

學何幾影投

郭善潮譯

39
2

商務印書館發行

學何幾何影投

milen, w. p.

郭善潮譯

商務印書館發行

中華
中華民國

四年一月初版
年九月國難後第一版

本書或去售價二分
(四七五)

何學

Geometry

每

大洋伍
加運費匯費

W. T. D

著

石

郭

善

潮

譯

老

發

刷

者兼

商

印

館

發

行

所

商

務

印

書

館

上海及各埠

有權
必究

索引

Angular Point, 角點,	110	Consecutive Generating Lines,	
Aspect, 投影位置,	27	接基線,	66
Asymptote, 漸近線,	28	Consecutive Generating Points,	
Auxiliary Circle, 輔助圓, ...	81	接基點,	66
Axis of Perspective, 配景軸, ...	10	Constant, 常數,	23
Base-Circle, 原圓,	78	Constant Angle, 定角,	37
Base-conic of Reciprocation, 反		Constant Ratio, 常比值,	110
極原圓錐曲線,	65	Co-ordinate, 坐標,	24
Brianchon, 布立安深,	109	Coplanar Lines, 共面線,	4
Centre of Inversion, 轉倒中心,	81	Corresponding Vertices, 對應	
Centre of Perspective, 配景		頂點,	9
中心,	10	Couple of Points, 偶點,	74
Centroid, 重心,	9, 119	Cross-Ratios of Four Collinear	
Ceva, 塞凡,	8	Points, 四共線點之複比, ...	3
Circular Point, 圓點,	30	Degenerate Conics, 變形圓錐曲	
Circular Points at Infinity, 無		線,	74
窮遠圓點,	27	Degenerate Point-Conic, 變形	
Coaxial Circles, 同軸圓,	25	點圓錐曲線,	104
Coaxial System, 同軸圓組, ...	25, 114	Derived Figure, 導出圖形, ...	78
Common Centre, 公中心,	28	Desargues, 戴沙克,	101
Complete Quadrangle, 完全四		Diagonal Triangle, 對角三角形,	14
角形,	12	Director Circle, 標圓,	79
Complete Quadrilateral, 完全四		Directrix, 準線,	29
邊形,	14	Double Contact, 複切,	74
Concavity, 凹向,	87	Eccentricity, 離心率,	31
Concentric Circles, 同心圓, ...	28	Eleven-Point-Conic 十一點圓錐	
Concyclic Points, 共圓點,	30	曲線,	113
Conic Sections, 圓錐曲線,	21	Ellipse, 橢圓,	28
Conic-Envelope, 圓錐色形,	111	Envelope, 色成,	42
Conic-Loci, 圓錐形軌跡,	74	Equal Angles, 等角,	30
Conics, 圓錐曲線,	21	Escribed Circle, 傍切之角形, ...	35
F-conic, F-圓錐曲線,	112	Euclid, 歐几里得,	1
Φ -conic, Φ -圓錐曲線,	110	Exclusive Property, 獨有性質,	24
Conjugate Diameter, 共軛直徑,	46	Extremity, 端點,	46
Conjugate Imaginary, 共軛虛		Finite Part, 有限部分,	7
點,	24	Focal Chord, 焦弦,	29
Conjugate Lines, 共軛線,	23	Focus, 焦點,	20

Form, 法式,	33	Orthocentre, 垂心,	
Four Concurrent Lines, 四共點線,	3	Orthogonal, 直交,	
Four-line System of Conics, 四線圓錐曲線組,	74	Orthogonal Projection, 正投影,	
Four-point System of Conics, 四點圓錐曲線組,	74	Parabola, 拋物線,	
Fregier, 紹來奇,	40	Pascal, 巴斯卡,	
Fundamental Transformation, 根本形變,	78	Pedal Triangle, 垂足三角形,	
Generating Element, 基原素,	67	Pencil of Lines, 束線,	
Generating Lines in Common, 公基線,	72	Perspective, 配景,	
Generating Points in Common, 公基點,	72	Playfair, 巴魯,	
Group, 羣,	12	Point-circle, 點圓,	
Hexagon, 六角形,	109	Point-to-point, 點與點,	
Harmonic Conjugate, 調和共軛點,	4	Polar, 極線,	
Harmonic Division, 調和分法,	4	Polar Circle, 極線圓,	
Harmonic Property, 調和性質,	13	Polar Line, 極線,	
Harmonic Triangle, 調和三角形,	13	Pole, 極點,	
Infinitesimal, 無限小,	115	Principal Axis, 主軸,	
Infinitesimal Circle, 無限小圓,	116	Principle of Continuity, 連續原理,	
Inscribed Circle, 內切圓,	35	Principle of Duality, 雙關原理,	
Inscribed Triangle, 內接三角形,	37	Projective Transformation, 投影變換法,	
Internal Limiting Point, 外極限點,	127	Pure Geometry, 純正幾何,	
Invariant, 不變性,	105	Radical Axis, 根軸,	
Inverse, 倒形,	81	Radii Vectors, 動徑,	
Law, 定律,	71	Radius of Inversion, 轉倒半徑,	
Limit, 極限值,	10	Range of Points, 列點,	
Limiting Point, 極限點,	25	Reciprocal Figure, 反極圖形,	
Line at Infinity, 無窮遠線,	5	Reciprocal, 反極法,	
Locus, 軌跡,	22	Rectangular Hyperbola, 正雙曲線,	
Metrical, 可度的,	41	Right Circular Cone, 正直圓錐,	
Minor Axis, 短軸,	45	Ruler, 界尺,	
Nine-point Circle, 九點圓,	113	Salmon, 薩爾門,	
Normal, 法線,	40	Self-conjugate Triangle, 自共軛三角形,	
Notation, 記法,	1	Semi-diameter, 半直徑,	
Opposite Vertex, 對頂點,	73	Series of Conics, 圓錐曲線系,	
		Similar and Similarly Situated Triangle, 相似且在相似位置之三角形,	
		Single Infinite System, 單一無限組,	

Symmetry, 對稱原理,	50	Transversals, 截綫,	4
System of Coaxial Circles, 同軸圓組,	84	Transverse Axis, 橫軸,	124
System of Confocal Conics, 同焦圓錐曲綫組,	84	Triangles in Perspective, 配景三角形,	10
Third Degree, 三次,	127	Type, 形式,	39
Transformation, 形變,	68	Variable Point, 不定點,	15
		Vertex of Projection, 投影頂點,	9

學何幾影投

目錄

第一章

直線

§ 1.	投影幾何	1
§ 2.	記法	1
§ 3.	投影法	1
§ 4.	圖形之投影	2
§ 5.	直線之投影	2
§ 6.	複比	3
§ 7.	複比不因投影而變	4
§ 8.	在已知平面內之無窮遠線	5
§ 9.	投一線爲無窮遠線之法	6
§ 10.	第九節之詳述	7
§ 11.	例題	8
§ 12.	比與複比之關係	10
§ 13.	四共線點之複比	11
§ 4.	完全四角形之性質	12
§ 15.	完全四邊形之性質	14
§ 6.	投影圖形之畫法	14

習 題 I	14
-------	----

第 二 章

圓 錐 曲 線

§ 1. 正直圓錐體之截形	21
§ 2. 圓錐曲線之投影	23
§ 3. 共軛虛點	24
§ 4. 極限點與調和分割之關係	24
§ 5. 線與圓之交點	26
§ 6. 圓與無窮遠線之交點	26
§ 7. 諸圓截無窮遠線於相同二點	26
§ 8. 無窮遠圓點	27
§ 9. 無窮遠圓點爲共軛虛點	27
§ 10. 投影幾何關於測度的性質之說明	27
§ 11. 垂線之投影位置	27
§ 12. 漸近線之投影位置	28
§ 13. 正雙曲線之投影位置	28
§ 14. 同心圓之投影位置	28
§ 15. 橢圓雙曲線及拋物線之投影位置	28
§ 16. 焦點之投影位置	29
§ 17. 圓錐曲線四焦點之投影位置	29

§ 18. 相等角之投影位置	30
§ 19. 投二點爲無窮遠圓點之法	31
§ 20. 投影頂點爲虛點時之投影	34
§ 21. 連續原理	34
§ 22. 投影圖形之實用畫法	35
§ 23. 例題(例 10 爲忽來奇定理)	35
§ 24. 由投影法而推廣定理	41
§ 25. 例題	41
§ 26. 投爲雙曲線拋物線等之法	43
§ 27. 正投影	43
§ 28. 直線之正投影	44
§ 29. 平行線之正投影	45
§ 30. 平行線之比之正投影	45
§ 31. 投橢圓爲圓之正投影	45
§ 32. 投雙曲線爲正雙曲線之正投影	47
§ 33. 無窮遠線之正投影	47
§ 34. 漸近線之正投影	47
§ 35. 橢圓, 雙曲線, 拋物線之正投影	48
§ 36. 投線爲垂線之正投影	48
§ 37. 例題	49
§ 38. 投共軛虛點爲無窮遠圓點之正投影	51
習 題 II	51

第 三 章

反 極 法 雙 關 原 理

§ 1.	反極法	65
§ 2.	記法	65
§ 3.	反極法之順序	65
§ 4.	視爲軌跡之曲線與視爲包形之曲線之區別	65
§ 5.	視爲軌跡之線與視爲包形之線之區別	66
§ 6.	點與直線之反極法	66
§ 7.	點與直線之反極法	67
§ 8.	三共線點與三共點線之反極形	67
§ 9.	四共線點與四共點線之反極形	67
§ 10.	雙關原理	68
§ 11.	例題	68
§ 12.	已知曲線之反極法	71
§ 13.	已知曲線之反極形之性質	71
§ 14.	極點與極線之反極形	72
§ 15.	二曲線交點之反極形	73
§ 16.	二互切圓錐曲線之反極形	74
§ 17.	變形圓錐曲線	74
§ 18.	例題	75
§ 19.	對於圓之反極法	77

§ 20	對於圓之反極法有關之根本變換法	78
§ 21.	反圓錐曲線爲圓之反極法	80
§ 22.	反圓爲圓錐曲線之反極法	81
§ 23.	如何則得反極形爲橢圓,雙曲線,拋物線	82
§ 24.	例題	84
§ 25.	近世幾何學之二重要定理	87
§ 26.	撮要	88
	習 題 III	88

第 四 章

圓錐曲線之普通性質

§ 1.	緒論及記法	97
§ 2.	二垂直平分線之投影性質	97
§ 3.	圓錐曲線四定切線之複比	98
§ 4.	四點圓錐曲線組	99
§ 5.	同軸圓之投影位置	99
§ 6.	四線圓錐曲線組	100
§ 7.	同焦圓錐曲線之投影位置	100
§ 8.	<u>戴沙克</u> 定理	100
§ 9.	二正雙曲線之四交點	101
§ 10.	由二點至圓錐曲線之切線之切點定理	103
§ 11.	由垂心至內切拋物線之切線互相垂直	103

§ 12. 不變性之幾何的說明.....	104
§ 13. 對於圓錐曲線之互極三角形	106
§ 14. <u>巴斯克</u> 定理.....	108
§ 15. <u>布立安深</u> 定理	109
§ 16. 內切四角形與內切四邊形, 外切四角形與外切四邊形	110
§ 17. F 圓錐曲線.....	110
§ 18. Φ -圓錐曲線.....	112
§ 19. 四點圓錐曲線組之性質	112
§ 20. 四線圓錐曲線組之性質	114
§ 21. 內切於一圓錐曲線且外切於他圓錐曲線之四邊形.....	117
習 題 IV	117
索 引	

學何幾影投

第一章 直線

§1. 投影幾何

投影幾何之目的在論及初等幾何的性質,不因投影法而改變者.投影法於§3述之.

由投影法,歐几里得 (*Euclid*) 初等幾何之若干性質(例如圓),即可引入高等幾何(例如圓錐曲線);反之,凡圓錐曲線之普通定理,於投影後亦可以初等幾何之法證明之.

§2. 記法 (*Notation*)

凡點以羅馬大楷字母 A, B, C 等表之.

凡線以羅馬小楷字母 a, b, c 等表之.

凡平面以希臘字母 α, β, γ 等表之.

AB 表示聯結 A, B 二點之直線.

ab 表示 a, b 二線之交點.

Aa 表示含 A 點及 a 線之平面.

§3. 投影法

設 π, π' 爲已定二平面, O 爲定點, P 爲 π 平面內任一點.聯 OP , 交 π' 平面於 P' 點, 則 P' 點稱爲在 π'

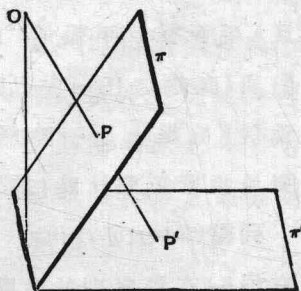


圖 1.

平面內對於投影頂點(Vertex of Projection) O 之 P 點投影。

系 I. P 爲在 π 平面內之 P' 點投影。

系 II. π, π' 二平面交線上任一點之投影, 仍爲該原點。

蓋由圖 1 知 A 與 A' 二點顯然相合。

§4. 圖形之投影

在 π 平面內圖形之各點, 若對於投影頂點 O 而投於 π' 平面內, 則得一新圖形。

π' 平面內之圖形稱爲在 π 平面內之圖形對於投影頂點 O 之投影。

此圖形表示高等幾何學中之曲線 (特殊圖形), 以 O 爲投影頂點, 由 π 平面投於 π' 平面 (或互相更迭) 者。

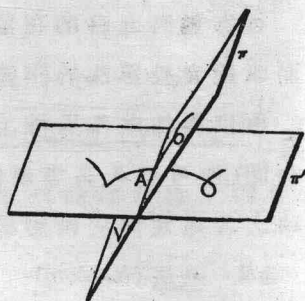


圖 2.

§5. 直線之投影爲直線

設 l 爲 π 平面內之已知直線, 經過 O 點與 l 直線作平面 λ ; 且 λ 平面截 π' 平面於 l' 直線。聯結 O 點與 l 直線之任一點 P , 則 OP 截 π' 平面於 l' 直線上之一點 P' 。故 l' 直線爲對於投影頂點 O 時 l 線之投影。

列點 (Range of Points) 設諸點皆在同一直線者, 則此諸點稱爲列點。

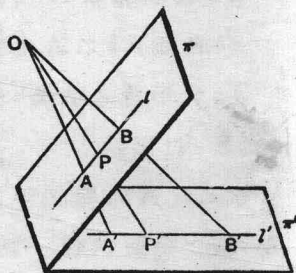


圖 3.

系 列點之投影爲列點。

系II. 相交二直線之投影爲相交二直線。

畫在 π 平面內任意二曲線交點之投影;爲 π' 平面內二投影曲線之交點。

束線(Pencil of Lines) 設諸線皆在同一平面,且通過同一點者,則此諸線稱爲束線。

系III. 束線之投影爲束線。

§6. 茲述下列數命題,以備後用。

四共線點之複比(Cross-ratio of Four Collinear Points). 設

P, Q, R, S 爲四共線點,其複比 $\frac{PQ \cdot RS}{PS \cdot RQ}$ 恆以 $[PQRS]$ 表之;惟

照慣例,則兼取其各已知線之各線分之符號。

上述複比之定義,其字母之次序照下法記之頗便。

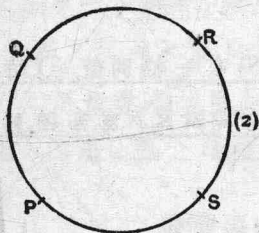


圖 4.

設 P, Q, R, S 四點之次序如圖 4 (1) 所示。今排此四點於一圓周上如圖 4 (2)。由同字母起,字母之次序照順鐘向書之,則得複比之分子;若照逆鐘向書之,則得複比之分母。

四共點線(Four Concurrent Lines)之束線之複比。若二截

線(Transversals)截相交於O點之四共面線(Coplanar Line)OA, OB, OC, OD, 於P, Q, R, S及P', Q', R', S', 則 $[PQRS] = [P'Q'R'S']$, 即諸截線截四直線之束線, 皆成相同之複比

四共點線束線之複比, 以其射線(Ray)間之角表示之, 若一截線截相交於O點之四共面線OA, OB, OC, OD於A, B, C, D, 則複比 $[ABCD] = \frac{\sin AOB \sin COD}{\sin AOD \sin COB}$; 照慣例, 則兼取已知角AOD之各線分之符號。

在二束線射線間之對應角若各各相等, 則此二束線之複比相等。設OA, OB, OC, OD與O'A', O'B', O'C', O'D'為二束線之射線, 且 $\angle AOB = \angle A'O'B'$, $\angle COD = \angle C'O'D'$, $\angle AOD = \angle A'O'D'$, $\angle COB = \angle C'O'B'$; 則由上節明知複比 $O[ABCD] = O'[A'B'C'D']$ 。

調和分法(Harmonic Division)。設P, Q, R, S為一直線上



圖 5.

之四點, 且 $\frac{PR}{RQ} + \frac{PS}{SQ} = 0$, 即 $[PRQS]$ 有一特別值-1時, 則稱P, Q二點為R, S二點所調和分, 而P, Q就R, S言, 亦稱為調和共軛點(Harmonic Conjugate)。

§7 四共線點之複比, 不因投影而變

設O為投影頂點, l為 π 平面內之直線, λ 平面經過O點與l直線, 且交 π 平面於l'直線, 又l'上A', B', C', D'各為l上A, B,

C, D 四點之投影(第一章 § 5).

則由 § 6. 知 $[ABCD] = [A'B'C'D']$, 即得題證.

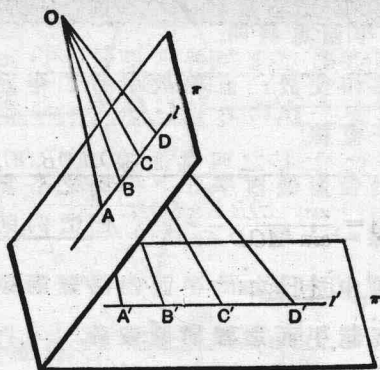


圖 6.

§ 8. 在已知平面內之無窮遠線(*Line at Infinity*)

設有 O 點與不過 O 點之直線 p , 而 O 與 p 不全在無窮遠處; 又 P 為 p 上之一點. 將 P 點在 p 上漸動至無窮遠處, 則 OP 直線漸與 p 直線平行. 故 P 在 p 上至無窮遠處, 則 $OP \parallel p$.

但過 O 點與 p 平行, 僅能作一直線. 故在投影幾何學, 若 p 不全在無窮遠處, 則 p 僅含一無窮遠點. 又設有一點 O , 與不過 O 點之平面 π , 而 O 與 π 不全在無窮遠處. 由巴費氏 (*Playfair*) 平行說之公理, 證明過 O 點與 π 平行, 僅能作一平面 λ . 在 λ 內過 O 點之諸直線, 由初等幾何亦易證明其與 π 平行.

設 P 為 π 平面內一點. 當 P 在 π 面漸動至無窮遠, 則 OP 直線漸與 π 平行. 故 P 在 π 面至無窮遠處, OP 平行於 π .