

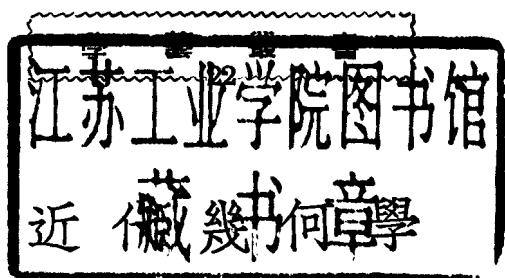
近代幾何學

王邦珍編

學藝叢書



中華學藝社出版



王 邦 珍 編

中華民國二十三年十一月初版

周

(53221)

學藝叢書 近代幾何學一冊

每冊定價大洋捌角

外埠酌加運費匯費

編纂者

中華學社 王邦珍

發行人

王雲五

印刷所

上海河南路商務印書館

發行所

上海及各埠商務印書館

版權所有
翻印必究

(本書校對者胡達聰)

例 言

一. 本書以 C. Godfrey and A. W. Siddons: Mordern Geometry 爲根據,參以 Casey: A sequel to Euclid, 長澤龜之助: 幾何學精義, 小倉金之助: 初等幾何學等書編輯而成.

一. 本書程度習完初中幾何即可了解.

一. 本書目的爲補充普通幾何學之不足,可作幾何續編讀之.

一. 每編之末附以例題,多係幾何名題,足爲解題模範.

一. 一題有數見者其解法各異,可以鍛練思考.

一. 本書分十一編,前十編爲近代幾何學之主體,末一編爲最近世幾何學之大意.

一. 本書爲普通幾何學之續編,選材力求淺現,故對於圓錐曲線,捨而不論,讓諸解析幾何學,綜合幾

何學等。

一、鄙人學識謫陋，誤謬之處，自知不免，閱者諸君幸指正焉。

名辭索引

二 畫

叉比. § 34, 70.
九點圓. § 26.
九點圓心. § 26.

三 畫

三角函數. § 10.
三乘比圓. § 97.

四 畫

內心. § 17.
反形. § 60.
反點. § 60.
反形率. § 60.
反形圓. § 60.
反形半徑. § 60.
分調和. § 34.

五 畫

包. 問 47.
正向. § 1.
正角. § 9.

正線分. § 1.

外心. § 16.

平均中心. § 2, 4.

平行線束. § 37.

永久相似中心. § 103.

六 畫

共線點. § 15.
共圓點. § 15.
共點線. § 15.
共點圓. 問 282.
共軛點. § 45, 系 2.
共軛線. § 45, 系 2.
共軸圓. § 54.
自共軛三角形. § 81.

七 畫

角. § 9.
完全四角形. § 78.
完全四邊形. § 78.

八 畫

限點. § 57.

直交圓. § 52.
 非調和比. § 70.
 定式三角形. 同 162.

九 畫

頁向. § 1.
 頁角. § 9.
 頁線分. § 1.
 重心. § 21.
 配景. 例 X.
 配景軸. 例 X.
 配景中心. 例 X.
 逆線. 同 299.
 逆點. § 90.
 逆相似. § 84.
 逆平行線. § 85.
 相似軸. 例 XXIII.
 相似圖. 同 160.
 相似內心. § 48.
 相似外心. § 48.
 相似外軸. 例 XXIII.

十 畫

垂心. § 22.
 射線. § 37.
 根心. § 53. 系 1.
 根軸. § 52.

視角. 同 160.

十一畫

第一 Lemoine 圖. § 97.
 第二 Lemoine 圖. § 88.
 第一 Brocard 三角形 § 105.

十二畫

傍心. § 17. 系.
 極線. § 42.
 極點. § 42.
 極圓. § 81.
 等量. § 74.
 等邊點. 同 343.
 等角共軛線. § 89.
 等角共軛點. § 90.
 順相似. § 84.
 無窮遠點. § 37.

十三畫

圖函數. § 10.

十四畫

截線. § 37.
 對合. § 73.
 對合中心 § 73.
 對合復線. § 73.

對合複點. § 73.
對頂點. § 78.
對角點. § 78.
對角三角形. § 78.

十五畫

調和. § 84.
調和系. 同 138, 139.
調和線束. § 39.

調和點列. § 29.
調和共軛點. § 34.
線束. § 37.
餘弦圖. § 88.

十八畫

雙對. § 77.
類似中線. § 87.
類似重心. § 88.

名題索引

A.

Apollonius' circle 問 342.
problem 例 XX, XXX.
theorem §14, 例 XXI.

B.

Beynald's proof 例 III.
Brianchon's point 例 XIII.
Brocard's angle § 104.
arc § 104.
circle § 105.
negative point § 101.
positive point § 101.
theorem § 104.

C.

Carnot's theorem 問 114.
Castillon's problem 問 253.
Catalan's theorem § 92.
Ceva's theorem § 29.
Chapple's theorem 例 VI.

D.

Davis' theorem § 94, 問 324.
Deteuf's theorem 問 118.
Dusargues' theorem 例 X.

E.

Euler's theorem § 1. 系 3, 例 1.

F.

Feuerbach's theorem
問 93, 例 XXVI.

G.

Gergonne's point 問 96.
solution 問 196.
Grebe's theorem § 91. 系 1.

H.

H. F. Talbot's theorem 例 XXXII.
Huillier's problem 例 XXIX.

L.

Lemoine's live 問 336.

parallel § 96
point § 88
theorem 問 118.

M.

Maclaurin's theorem 問 265.
Malatti's problem 例 XXI.
Mathiew's theorem 問 292, 332.
Matol's theorem 問 118.
Mauhiem's theorem 例 XXV.
Menelaus' theorem § 31.
Miquel's point 問 71.
theorem 例 IX.

N.

Neuberg's theorem 問 334.
Newton's line 例 XXXI.

P.

Pappus' theorem
例 XXIV, XXVII.

Pascal's line 例 XII, XXVIII.
Peancellier's cell 問 201.
Poncelet's theorem 問 115.
Ptolemy's theorem 例 XXIII.

S.

Salm's theorem 例 XVI.
Schlömilch's theorem § 93.
Simson's line § 27.
Simmons' theorem 問 335.
S. kautor's theorem 問 112.
Steiner's point 問 358.
solution 例 XXI.

T.

Tarry's theorem 問 338.
Taylor's circle § 95.
proof 例 XXVI.
theorem § 95.
Tucker's circle § 99.

目 錄

第一編	平均中心	1
第二編	三角形	12
第三編	共點性, 共線性	44
第四編	調和分割	56
第五編	極點, 極線	66
第六編	相似中心	74
第七編	共軸圓, 直交圓	80
第八編	反形	95
第九編	叉比	112
第十編	雙對原理及完全四邊形	125
第十一編	三角形幾何學	136

近代幾何學

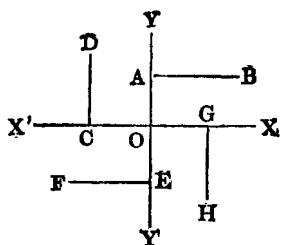
第一編

平均中心

1. 直線 XX' 上定一點 O ,
向右測之爲正向,向左爲負向.

垂直於 XX' 之直線在 XX'
上方爲正向,下方爲負向.

如圖 OX, OY, AB, CD 爲正
線分; OX', OY', EF, GH 爲負線分.



系 1. $AB = -BA$

系 2. A, B, C 在一直線



上之三點,則 $AB + BC + CA = 0$.

系 3. P 爲直線 ABC 上任意點,則

$$PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB = 0 \quad (\text{Euler})$$

問題 3. $\triangle ABC$ 之重心乃 A, B, C 之平均中心.

3. 定理 由 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 各點至一直線 L 距離之和等於此等點平均中心 B 至 L 距離之 n 倍.

證. 引垂線 $A_1M_1, A_2M_2, \dots, B_1N_1, B_2N_2, \dots$; 平行線 $A_1m_1, B_1n_1, B_2n_2, A_3m_3, \dots$, 則

$$A_2n_1 = B_1m_1$$

$$\therefore 2B_1N_1 = A_1M_1 + A_2M_2$$

$$\text{又} \quad B_1n_2 : n_2m_3 = B_1B_2 : B_2A_3$$

$$\therefore 2B_1n_2 = n_2m_3$$

$$\therefore 3B_2N_2 = 3n_2N_1 + 2B_1n_2 - n_2m_3$$

$$= 2B_1N_1 + A_3M_3$$

$$= A_1M_1 + A_2M_2 + A_3M_3$$

逐次如斯遂得

$$n \cdot BN = A_1M_1 + A_2M_2 + \dots + A_nM_n.$$

上式可簡書爲 $n \cdot BN = \sum A_i M_i$.

系 1. 若直線 L 過平均中心 B , 則由 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 至 L 距離之和爲 0.

系 2. 本定理及系 1 之逆皆真.

問題 4. 四點 A, B, C, D 之平均中心 M , 乃四邊形 $ABCD$ 二雙對邊中點聯線之交點。

4. 定義 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 爲一羣之點 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 爲對應此等點一羣之定數。結 A_1A_2 , 取 $A_1B_1 : B_1A_2 = a_2 : a_1$; 結 B_1A_3 , 取 $B_1B_2 : B_2A_3 = a_3 : a_1 + a_2$; 遞次如斯, 最後之分點 B 稱 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 爲乘數此 n 點之平均中心(圖用 § 2)。

5. 定理 B 爲一羣之點 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 關於乘數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 之平均中心。由 $B, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 至直線 L 引垂線 $BN, A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, \dots, A_nM_n$, 則

$$\Sigma(a_i \cdot A_i M_i) = BN \cdot a_1.$$

證. 引垂線 $B_1N_1, B_2N_2, \dots$; 平行線 $A_1m_1, B_1n_1, B_2n_2, A_3m_3, \dots$

$$\text{則} \quad B_1m_1 : A_2n_1 = a_2 : a_1$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 \cdot A_1M_1 + a_2 \cdot A_2M_2 &= a_1 \cdot m_1N_1 + a_2(A_2n_1 + n_1M_2) \\ &= a_1 \cdot m_1N_1 + a_1 \cdot B_1m_1 + a_2 \cdot B_1N_1 \\ &= (a_1 + a_2)B_1N_1 \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad B_1n_2 : n_2m_3 = a_3 : a_1 + a_2$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & a_1 \cdot A_1 M_1 + a_2 \cdot A_2 M_2 + a_3 \cdot A_3 M_3 \\
& = (a_1 + a_2) B_1 N_1 + a_3 \cdot A_3 M_3 \\
& = (a_1 + a_2) (B_1 n_2 + B_2 N_2) + a_3 (B_2 N_2 - n_2 m_3) \\
& = (a_1 + a_2 + a_3) B_2 N_2.
\end{aligned}$$

循是推之可達於一般。

系 1. 若 L 過 B 則 $\Sigma(a_1 \cdot A_1 M_1) = 0$.

系 2. 若 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 皆為 1, 則得 § 3 定理。

系 3. 本定理及系之逆皆真。

問題 5. $\triangle ABC$ 之內心即 A, B, C 關於對邊 a, b, c 為乘數之平均中心。

問題 6. 正多邊形之中心即其角頂之平均中心。

6. 定理 B 為關於乘數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 點 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 之平均中心, P 為任意點, 則

$$\Sigma(a_1 \cdot A_1 P^2) = \Sigma(a_1 \cdot A_1 B^2) + PB^2 \cdot \Sigma a_1$$

證. 作 PB 直線, 引垂線 $A_1 M_1, A_2 M_2, \dots$, 則得

$$a_1 \cdot A_1 P^2 = a_1 (A_1 B^2 + PB^2 + 2 M_1 B \cdot PB)$$

此關係式就於各點皆成立。

