 都是未知的．已知条件 a 和 b 与结论 $\sqrt{2}$ 之间联系也不清楚，$\sqrt{2}$ 和 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{a+2b}{a+b}$ 之间关系也尚未确定．采用什么方法推理也不明确．因此是一道探索性题．

例 4 四面体的截面可以是什么形状的图形？

此题除已知条件 r 外，其余各要素 o、p、z 都是未知的，因此是一道问题性题．

通过要素分析，将数学问题分成四类，这对于教师掌握问题的难度是有好处的．对于问题的难易，可以看出由易到难排列次序是 $R_x^0-R_x^1-R_x^2-R_x^3$．

2．按知识内容分类

将数学问题按知识内容的不同分为算术题、代数题、平面几何题、立体几何题、解析几何题和三角题，这是一种最常用的分类．

按知识内容不同的分类可在不同的层次上进行．如代数题又可分为代数式、集合、对应、函数、方程、不等式、复数、排列组合、二项式定理、数列问题等；方程问题又可再分为整式方程、分式方程、根式方程、超越方程问题等等．

一个数学问题，如果涉及的知识超出某一单元或学科，这样的问题称为综合题．超出一个学科的又可分为双科综合题、多科综合题等．

例 5 圆 O 的方程为 $x^2+y^2-4Rx\cos\alpha-4Ry\sin\alpha+3R^2=0$（$R>0$）．（1）求圆心 O 的坐标，圆 O 的半径；（2）当 R 固定，α 变动时，

求圆心 O 的轨迹. 并证明:此时不论 α 取什么值,所有的圆 O 都外切于一个定圆,并内切于一个定圆.

此题是以解析几何中参数方程为主线,综合平面几何、三角等知识的综合题.

3. 按解题形式分类

形式是数学问题的外部特征,数学问题的形式和其解法常常是有联系的.

许莼舫将几何问题按解题形式分为证明题、计算题、作图题和轨迹题四类. 那么对于一般的数学问题,按形式分类也可分为求解题,证明题或说明题,变换题或求作题,填空白题等四类.

求解题. 这类题是要求出、寻找、识别某种未知量,并且未知数可能是量、关系式、某种对象、物体,它的位置或者形状等等. 这一类问题包括:计算各种表达式的值;一个未知数的方程;方程组;解不等式;文字计算题;几何计算题;求已知函数的特殊点和特殊区间等.

证明题或说明题. 这类题是要求证实某一论断的正确性,或者检验它是真的还是假的,或者说明某一种现象,某一个事实为什么成立. 这类问题包括:证明恒式等式;证明不等式;几何证明题;确定几何图形的形状;已知表达式或图形的性质,确定这个表达式或图形的方程;证明表达式、图形或事件的某种性质(如存在性等)等.

变换题或求作题. 凡是在问题中要求变换某种表达式,要求化简它为其他的形式,要求作出某一几何图形或者表达式满足给定的条件等等,都属于这一类. 它包括;化表达式为标准的形式;化简各种表达式;多项式的因式分解;对表达式施行各种运算;作由解析式表示的函数的图象;根据一定的条件作出几何图形;由已知的几何图形,作出经过某种变换所得到的几何图形等.

填空白题. 这类题是要求在给定的空白处或括号中填写上合适的语句、符号或数值等. 这类问题常包括一般填充题(或填空题)、判断题、选择题、搭配题等.

4. 按评判解答的客观性分类

有唯一正确的答案，不论由谁评判都只能给出同一个分数或适合于计算机阅评的数学问题称为客观性问题；正确答案可用多种方式表述，评判者须凭主观经验给分的问题，称为主观性问题.

传统的证明题、计算题等，都属于主观性问题. 以证明题来说，虽然有明确的已知条件和求证结论，但是不同的解答者可以依据不同的知识、采取不同的方法来解题，即使有同一依据，采取相同的方法，在叙述过程中，其繁简程度、清晰程度和严谨程度也各不相同. 面对问题解答中的多种多样情况，评判者只能凭主观经验予以评分. 因此采用主观性问题作为考试题目，从考试的准确性、可靠性要求来说，有其不利的一面.

客观性问题常分为判断题、选择题、填充题和简短问答题. 现在时兴的选择题，这类题属于固定应答型题目，它的结构严谨，这种题目的答案解答者不能自由发挥，不能出现部分正确的答案，也不能在解答中掺杂与试题无关的内容，解答者只能选择答案而别无他途. 因此各类考试中常采用客观性题，对于提高考试的准确性、可靠性有一定的好处. 评判时能利用计算机是最大的优点. 关于选择题的编拟、解法等，我们将在第六章进一步讨论.

5. 按思维程度分类

思维程度常分为规范程度和发展程度等.

数学问题按照思维的规范程度可分为常规题与非常规题. 常规题的另一种近义的称呼是标准题，它们通常能够较直接地运用数学模式或数学思维模式加以解决. 非常规题的另一种近义称呼是非标准题，它们往往由于形式独特、类型的不规范、数学关系的隐蔽性或数学推理方法的间接性困难，而没有直接明显的方法可循，需要运用思维策略灵活地进行具体分析，使其转化为常规问题以应用已有的数学模式或思维模式加以解决.

数学问题按照思维的发展程度，可分为封闭型题与开放型题. 通常称 R_x^0 与 R_x^1 型题为封闭型题，而把 R_x^2、R_x^3 型题称为开放型题. 衡量数学问题的开放性或思维发散程度并不完全取决于问题

要素未知个数的量的方面，还要看到问题要素的质的方面．封闭型题的质的表现是：有完备的条件和固定的答案，而开放型题的质的表现是条件不完备或答案不固定．开放型题还可以按照问题要素的发散倾向分为条件开放题、推理（方法）开放题与结论开放题等不同的类型．开放型题要求主体能动态地分析可能的条件与面临的问题之间的复杂关系，要求主体参加问题的建构与引伸，因而要解决它就不仅需要逻辑思维，还常常需要形象思维与直觉思维的积极参予．

在数学解题教学中，封闭型题与开放型题具有解题训练的互补作用，两者均不可偏废．封闭型题一般用于巩固知识，主要引起“同化”作用；而开放型题则使主体容易暴露知识的缺陷，主要引起“顺应”作用；促进解题能力的提高．

例 6 （1） 已知 AD 是圆的直径，l 是过 D 点的切线，割线 AB、AC 交 l 于 B、C，交圆于 E、F，求证：$AE\cdot AB=AF\cdot AC$；

（2） 在（1）中，若直线 l 向上平移成圆的割线，仍记 AB、AC 与 l 的交点为 B、C，与圆的交点为 E、F，问 $AE\cdot AB=AF\cdot AC$ 是否仍成立？ 为什么？

（3） 若直线 l 在保持与 AD 垂直的条件下，平移成与圆相离，相关字母的标注不变，问结论 $AE\cdot AB=AF\cdot AC$ 是否仍成立？为什么？

（4） 在（3）的情形下，化简 $AB\cdot AE\cdot D'C+AC\cdot AF\cdot BD'$，使之含有 AD' 的式子，其中 D' 为 l 与 AD 延长线的交点．

简析：问题（1）给出了条件和结论，解题的依据与方法虽未给出，但也是较明显的，只需证明 $AE\cdot AB$ 及 $AF\cdot AC$ 分别等于 AD^2 即可（用射影定理或相似三角形性质）．故它是一个封闭型题．

问题（2）与（3）是（1）的推广，给出了条件及结论的方向，在证明方法上也需作出适当的调整，但在几何元素关系本质上仍没有什么变化．因此它们仍是一种封闭型的问题，只需通过三角形的相似或用四点共圆性质即可获证．但是通过它们与情形（1）的联系

——l 平移，D 点分裂成 D 与 D' 两点，而性质不变，可以从动态变化的观点认识几何中的某种运动（平移等）的不变性.

问题（4）的结论只给出了关系式的一半和一点要求，至于它们究竟等于什么，需要主体自己进行探求，而且在关系结构上也有了不同质的变化，因此解题依据与方法也就变得较为复杂而不能明显想到. 这就是一种开放型题. 通过探求才知其结论是 $AD' \cdot AD \cdot BC$. 这须过 B 作 $BG /\!/ AC$ 交 AD' 的延长线于 G，利用托勒迷定理及 $\triangle ABG \backsim \triangle FDE$、$\triangle AD'C \backsim \triangle GD'B$ 或利用（3）的结论，再注意 $\triangle AED \backsim AD'B$ 才获得.

例 7 下列各题均在不同程度上具有开放性：

（1）某数的平方可表示为四个连续奇数的乘积，求所有具有这种性质的数.

（2）设 α、β 是两个任意锐角，问能否以 $\sin\alpha$、$\sin\beta$、$\sin(\alpha+\beta)$ 为边作三角形？

（3）$\underbrace{444\cdots4}_{n+1个}\underbrace{888\cdots8}_{n个}9$ 是否为某个自然数的完全平方？证明你的结论.

（4）找出满足 $f(x)\pm g(x)=f(x)\cdot g(x)$ 的初等函数 $f(x)$ 与 $g(x)$.

简析：（1）这是一个形式上的结论开放题. 因为我们不知道具有所论性质的数究竟有多少个，解题方法也是不明显的.

若设所求的数为 x，第一个奇数为 n，则有

$x^2=n(n+2)(n+4)(n+6)$，或 $x^2=(n^2+6n+4)^2-16$，

通过分析平方数的尾数及差可知：在平方数中只有 0，9 才具有 a^2-16 的形式，再由 x^2 是奇数，最后可确定只有 $9=(-3)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 3$ 是问题的答案.

（2）这题给出了条件，结论也只有两种可能，并且显然可用常规的三角方法，即比较 $\sin\alpha+\sin\beta$，$\sin\alpha-\sin\beta$ 与 $\sin(\alpha+\beta)$ 的大小关系来获得结论. 但是它还有另外的方法可解，因而是一个推理开放题，例如可用构造法获解：在半径为 1 的圆 O 内，作 $\angle BOC=$

2α，$\angle COA=2\beta$，连 BC、CA、AB，由于 2α、2β 均小于平角，B、A 必分居于 OC 之两侧. 易知此时 $\angle BAC=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle ACB=180°-\alpha-\beta$，而由正弦定理恰有 $BC=\sin\alpha$，$CA=\sin\beta$，$AB=\sin(\alpha+\beta)$.

（3）这题给出了条件，结论有两种可能，需通过推理分析探明，解题方法也不明显，也是一种推理开放题. 先从简单情形开始，$4489=67^2$，$444889=667^2$，…，可推猜 $\underbrace{444\cdots4}_{n+1个}\underbrace{88\cdots8}_{n个}9=\underbrace{66\cdots6}_{n个}7^2$，再由 $44\cdots488\cdots89=4\sum_{k=n+1}^{2n+2}10^k+8\sum_{k=1}^{n}10^k+9=1+4(1+10+10^2+\cdots+10^n)+4(1+10+\cdots+10^{2n+1})=1+4\cdot\frac{1}{9}(10^{n+1}-1)+4\cdot\frac{1}{9}(10^{2n+2}-1)=\frac{1}{9}(4\cdot10^{2n+2}+4\cdot10^{n+1}+1)=\left(\frac{2\cdot10^{n+1}+1}{3}\right)^2$，即证.

（4）这题仅给出了条件，结论所涉及的范围也相当广，先要想象或猜测出这种函数的存在，再进一步探求其它可能性. 因此，开放程度较高，是一种带有研究性的问题. 通过仔细的搜索和联想（如例 1），我们可以得到满足要求的很多答案，并且还可进一步作出引伸. 例如有

$$\mathrm{ctg}^2x-\cos^2x=\mathrm{ctg}^2x\cdot\cos^2x;\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-x};$$

$$\frac{ax+b}{cx+d}+\frac{ax+b}{(a-c)x+b-d}=\frac{ax+b}{cx+d}\cdot\frac{ax+b}{(a-c)x+b-d}$$

（$a\neq0$，$c\neq0$，且 $a=c$，$b=d$ 不同时成立）；

$$\cos2x-(1-\frac{1}{2}\sec^2x)=\cos2x\cdot(1-\frac{1}{2}\sec^2x);$$

$$\frac{1}{kx}-\frac{1}{kx+1}=\frac{1}{kx}\cdot\frac{1}{kx+1};$$

$$\mathrm{tg}kA+\mathrm{tg}kB+\mathrm{tg}kC=\mathrm{tg}kA\cdot\mathrm{tg}kB\cdot\mathrm{tg}kC,$$

$$(k\in Z,A+B+C=\pi).$$

最后我们还须说明的，在第六届国际数学教育会议（1988 年