

数学课程现代化研究

丛刊

2

华南师范学院数学系
数学课程现代化研究组编

1978.12.

数学教学中的 新趋势

1972

第三卷

Unesco 1973

联合国教科文组织出版

林建同译

译者序

联合国教科文组织 (Unesco) 近几年编写了一套介绍各国中小学自然科学学科 (如: 数学、物理、化学、生物、综合自然科学等) 的教学改革情况丛书, 这套丛书均取名为《××科教学中的新趋势》, 《数学教学中的新趋势》*是其中的一个分册。由于六十年代以来, 这些国家中小学的教学改革是由数学科“触发”的, 所以这个分册是这套丛书的主要的分册。

《数学教学中的新趋势》已出版了三卷。第一卷在 1969 年出版, 第二卷在 1971 年出版。这两卷刊登了一些国家的改革试验报告、简介等, 内容比较具体, 但不全面。从第三卷开始就改为由 Unesco 组织专人对中小学数学教学的某些方面的改革情况和各种趋势分章加以综合地评述。因此这一卷是概括了从 1958 年到 1972 年间各国数学改革的情况。虽然编者的立场是主张改革的, 书中很少反映反对改革的人的意见和七十年代中期对“新数”的批评, 但对了解这些国家近十年来的数学教学仍有一定的参考价值。鉴于目前我国这类书籍较少, 本着“洋为中用”的精神, 现将本卷全文译出以资参考。各章所附参考书目暂未印出。

《数学教学中的新趋势》第三卷是在 1973 年分别用英、法两种文字出版的, 译文译自英文版本。由于翻译时间匆促, 无暇字斟句酌, 还有一些内容涉及当前国外流行的教育理论、商业公司出版或生产的教材、教具名称, 一时找不到恰当的译词, 暂将原文照录, 希读者见谅。

林建同

1974.8—1975.1.

* 《New trends in mathematics teaching》

新 序

根据 Unesco *促进世界各个地区和各个阶段的数学教育改革的全面计划,在过去五年内, Unesco 筹备并且出版了两卷“数学教学中的新趋势”。这两卷书构成更大的丛书“基础科学的教学”的一部份,这套丛书包括有关“基础科学”(即物理,化学和生物学)的教学新趋势的书(每种有一本以上),以及最近一本名为“综合科学教学中的新趋势”的书。虽然,在各类不同学科的各套书之间,存在某种方法上的差异,总的说来,这些书包括了把许多材料混合起来重印(例如,重要讨论会和会议的摘要报告,选自主要期刊的引起兴趣的文章),以及专为各册书准备的有创见的文章,附加上确实的动态消息。

虽然所有领域中的各卷十分受欢迎(某几卷曾重印不止一次),以致由于害怕会妨碍某些成功的样板而产生了合乎情理的谨慎,产生了认为未来的各卷书宁可搞得对读者更有价值的想法。因此,认识到首先,虽然过去的各册书中个别的文章可能曾起到促进作用,但是对一位想得到某些学科(例如数学)的教学趋势的全面描述的读者来说,只有通过阅读整卷书,然后从选登的那些文章的启发中得出他自己对趋势的结论(如果有的话)才能做到这一点,并且还不知道这些结论能否充分代表那些文章的观点。再者,各篇文章和报告是以英文或法文刊出(甚至常常没有另一种语言的摘要)。最后,虽然已经努力做到对每门学科每两年出版一卷,但是溺于教育系统的惰性,要辨别出“新的趋势”,这样的时间间隔未免是太短了。

由于这些理由,我们决定:(a)以后的各卷将由对某个全面的教育领域(例如数学教育)的各个方面的趋势的学术性分析组成。因此各卷的内容和其标题更为一致;(b)各篇译文将至少以英文、法文和西班牙文印刷;以及(c)任一学科以后的各卷将每四年出版一次。这本“数学教学中的新趋势”第三卷是在一些学科中体现这种新途径的第一本书。因此,它既没有受前几卷的限制也没有从以前的经验中获益。

本卷共分十章和一篇结束语。每一章试图对全部数学教育领域中某些重要的小课题的趋势提出客观的分析,并附有书目以便于作充分的研究。在结束语中,各撰稿人以较主观的方

* Unesco 即联合国教科文组织

法一起来表示他们对数学教育的意见和希望。由于各种实际的原因，本书不可能包含数学教育中的所有重要课题。因此，明辨的读者将注意到它的欠缺，特别是缺少师资教育和计算机方面的篇章。象这样的课题的重要性是被认识到的并且将作出各种努力以便在未来的书中包括它们。

本书是写给所有那些关心或负责改进全世界从幼儿园到大学低年级或参加工作后的数学教育的人们的。包括课程督学，数学督学，受训的师范生和他们的学院教授，以及学校的所有数学教师。本书的目的是向读者提供更好的机会来了解数学教育改革的想法和信息。但是并不想对流行的想法或趋势作出宣判（除了在结束语中被撰稿者们以主观的途径所体现的那种程度外）。最确切地说，本书不是要表现出某种因袭的权威的味道。但是它可以作为有关数学课程和大纲的进一步试验或改造计划作出判断提供消息的组成部份。

准备本书的方式也关系到对其内容的全面理解。在1971年国际数学联盟（IMU）属下的国际数学教育委员会（ICMI）的代表和其它一些杰出的数学教育工作者被邀请到巴黎开会以计划 Unesco 关于数学教育的各项活动，包括本书的准备工作。列出了一份临时性的选题，包括各种准备分析其趋势并以本书的一章的形式提出的小课题。然后对这样的每一章，努力做到选定能够并且愿意从事对所要的世界趋势作学术性分析的最权威的个人或小组。按计划在1971年9月初于罗瓦尔蒙特（巴黎郊外）举行由这些撰稿人加上少量专家参加的为期两周的会议。预先已准备了和传阅了所有章节的草稿。在会议中，各章曾由所有与会者评论并最后定稿。

虽然，在实行上述计划过程中，对课题和撰稿人曾需要作一些修改，但本书包含了由一些优秀数学家和数学教育工作者的国际小组准备的材料。罗瓦尔蒙特会议的参加者是（括号内是他们承担了初稿的某些工作的各章号码）：毕晓普 A. Bishop (9, 10)，英国；费尔 H. Fehr (10)，美国；费罗伊登塔尔 H. Freudenthal (4, 6)，荷兰；高尔林 C. Gaulin (8)，加拿大；格莱曼 M. Glaymann (1, 4)，法国；格里费思 B. Griffiths (7)，英国；哈斯特德 M. Hastad，瑞典；基尔帕特里克 J. Kilpatrick (10)，美国；克里哥夫斯卡 A. Krygowska (3)，波兰；尼达姆 A. D. Nijaam，荷兰；奥佩尔 Z. Opial (2)，波兰；帕皮 G. Papy (1)，比利时；勒乌斯 A. Revuz (5)，法国；史坦纳 H. Steiner (2)，西德；塞伐斯 W. Servais (6)，比利时；苏朗伊 J. Suranyi (9)，匈牙利。捷克的塞地维 J. Sedivy 未能参加罗瓦尔蒙特会议但提供了与第6章有关的材料。由于各种情况，事实上，许多章的草稿没有完全事先让罗瓦尔蒙特会议参加者知道，少数几章的草稿对会议的结论是不合用的。虽然如此，原稿的最后修改计划在休会前取得了同意，并且把主要的编辑责任委托给费尔先生和格莱曼先生。

根据上述的情况，在阅读本书时，读者们应记住某些局限性。第一，虽然撰稿人作出了决定性的努力，但要在短期内对全世界趋势提出一项正确而包罗万象的考察是困难的，读者可能了解某些完全未被提及的趋势，或者了解可能已构成要加以不同的描述的某些趋势的事实，如果有这样情况的话，请让 Unesco 注意这样的信息。其次，没有人能使自己完全脱离他的职业的和文化的背景，可以理解，根据同样的主要文献得到的东西，另一位撰稿人可能把有关的趋势描述得有些不同。第三，读者应该了解到任一撰稿人没有必要同意本书的全部内容；个别的撰稿人被局限于最初所接触的那专门的某些章，加上在罗瓦尔蒙特会议期间对大部份的章提出评论的机会。最后还要指出，读者不应推断最初负责草拟某章的个人或几个人必须同意其最后的格式；特别是就那些在罗瓦尔蒙特会议以后收到的各章的情况来说，更是如此。Unesco 曾要求编者作重要的修改，以保持各章在篇幅和性质方面合理的同等性。注意到这样一些局限性，Unesco 相信，读者在这本“数学教学中的新趋势”第三卷中会发现：它既是前两卷的有价值的继承者，也是以后在数学和其它科学方面的各卷的正确的先驱。

Unesco 十分感谢所有撰稿人，在相对地短的时期内接到通知后，他们数从事对全世界教育各个方面的趋势作出学术性分析的困难工作。特别要感谢的是费尔先生和格莱曼先生以其小心、速度和能力减轻了编者的重担，坎普 Camp 先生（美国）和富斯 Fuys 先生（美国）在编辑工作的某些方面协助了费尔，最后，勒乌斯 Revuz 先生通过校阅为最后原稿的法文和英文译文之间的完全一致性提供了有价值的服务。

目 录

第1章 小学数学	(1)
I. 在目标和方法方面的趋势	(1)
1. 目标	(1)
2. 方法	(2)
II. 新的内容	(3)
1. 集合	(3)
2. 数	(4)
3. 基本概念	(4)
4. 概率论	(6)
5. 几何学	(6)
III. 新思想的革新	(7)
IV. 教具的例子	(8)
第2章 代 数	(10)
I. 今日的代数：一种对结构的研究	(10)
II. 学校代数教学的趋势	(11)
1. 运算和运算系统	(12)
2. 集合，关系和映射	(14)
3. 结构和同构	(17)
4. 数系的构造	(18)
5. 向量空间结构	(19)
6. 应用	(20)
结 论	(20)
第3章 几 何	(21)
I. 介 绍	(21)
II. 欧氏几何和当代数学	(21)

II.	几何语言和直觉	(21)
IV.	什么是初等的欧氏几何?	(22)
V.	几何教学的目标	(23)
VI.	初等几何和在学校中采用的方案	(24)
VII.	几何教学中的不同的构思	(27)
VIII.	结 论	(30)
第4章 概率论和数理统计		
I.	介 绍	(31)
II.	描述性的数理统计	(32)
III.	在概率论基础方面的近代趋势	(33)
IV.	质朴的概念性的概率	(36)
V.	概率的理論的概念	(39)
VI.	概率论的应用	(43)
	总 结	(45)
第5章 分 析		
I.	普遍的趋势	(46)
II.	分析教学发展中的各种方法	(46)
III.	基本的数学思想	(47)
IV.	基本概念方面近代的初级的介绍	(48)
	A. 连续性和极限	(48)
	B. 微分法	(48)
	C. 积分法	(48)
V.	应用——微分方程	(49)
VI.	瞻望未来	(49)
	总 结	(50)
第6章 逻 辑		
I.	对逻辑方面的教育的需要	(51)
II.	教师们所需要的逻辑	(53)
III.	语言学习的各个阶段	(56)

IV.	逻辑的教学	(58)
A.	集合的逻辑知识的传授	(58)
B.	关系的逻辑知识的传授	(59)
V.	命题逻辑知识的传授	(60)
VI.	命题的——量词化的逻辑	(66)
A.	公理的组织	(66)
B.	演绎法的原则	(66)
C.	语义学和逻辑语法	(69)
D.	从普通的数学语言到形式化的道路	(71)
E.	滥用语言的方法论方面的责任	(71)
F.	结束语	(71)
第7章	数学的应用	(72)
I.	为什么要讲授数学的应用?	(72)
II.	数学应用的趋势	(73)
III.	模 型	(74)
IV.	在讲授数学的应用方面的趋势	(76)
A.	小学(5—12岁)	(76)
B.	在中学阶段的应用(12—18岁)	(77)
V.	应用方面的一些试题	(81)
VI.	展 望	(82)
第8章	数学教学中使用的方法和传播物的趋势	(84)
I.	介 绍	(84)
II.	在普通教育中通常所强调的目标	(84)
III.	在数学教育中通常所强调的目标	(86)
IV.	现今在数学教学中使用的方法方面的趋势	(89)
V.	当前在数学教学中使用的传播物方面的趋势	(94)
VI.	当前趋势的暂定的含意	(99)
A.	对培训教师所包含的意义	(99)
B.	对今后十年的考虑	(100)

第9章 成绩评定	(102)
I. 简介	(102)
II. 评定成绩是为了什么?	(102)
III. 要加以评定的是什么?	(104)
IV. 评定工作应如何进行?	(107)
V. 结 论	(109)
第10章 数学教育方面的研究	(110)
I. 介 绍	(110)
II. 什么是数学教育的研究?	(111)
A. 经验主义者的见解	(111)
B. 直觉主义者的见解	(111)
C. 教师的见解	(112)
III. 最近的研究活动的特点	(113)
IV. 研究的范围	(114)
V. 预测和建议	(117)
结束语	(120)
罗瓦尔蒙讨论会参加者名单	(124)
I. 1974年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
II. 1975年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
III. 1976年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
IV. 1977年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
V. 1978年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
VI. 1979年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
VII. 1980年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
VIII. 1981年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
IX. 1982年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
X. 1983年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XI. 1984年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XII. 1985年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XIII. 1986年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XIV. 1987年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XV. 1988年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XVI. 1989年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XVII. 1990年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XVIII. 1991年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XIX. 1992年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XX. 1993年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXI. 1994年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXII. 1995年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXIII. 1996年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXIV. 1997年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXV. 1998年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXVI. 1999年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXVII. 2000年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXVIII. 2001年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXIX. 2002年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXX. 2003年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXXI. 2004年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXXII. 2005年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXXIII. 2006年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXXIV. 2007年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXXV. 2008年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXXVI. 2009年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXXVII. 2010年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXXVIII. 2011年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XXXIX. 2012年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XL. 2013年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XLI. 2014年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XLII. 2015年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XLIII. 2016年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XLIV. 2017年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XLV. 2018年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XLVI. 2019年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XLVII. 2020年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XLVIII. 2021年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
XLIX. 2022年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)
L. 2023年10月10-12日在巴黎举行的讨论会	(124)

小学 数 学

在过去十年内小学数学的教学已发生了巨大的变化。加进了重要的新内容；主要的变化是在学习目标和教学大纲方面产生的。本章报导在目标、方法和内容方面可辨认出来的趋势，并且提出有关新思想的成功革新的某些建议。

I. 在目标和方法方面的趋势

小学中改进数学教育的问题是极困难的，不仅是因为大纲所面对的学生数量之多，而且也是因为教师的众多和他们的迅速掉换。在某些国家每五年有一半小学教师离职，而被新干这行职业的人代替。小学教育比别的阶段的教育更多地受义务教育制度的影响，因为从各种不同环境来的所有儿童和社会的传统的情况广泛地要求在教育的内容和方法方面存在各种不同的途径。

1. 目标

在我们这个行星上，数以千百万计的一部份居民缺乏数学修养，那就是缺乏有关十进制的整数和有理数基本运算的技能和理解，说明了学校教育的缺乏或者小学水平的教育的失败。由于这种知识在日常生活的各个方面的重要性，无疑地，获得算术计算的技能和理解，以及它在解决日常问题方面的应用仍然是小学数学的初步目标。

过去许多年来，那些负责小学阶段数学教育大纲的人曾希望在单纯的算术教育和算术再加上包括几何与代数，逻辑，以及集合的初等思想方面的教育的数学教育之间作出抉择。有时这种可敬的抉择导致错误地认为新的教育大纲已取消了培养算术的能力这个目标了。没有比这更错误的了。在小学阶段的教育方面的一种确实趋势是：特别注意发展计算方面的才能，并且跟着发展对所使用的计算系统与算法的理解。这个目标已为许多在课堂上实际使用的材料所证实：基齐纳里小棒，迪恩尼斯多基积木，雏型计算机，数字小包，等等……。但是通常计算方面的教育仅限于在十进制计数系统的范围内发展的，这是一种在世界上每一国家的一切商业买卖中和几乎所有的科学的传播中使用的计算系统。

其它的基数，例如为量度时间和角度不能不使用的 60 和 360 并不是作为计算的一种位置系统而提出的，为增进对位置制计算的理解讲授了二进（基数为 2）系统，还有别的基数（例如三，四，五和七），但是不要求懂得在这些系统中的计算。对写成一般记号的分数（ a/b 形式， a 和 b 是整数， b 不等于零）的理解和它的计算，在所有的大纲中，按不同的深度加以讲授。某些大纲把教学局限于小的分数，并且把重

点放在十进小数的表示形式，尽量早地引入。另一些大纲把普通分数作为把物理量扩大或缩小的算子来介绍，并且由于它们是比较简单的，因而在加法和减法运算之前，介绍普通分数的乘法和除法。

在要获得哪些方面的计算技能的态度和有关技能的含义上，没有一致的意见。但是单纯背诵式学习的使用在大多数国家中正在被废弃。因此，通过简单的重复直到计算技能几乎变成了机械的计算这样的学习方式正让路于把数作为某个集合的数量多少的特性来发现，通过把一批物件搭配（映时）把数编序，通过把实物按十来分组建立计算系统，在记忆它们之前先建立运算表，然后使用已扩展了的计算法来发展有意义的高深的算法。在完成这些以后，就通过反对赶进度而强调运用不费力气和合适的实践例子的各种表格，或者通过使用需要运用计算技能的问题的实践发展计算技能。一些教育工作者认为由某些数字（3，4或5）组成的长数的加法和除数是三位或更多位数的长的除法对近代生活中的全体公民仍然是重要的。相反，另一些人感到这些技巧是过时了，并且除非是出于它们在概念上的重要性，否则不应讲授。

在所指出的差异中，对算术的理解和运用仍然是小学阶段数学教育的基本目标之一。但是，趋势是使之失去过去被掩盖着的形式的和教条的特征。在教学上，在用于计算的技术和策略的选择方面留给儿童以更多的自由。这种在教学法方面的变化发挥了儿童去学习计算的强大的推动力并且许多令人厌烦的机械计算的篇幅被认为是需要而被排除了。这种推动力可以通过生活中的某种情况从外面开始，同时通过玩某种充分理解其规则的游戏从内部加以促进。不同的学生反应出不同类型的动力。

除讲授每个人都应懂得的算术外，现在小学也是为学生对中学数学的后继学习作准备。在大多数近代学校课程中，这个目标表现在讲授一些对代数和几何学习来说是基本的概念。因此更多的注意力是放在将数排出次序，作出数字句子，逐步证实某些句子是真的或伪的语句；另外一些句子是其变数的值有待找寻以使它成为真语句的开句，并且在这两种情况中，它们均可表达成等式或不等式。所有这些做法铺平了通向代数方面有才智的学习的道路。（其余例子将在内容那段给出）。在物理对象的学习中，类似的情况铺平了几何方面形式学习的道路。

第三个目标是由于公众的要求产生的，就是对所有儿童的数学修养。这含有为了让所有未来的公民能够在不同的理解程度上阅读和了解数学家们和科学家们正在干什么，算术修养只是他们应拥有的数学知识的一部分。这就要求介绍对要基本了解今天的数学是什么来说十分必要的那些语言和某些符号系统，它也需要在儿童们学习的数学材料中体现代数，几何，和简单的拓扑学思想。

因此，全是在5岁至11岁儿童的智力结构范围内的数学知识，数学思维，以及这些知识和思维的运用已成为小学教育的一个较新的目标。这些目标毫不排斥培养整数和有理数算术能力的目标。

2. 方法

随着目标的改变，在教学方法、学习理论、和供教育用的材料方面也正在产生相应的变化。多数的变化是根据新行为主义，现场或完形学习的心理学理论以及皮阿杰 Piaget 关于认知性学习的阶段发展理论的。新行为主义把重点放在联合的程序学习上。每个儿童在学习一组技巧和概念时可以按他或她本人的步

子前进,所有这些,已作为数学学习中的特别的行为目标,被着力加以研究。这些目标能否达到,是由专门设计的测验来衡量的。当学生通过某项测验后,他就进入下一学习系列。这样的教学方式对教师要求很少,他更多地变成学习的记录者和响导。

学习的完形途径把重点放在发现关系和再构造某种数学的情况。这可以用所谓“多重体现”方法作为例子,按照这种方法,在同一学习阶段,从许多不同的方面或途径呈现同一个数学概念,以便通过逐步的加强和再构造各种结果而形成对概念的更一般的但是是更精确的思维的确切陈述,例如,乘法可以作为一定数量的相同加数之和,作为两个集合的叉积的结果,或者作为把已知量扩大若干倍的算子,……等等而呈现,所以这些导致一般的二元运算

$a \times b = c$, 当 $f: (a, b) \longrightarrow c$ 或 $(a, b) \xrightarrow{x} c$ 这种学习方法的其它方面将在第8章提出。

在大多数新大纲中已出现“理解”这个字眼。但是它表示什么是依赖于人们所采用的学习理论的。皮阿杰关于所有儿童从出生直到智力成熟所明显经历的学习阶段的研究曾得到一批研究者的支持,但由于他缺乏科学的证据而仍被另一些人批评。这些阶段是:(a)从出生到四岁或五岁的前概念阶段,这时儿童让他的动作适应环境并把语言和对象及动作联结在一起。(b)五岁到八岁的直觉阶段,此时儿童常常使用“因为”这个字眼进行他最初的简单推理。这里思维是单行的和外部的,那就是说,学习是通过使用图画和实物来完成的。主要是用我做和我理解来形容它。(c)八岁到十二岁或十三岁的具体的一运算性的阶段,这时小学中的儿童可以领会对数学的最早的理解,各种的含义,概念和结构。儿童开始把直觉阶段的物理行为和运算(理智地)加以内部化。(d)十二岁或十三岁以上形式运算的阶段,这时成年人采用的学习过程是使用象估计,评价,形成假设,一般化,演绎和证明这样一些程序的。

许多改革课程的人正在利用这些阶段来安排学习计划,以便有可能为某特定的年龄的儿童所理解。

在某些国家中,运用实验室的方法很受欢迎。那是把课室或者隔壁的一间房间用各种方式的装置装备起来,以提供学生用来“发现数学”的数学环境。有一种被称为学习站的单人学习间,在那里儿童可以单独干他的工作。下列各种材料是有成效的:电子装置,绘图设备和必需品,量测工具,模型,几何板,属性积木,供活动用的卡片,挂图,唱片,书籍和你所提出的东西。儿童们可以按预定的安排分成小组进行工作。他们可以使用体操室或户外去干他们的某些工作。不用说,在把这项工作引导到成功的智力成就中教师必需特别有才能。

II. 新的内容

1. 集合

所有近代的改革大纲已把集合的学习引进数学教育中。这个课题也许是小学数学教学中现行变化的一个最明显的特征。在某些情况下,这方面的学习曾被过份地强调和搞得过于形式,使人对打算进行的改革产生不正确的印象。在使用它们的深度、重要性以及正确的呈现方面,各种设计有很大的不同。但是所有

的情况都是仅使用十分质朴的集合概念和集合关系。集合的思想是从集合性概念的常识中脱胎出来的。集合运算的思想，首先是通过象维恩 Venn 氏图解那样的会意文字，和通过日常语言的基础词汇的措辞，用简单语言进行翻译加以引入的。经过若干年后，随着较多的使用，在不同程度上讲授其符号。不论怎样，在其中常常包含有 $\cap$, $\cup$, $\subset$, $\in$ 。有些大纲也使用 $\setminus$ 表示差。

集合图解提供了许多让儿童随意描绘的练习，并且构成学习拓扑学之前的一种准备。在随后的数学教育中，集合的使用各国有很大的差别。但是存在着一种普遍的趋势，即：运用集合去发展基数或自然数的概念，以及自然数的四种有理运算。被经常运用的维恩氏图解是物质化的，这是通过小绳或铁环，附带有被当作元素而放在内部的具体物件。同样地，这种技术被运用于逻辑积木来开始最初的逻辑学习。但是上面所讲的远未穷尽集合的应用，我们可以提到它们在概率论和在讨论几何图象的方式方面的使用。这里的目的是不是放弃古典的对空间的直观的视觉性学习，而是使用图象的表征来丰富各种方法，在这些方法中直觉的几何视觉可以形成后来的逻辑结构的基础。

在不同程度上，集合被用来发展数学语言的准确运用和逻辑连接词的正确用法。因此，“一个”，“一个和仅仅一个”，“一些”，“各”，“每”，“所有”，“不”，“不小于”，“不多于”等字眼的使用是通过那些收集各种物件来组成集合的有关部分加以明确的。通过考虑几个集合，或子集，使逻辑连接词和，或，蕴涵，若……则，以及当且仅当表现出了具体的运算意义。即使在实际教学中避免明显地论及这些术语，但仍使教师注意到它们从而使数学语言和直觉尽可能地具体。

2. 数

小学中讲授的数值概念已被用一些方法加以充实。在许多国家中通常是从读出温度和玩输赢点数的游戏开始介绍负数（一般仅是负整数）。通过把数轴扩展到左边而把这些数加以编序。在讲授分数后，负有理数可放置在数轴上。在少数情况中，曾试图通过逐步把有理数编序和利用锥型计算机讲授实数有序体。

在一些新的小学大纲中，模算术被连系着计算的不同的基数而加以讲授。用时钟来发展对模12的剩余类，即当被12除时有相同的余数的数集。剩余类本身被看成是可进行运算的数学对象。这些运算的学习引出体的一切性质，但是不使用“体”这个字眼。

正在把“最小公倍数”和“最大公约数”的思想看成是可交换和可结合的二元运算。传统的在分数运算的结果中应用它们这样一些机械的方法已被取代，而把它们作为数的理论来考虑，那就是，它们本身就是运算。因此两个数的倍数集合的交集产生具有最小公倍数的集合。两个数的因数集合的交集产生具有最大公约数的集合。于是可发展偶数，奇数，质数和平方数的许多有趣性质。

3. 基本概念

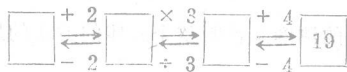
在小学教育中正在出现箭头图，甚至是使用多种颜色的箭头图。这些图是用来建立作为随后更为形式

的数学学习的基础的那些数学关系，或用来具体体现各种关系的直观容貌。采用颜色使得有可能同时介绍各种关系并且使某些关系从整个图解中突出出来。

当代数学的基本要素是集合和关系。重要的关系是等价性，分类，函数，一一对应，完全映射和序的关系。所有这些概念，在小学数学中正在加以介绍，虽然不一定提出那些名称。顺序符号 $<$ ， $\leq$ ， $>$ ， $\geq$ ， $=$ 现在已是所有儿童的知识的一部分。符号 $=$ 有时被用来表达下述情况：不管在左边和右边的是什么，它们都是同一对象的同义语和名称。映射被用来把自然数编序。运算是或早或迟地通过一切数的数偶集到数集上的映射而被赋予函数的外貌。符号

$(3; 4) \xrightarrow{+} 7$ ； $(5; 2) \xrightarrow{-} 3$ ； $(5; 2) \xrightarrow{\times} 10$ ； $(16; 4) \xrightarrow{+} 4$ 给出了孕育运算的新途径。把 $*$ 作为算子来使用，例如，“ $+5$ 表示加5”，“ $\div 3$ 表示被3除”给予初等运算的性质较广的前景。按这样的途径减法也可看成是加法的一种特殊的形式。图象，树枝，和格子可用来表现一个数的倍数或因数。

开句和语句（表达式）正作为学习代数之前的学习而出现。某些大纲用 $\square$ 或 $\bigcirc$ 表示变数并称它为“空位”。另一些大纲用文字符号， n 或 x ，来开始，并称它为可代换的符号。然后用这种符号书写文字题的线性方程，方程和问题也用图解来表达，譬如象



它表示解方程

$$(x+2) \cdot 3 + 4 = 19$$

很早就用大写字母表示集合和用小写字母表示集合的元素。机器图解也被用来解释运算和用来解简单的问题。一架“输入—输出”或有几个输入的机器还能提供创造新运算的机会。例如，“如果机器按下表那样工作，猜猜我（指函数）是什么？”的游戏：

输入	1	2	3	4
输出	1	3	5	7

产生 $x \longrightarrow 2x-1$

在不同的程度上，让学生引出一个运算系统或一个群的基本性质，同时直观地用来去学习新的事实或概念和认识有序的结构。因此，在数学语言方面具有十分精确的叙述的可交换律和可结合律，帮助儿童们学习带或不带括号的运算的顺序规则和基本的运算事实。为了表达： $a+b=b+a$ ，或 $a-b \neq b-a$ ； $a+b-c=a+(b-c)$ ，但 $a-b-c \neq a-(b-c)$ 等等儿童们补充各种的情况。因此儿童们获得检验某种性质是否可能用于所考虑的问题中的习惯，甚至当群的思想尚未被明显地引入之前就可以告诉儿童许多群的例子，要求他们去寻找么元和逆元。这种方式使学生进入中学的数学学习时，不至于象到了一块陌生的新大陆，而是象到了一块早已探索过的地方。

4. 概率论

在传统的小学算术中，应用是局限于有关商店和家庭算术方面的简单问题。但是概率论是以许多不同的方法进入每个儿童的事务中——玩游戏，期待星期六的好天气，或准时上学。当儿童说“可能”，“也许”，“似乎不”，“肯定地”，“我的运气怎样”，和类似的话时就存在概率论了。在小学学习中现在有一种实际的趋势是使这些话具有数值的并且用不同于习惯上使用数字的方法来解释的意义。因此6根棒的 $\frac{1}{2}$ 恰恰是3根棒，但是6次抛掷钱币中会有3次是人头向上的概率 $\frac{1}{2}$ 意味着完全不同的东西。

在小学新的大纲仅和经验的背景有关，那就是，研究在游戏中，在大自然中，和在日常生活中展现出来的那些统计规律性。首先从进行猜测和纪录产生经验。通过比值或相对频数的形成，儿童们学习如何用数字来表达所期望的结果，学习概率论的活动把学生卷进到自己作调查，形成假设和检验，一切有价值的数学活动中。它也能使他们在—项单独的调查中运用所有他们以前学习过的数学知识。

当学习继续向前推进时，就介绍骰子，钱币，从丝袋中抽出纸牌或小珠子，或在—张方格纸上选择路径的游戏。所有这些活动引向组合论（在这个学习阶段不这样称呼）。因此概率论的先验的和后验的容貌将同时引导出在后继学习中被发展的概率论的基本性质。

统计数据的收集和它的图象表征也是新大纲中和学校的科学学习连系在一起而完成的一部分。这种学习的目的是使学生明白抽样和关于在一定范围内可以用样本的测度来推断整个总体的方法的思想。在初等数学中，这种趋势是新的，有很大的社会价值，并且显得增长很快。

5. 几何学

在小学数学教育的近代大纲中，几何起着越来越重要的和新的作用。它舍弃了过去那种把度量作为几何教育的唯一大纲的孤独面貌。今天，它包含着从—系列的观点——拓扑学的，物理的，变换的和简单的向量的方面——对空间进行确实的研究。但是度量方面不是被舍弃了，而是照它的用途发展，以便成为以后学习的背景。最初是使用各种经过选择的单位来发展度量的概念。这样儿童们学会了如果单位不同，—已知量（例如长度）的度量将是不同的但是量的总额—样的。度量也导向近似的理论，跟着就导致对逐步缩小的区间的度量。这是后面实数和连续性学习的基础。

某些拓扑概念是联系开径和闭径，区域的分割，普通的多面体的顶点，边和面等等加以介绍，所有这些都通过视觉的和物理的程序的。

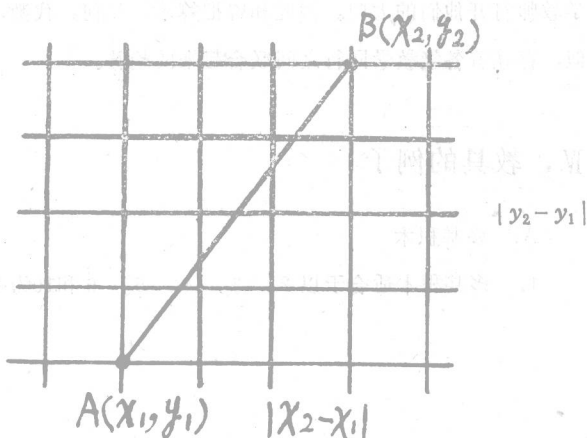
最新的，现在几乎被所有国家提出的是运动或变换几何的介绍。主要的思想是那些用镜画和用直尺圆规，无刻度的尺，和有平行直边的尺的把—个平面映射到它自己上面的作图。这种学习也导致对称性的学习，即通过反射，旋转或平移映射到自身的图象的学习。准确的数学语言的使用是不必要的，而是用弹击，推开，和旋转来表达基本的思想。首先通过考察墙壁花纸，卷纸，宝石和用摺，切或用透明纸模写等其它设计来强调运动和变换。以后用 $A \rightarrow A'$ ， $B \rightarrow B'$ 等等来表达对应点，从而可用函数的思想来代替运动。重复性图案的作图增加了这种学习的兴趣。

在小学的较高年级曾有过介绍向量的试验，首先通过使用有平行直边的尺来作平行的移动（以后通过行或列（矩阵），数偶或三元数组引向简单的变换群）。但这不是普遍实践的。

直角坐标几何的学习，通常局限在简单图象的作图中的度量方面和距离的度量。象“出租汽车距离” $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ 那样的拓扑距离（一辆出租汽车从A点到B点的距离）是与AB的长度距离

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

相对立的，它能帮助儿童们对解答问题方面大开眼界。



Ⅲ. 新思想的革新

有了新的内容，新的目标以及新的方法和材料，大纲仍可能在一个教条的或不理解“新数”的目的和性质的教师手中失败。幸运地，全世界小学教师们在学习新的内容和使他们自己适应新的教育学方法方面已表现出日益增长的兴趣和努力。为了帮助这些教师，有一种实际趋势是在小学数学中提供专家，这些专家具有良好的数学背景，并且在近代的教学方法中已证实是有才能的。这些教师或是监督某区域或地区的数学大纲的执行情况，或是担任只以讲授数学作为其全部任务的专家角色。

另一有益的趋势是出版供教师在课堂上用的书籍。这些出版物有几种类型：（1）详细描述班级中的实验的书籍。例如：英国纳菲尔德设计小组 Nuffield Project 出版的书，比利时中心弗雷德里克帕皮出版的书，和格莱曼的书，O. C. D. L. GALION 的和法国阿蒂埃 Hatier 的 GARRON 的书。（2）供教师用的有关数学背景的书籍，适合作为在职进修的教程。（3）有关小学数学统一化内容的讲授和方法论的书籍。（4）供教师阅读的期刊。这类出版物例如有：美国数学教师全国协会的算术教师。英国数学协会从 1972 年开始出版的学校数学。比利时数学教育中心的 NICO 的专刊。

必须把新大纲及它们的明显目标告诉父母们。许多国家的父母们埋怨说，在新数方面他们无法帮助他们的孩子们。这当然是因为他们误认为替儿童们做家庭作业就是帮助儿童，并且误认为儿童们在学校学习的那些死记硬背的算术就是学校中应教的数学。因此重点不应过多地放在新的内容（虽然确是存在有新数）而是放在学习，专注，活动，做，理解，发现，意图，等等新的过程上。这就要求儿童必须在教师的引导下进行他自己的学习。如果向父母们指出被讲授的一些更实际的东西并且少带些高深的古怪语言那么他们是更有可能被说服接受那些编写学校数学大纲的人的意见的。

最后必须提到的一个最重要的趋势是：传统上只关心大学和研究数学的学院数学教授和数学协会向小