京师 数学教育丛书

现代数学与中学数学

（第2版）

XIANDAISHUXUE
YUZHONGXUESHUXUE

张英伯　曹一鸣　丛书主编
高　夯　编　著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

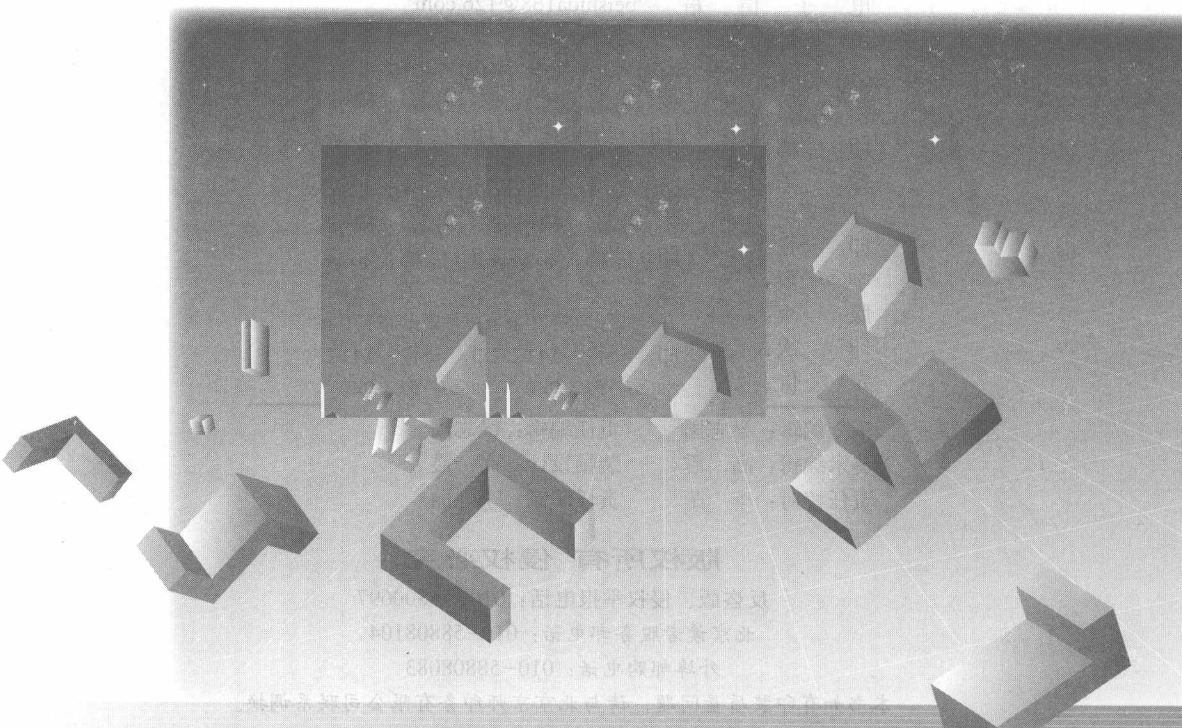
数学教育丛书

现代数学与中学数学

（第2版）

XIANDAISHUXUE YUZHONGXUESHUXUE

张英伯　曹一鸣　丛书主编
高　夯　编　著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代数学与中学数学（第2版）／高夯编著．—北京：北京师范大学出版社，2010.1
（数学教育丛书／张英伯，曹一鸣主编）
ISBN 978-7-303-10631-8

Ⅰ．现…　Ⅱ．高…　Ⅲ．数学课－教学研究－中学
Ⅳ．G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第195261号

营销中心电话　010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：14.75
字　　数：249千字
版　　次：2010年1月第2版
印　　次：2010年1月第1次印刷
定　　价：24.00元

策划编辑：梁志国　　责任编辑：梁志国
美术编辑：高　霞　　装帧设计：高　霞
责任校对：李　菡　　责任印制：李　丽

数学教育丛书

顾　　问：徐利治　张景中　张奠宙

主　　编：张英伯　曹一鸣

丛书编委会（按姓氏笔画为序）

马云鹏　王光明　孔凡哲　宁连华

代　钦　宋乃庆　张奠宙　张英伯

张春莉　张景中　张生春　松宫哲夫

涂荣豹　高　夯　徐利治　黄秦安

曹一鸣　喻　平

总 序

成为一名优秀的数学教师，是每一位有责任心和事业心的数学教师的神圣使命。推动中国数学教育实践的良性发展，提高中国数学教育的质量，是每一位中国数学教育工作者的匹夫之责。

数学教育是数学的教育，数学教师需要有良好的数学素养。20世纪后半叶及21世纪初科学技术的迅猛发展，对大、中、小学数学教育提出了越来越高的要求，数学课程改革需要不断应对时代的挑战。将一些现代数学的内容以及思想方法(譬如，微积分、向量、算法、编码、统计、群等)引进中学数学课程，已是大势所趋。相比以往，正在实施中的数学新课程，内容变化较大，许多选修课的内容甚至连教师都没有学过。现在的课程内容涉及的知识面广，难以全面掌握、深刻理解，使得广大的中学数学教师正面临着前所未有的危机与挑战。

教师是一个专门的职业，作为一位优秀的数学教师需要有良好的数学教育素养。面对时代的要求，面对新的教学理论、教育技术，如何处理传统与现代的关系，改进教学方式，让学生主动参与教学，减轻学生过重的数学学习负担，提高数学教学效率，促进学生长远发展，这些都需要教师对数学教育理论进行系统的学习与研究。

全国高等师范院校数学教育类课程与教材建设正在进行之中。近年来的全国高等师范院校数学教育研究会特别将“数学教育专业课程建设”以及“研究生培养”作为重点专题来研究。2005年全国高等师范院校数学教育研究会常务

理事会期间，部分专家提出目前没有合适的、系统的数学教育本科、研究生(特别是教育硕士)教材。2006年全国高等师范院校数学教育研究会议再次提出这一问题。会议期间几位热心的学者着手策划此事，从而诞生了本套丛书。该套丛书得到了许多著名数学家以及数学教育家的鼎力支持。张景中院士、徐利治教授、张奠宙教授欣然答应担任丛书顾问，并承担丛书的编写工作。他们身体力行，为建设中国数学教育大业，提高数学教育类教材水平鞠躬尽瘁。他们严谨治学的态度深深地影响着参与丛书编写工作的各位同仁。各位编委(分册主编)齐心协力，充分利用参与国内外学术交流的机会，探讨交流、出谋划策，经过大家的共同努力，初步确定了这一套书的总体框架，也彰显了国内数学教育同仁的强烈责任心和神圣使命感。

北京师范大学出版社大力支持我国的数学教育类课程与教材建设，理科编辑室梁志国主任精心运作，将"丛书"纳入出版计划，体现了北京师范大学出版社服务于教育事业的使命感。

这套丛书共12本，构成一个整体，基于数学，紧密联系数学教学实践，各有侧重：一类加深对数学素养的提升，如《数学哲学》《数学方法论选读》《现代数学通览》《现代数学与中学数学》(第2版)；另一类则注重于提升数学教育理论与研究水平，如《数学教育原理——哲学、文化与社会的视角》《数学课程导论》《数学教学论》《数学教学心理学》《数学教育测量与评价》《数学教育研究方法与论文写作》《数学教育史》《数学教学案例研究》。

但愿该套丛书的出版能够为有志于系统研习数学教育理论，全面提高数学及数学教学、科研水平的中小学教师、教研员、本科生、研究生提供有效的帮助。

数学教育丛书编委会

2009年7月

第二版序言

本书是在《高观点下的中学数学——分析学》(第一版)的基础上修订而成的。此次修订,作者保留了原书的基本框架,并参照普通高中数学课程标准,增添了部分与中学数学密切相关的内容。

此次修订增加的内容有:在第1章中,增加了简易逻辑的内容,并将此内容与集合写在一起,目的是让读者加深对集合的理解。同时,用集合来刻画逻辑学中的概念、命题、推理等内容,以此来揭示数学与逻辑的内在联系。在第2章中,严格地阐述了数系的扩充过程,特别是严密地论述了实数理论。在数系的基础上,增加了数组(向量)的内容,以适应中学数学中向量内容的教学需求。在第3章中,讨论了函数所涉及的有关问题。增加了积分上限函数与和函数、一次函数、方程等内容。一方面,利用分析的方法,整合了中学数学中几何的内容(全等、相似、对称、面积与体积的计算、尺规作图等);另一方面,也将中学数学中算法的内容包含在内。在第4章与第5章中,用公理化的方法,刻画了指数函数、对数函数、三角函数等内容。对原书的内容作了部分删减,使其主要内容更加简洁。在第6章中,我们利用凸函数解决了一些不等式问题,特别地,解决了线性规划问题。作为扩展的内容,也涉及泛函机制问题,这是为了解决中学数学中涉及的最短弧长问题与等周问题。此次修订增加了每一章的习题。作者力求习题紧扣教材内容,做到难易结合。有的习题是某些概念、某些定理的直接推论,有些习题是一些知识的综合应用。

此书涵盖了中小学数学中的一些主要内容，涉及了高等数学中数学分析、高等代数、解析几何、近世代数、变分学等相关内容。此书比较注意数学的严密性，所学的知识都作了必要的准备。阅读此书不需要过分高深的数学知识，但需要有一定的数学修养。

本书的第一版出版以来，作者以此书为教材，多次为本科生开设选修课，也多次为攻读教育硕士的中学教师授课。教学实践中体会到：无论是尚未成为教师的本科学生，还是中学教师，他们的一个共同点是数学修养不足，不能看到初等数学与高等数学的有机联系。他们确有提高数学修养的需要，以便于更好地驾驭中学数学教材。但是，在大学中，教师讲好一门中学数学与大学数学融通的课程并非易事，他们常常居高有余而临下不足。讲授好这门课程不仅要求教师具有较好的数学修养，而且也要求教师具有一定的中学数学教学经验。作者力图紧密结合中学数学内容，编写好这样一本中学数学与高等数学紧密结合的教材，为师范院校的本科学生（未来的中学教师）和教育硕士提供一本读物。但由于能力所限，心有余而力不足。希望国内同行和读者不吝赐教，多提宝贵意见，以便在下次修订中改进。

本书的出版，得到了许多同事的帮助。东北师范大学史宁中教授、首都师范大学王尚志教授为本书提出了有益的修改意见，东北师范大学数学与统计学院党政领导对本书的修订给与了鼓励，一些学生认真阅读了书稿，修改书稿的谬误之处，特别是北京师范大学出版社梁志国为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此一并表示感谢。作者深深地感到，这本书是集体劳动的结晶。

高　夯

东北师范大学

2009 年秋

第一版序言

分析、代数、几何是数学的核心内容。无论是远古时期，还是近现代，数学这棵根深叶茂的大树就是以分析、代数、几何为其主干。一方面，随着时间的推移，现代数学的内容在不断地发展；另一方面，现代数学的思想又在不断地渗透到经典数学的研究中。如何用现代数学的知识来充实自己，用高等数学的观点去理解初等数学的内容，从而提高自己的数学素养，并进一步指导中学数学的教学工作，这是每一位高等师范院校数学系学生与中学数学教师面临的课题。只有很好地解决了这个问题，才能在现在或将来的中学数学教学中，真正做到居高临下，游刃有余。

1997年，东北师范大学数学系承担了教育部的“高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革”项目。与此同时，东北师范大学推出了“优师工程”。在此项目与工程的推动下，我们重新修订了我系的课程设置方案。在新的培养方案中，确定了“两个阶段，1+3个模块”的课程结构体系，即将学生四年的学习过程分为必修课学习阶段与选修课学习阶段；课程设置方案分为一个必修课的大模块，三个选修课的小模块。三个选修课的小模块之一是中学数学教育系列课程模块。这套丛书中的“分析学”“代数学”“几何学”就是为这个模块准备的系列教材。

2000年，教育部又推出了“园丁工程”。这一工程旨在对本科毕业后的中学教师进行继续教育。东北师范大学数学系先后举办过中学数学教师继续教育培训班。在这些班上，我们开设了“分析专题研究”“代数专题研究”“几何专题

研究”等课程。

这本分析书是在几年来相应课程的讲稿基础上整理而成。首都师范大学王尚志教授、大连理工大学卢玉峰教授、东北师范大学许凤教授都提出过许多宝贵意见，使本书渐趋完善；在本书的编写过程中，东北师范大学数学系给予了大力的支持，特别是系党总支书记许秉东副教授给予了不断的鼓励，使得此书与读者尽快见面；高等教育出版社的郭立伟编审为本书的出版付出了辛勤的劳动。在这里，对于给予本书支持与帮助的各位同志一并表示感谢。

我们不能说这是一套完美的教材，但我们相信大多数读者对这套丛书会有新鲜的感觉。阅读这套丛书，不需要高深的现代数学知识，但需要有一定的数学修养。

应该说，这套丛书是在没有成型的教材可模仿，在摸索的过程中编写而成的。由于编者水平所限，不妥之处一定不少，希望读者批评指正。

编　者

目　录

第1章 集合与关系

集合论是德国数学家康托(G. Cantor)于19世纪末创立的,它在数学中占有独特的地位.由于集合论的语言简洁,具有很强的概括性,它的基本概念已经成为全部数学的基础.

关系是一个与集合同样重要的概念.关系是集合论的重要组成部分.特别是等价关系,是对事物进行分类的基础.它在数学中的地位是极其重要的.

1.1 集合与逻辑

1.1.1 集合的概念

集合是数学中一个基本的原始概念,不能用另外的概念定义它,只能给予一种描述.

集合是指具有某种共同特性的事物的全体.例如,"某大学数学与应用数学专业的全体学生"就是一个集合;"全体中国人"也是一个集合.

集合是由它的成员构成的.通常称集合的成员为**元素**或**点**.一般用大写字母$A,B,C\cdots$来表示集合;用小写字母$a,b,c\cdots$来表示集合的元素.

若集合的元素可以全部列出,我们通常用列举法来表示集合.例如:

$A=\{$甲,乙,丙,丁,戊,己,庚,辛,壬,癸$\}$,

$B=\{$子,丑,寅,卯,辰,巳,午,未,申,酉,戌,亥$\}$,

$C=\{a,b,c,d\}$.

若集合中的元素不能全部列出,我们则用符号$\{x|$关于x的命题$\}$表示满足大括号中的命题的所有成员x的集合.例如:

$$\pi=\{p \mid p\text{ 是平面上与定点 }O\text{ 的距离为 1 的点}\}.$$

显然,π是圆周.

设A是一集合,a是一成员,若a是A的成员,记做$a\in A$,读做**a属于A**;若a不是A的成员,则记做$a\notin A$,读做a不属于A.

显然,对于任一集合A和任一成员a,$a\in A$和$a\notin A$这两者有且仅有一个成立.

如果集合A与集合B的成员完全相同,则称集合A与集合B相等,记做$A=B$,读做A等于B;否则,若集合A与集合B不完全相同,则称A与B不相

等，记做 $A\neq B$，读做 A 不等于 B.

显然，$A=B \Leftrightarrow \forall x\in A$，则 $x\in B$，且 $\forall x\in B$，则 $x\in A$；$A\neq B \Leftrightarrow \exists x\in A$ 但 $x\notin B$，或 $\exists x\in B$ 但 $x\notin A$. ①

如果集合 A 的每一成员都是集合 B 的成员，即 $\forall x\in A$，则 $x\in B$，我们记做 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，分别读做 **A 含于 B** 或 **B 包含 A**.

显然，$A\subset B \Leftrightarrow \forall x\notin B$，则 $x\notin A$.

由集合相等的定义，$A=B \Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$.

集合也可以没有成员，这种没有成员的集合我们称之为**空集**，记做 $\varnothing$.

按照集合的包含定义可以证明空集含于任意集合中，且空集是唯一的.

设 A,B 为两个集合，若 $A\subset B$，我们称 A 为 B 的**子集**；若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，我们称 A 为 B 的**真子集**.

显然，任一集合都是其自身的子集. 若 A 是 B 的真子集，则至少存在一点 $b\in B$，但 $b\notin A$.

A 是一个集合，我们称 A 的所有子集构成的子集族为 A 的**幂集**，记做 2^A（或 $P(A)$）. 例如，$A=\{a,b,c\}$，则 $2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

1.1.2 集合的运算

在这里，我们定义两个集合的并、交、补的运算.

定义 1.1.1 对于两个集合 A 与 B：

集合 $\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**并**，记做 $A\cup B$，读做 **A 并 B**.

集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**交**，记做 $A\cap B$，读做 **A 交 B**.

集合 $\{x\mid x\in A$ 但 $x\notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差集**，或称为 B 相对 A 而言的**补集**，记做 $A-B$，读做 **A 减去 B** 或 **A 差 B**.

对于集合 A 与 B，若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 不相交；反之，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则称 A 与 B 相交.

若 A 与 B 不相交，表明 A 与 B 没有相同的元素，即 A 与 B 是完全不同的两个集合.

我们称集合 $(A-B)\cup(B-A)$ 为集合 A 与 B 的**对称差**，记做 $A\Delta B$.

容易看出：$A=B \Leftrightarrow A\Delta B=\varnothing$.

关于集合的并、交、补三种运算，如下的算律成立：

① 符号“$\Leftrightarrow$”表示“当且仅当”；符号“$\forall$”表示“对于任意的”；符号“$\exists$”表示“存在”.

定理 1.1.1 若 A,B,C 为集合,则

(1)等幂律成立,即

$A\cup A=A, A\cap A=A$;

(2)交换律成立,即

$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(3)结合律成立,即

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4)分配律成立,即

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

(5)De Morgan 律成立,即

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$,

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

证明 这里我们只证明两个等式. 先证(3)中的第二式.

设 $x\in(A\cap B)\cap C$,按定义,$x\in A\cap B$ 且 $x\in C$,也就是 $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\in C$. 由此得 $x\in A$ 且 $x\in B\cap C$. 由交集的定义,$x\in A\cap(B\cap C)$. 这就证明了$(A\cap B)\cap C\subset A\cap(B\cap C)$. 同理可证$(A\cap B)\cap C\supset A\cap(B\cap C)$. 两者合起来即得$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

再证(5)中的第一个等式.

设 $x\in A-(B\cup C)$,即 $x\in A$ 但 $x\notin B\cup C$,也就是 $x\in A$ 但 $x\notin B$ 且 $x\notin C$. 由此得 $x\in A-B$ 且 $x\in A-C$. 由交集的定义,$x\in(A-B)\cap(A-C)$. 按照包含的定义,$A-(B\cup C)\subset(A-B)\cap(A-C)$. 同样方法可以证明 $A-(B\cup C)\supset(A-B)\cap(A-C)$. 两者合起来即得 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

其余各式的证明都是类似的,留给读者自行完成. □①

1.1.3 简易逻辑

现行的高中数学教材中,已经设置了一小部分形式逻辑的内容. 形式逻辑的主要内容是概念、命题与推理.

1. 概念

从语言表达形式上看,概念表达为语词. 例如"学生","书"等. 实质上,概念

① 符号"□"表示定理证毕.

是一种通过反映对象的特有属性来反映对象的思维方式.

概念有两个基本的逻辑特征,即内涵和外延.内涵就是概念所反映的对象的特有属性;外延则是概念所反映的对象范围,亦即概念适用的对象范围.

概念与集合有着密切的关系.我们可以从概念的内涵来认识概念,也可以通过外延来认识概念,而概念的外延就是一个集合.例如,

“东北地区”的外延=\{辽宁省,吉林省,黑龙江省\},

“水果”的外延=\{苹果,梨,桃,橘子,…\}.

概念之间有的有某种联系,有的毫无联系,这种关联与否称为概念之间的关系.概念之间的关系可以用概念的外延来刻画.

(1)全同关系.

全同关系是指两个概念的外延相同,如

“欧几里得”的外延=\{欧几里得\}$\triangleq A$,

“《几何原本》的作者”的外延=\{欧几里得\}$\triangleq B$,

此时,$A=B$,故概念“欧几里得”与“《几何原本》的作者”是全同关系.

(2)真包含关系.

真包含关系是指一个概念的外延(集合 A)包含另一概念的外延(集合 B),且前者的外延大于后者的外延(B 是 A 的真子集).例如,

“数学家”的外延=\{欧几里得,牛顿,…\}$\triangleq A$,

“欧几里得”的外延=\{欧几里得\}$\triangleq B$,

此时,$B\subset A$ 且 $A-B\neq\varnothing$,故“数学家”对于“欧几里得”就是真包含关系.

真包含关系也称为**属种关系**,其中外延较大的概念称为**属概念**,外延较小的概念称为**种概念**.在数学上,常利用属概念来定义种概念.例如:两组对边分别平行的四边形是平行四边形,这里,四边形是属概念,平行四边形是种概念.

(3)交叉关系.

交叉关系是指一个概念的一部分外延和另一个概念的一部分外延相重合.也就是说,将一个概念的外延设为集合 A,另一个概念的外延设为集合 B,则有

$$A\cap B\neq\varnothing,A-B\neq\varnothing,B-A\neq\varnothing. \qquad (1)$$

例如,

“数学家”的外延=\{牛顿,欧拉,…\}$\triangleq A$,

“物理学家”的外延=\{牛顿,爱因斯坦,…\}$\triangleq B$,

此时有关系式(1)成立,即“数学家”与“物理学家”是交叉关系.

(4)全异关系.

全异关系是指两个概念的外延没有任何重合之处.也就是说,将一个概念的

外延设为集合 A，另一个概念设为集合 B，则有

$$A\cap B=\varnothing. \tag{2}$$

例如，

"牛顿"的外延 $=\{$牛顿$\}\triangleq A$，

"欧拉"的外延 $=\{$欧拉$\}\triangleq B$，

此时，有关系式(2)成立，即"牛顿"与"欧拉"为全异关系.

2. 命题

命题是在概念的基础上形成的语句，比概念更复杂. 命题是一种判定事物情况的思维形态.

命题对事物情况的断定，可能符合实际，也可能不符合实际. 符合客观实际的命题称为真命题，不符合客观实际的命题则称为假命题. 例如，"一个角是直角的平行四边形是矩形"这一命题是真命题，"一个角是直角的平行四边形是正方形"这一命题是假命题.

命题与集合有着密切的关系. 一个集合可以由满足某一命题 p 的元素来组成. 即

$$A=\{x\mid \text{命题 } p(x) \text{为真}\}.$$

例如，在平面直角坐标系 xOy 中，

$$A=\{p\mid d(p,O)=1\}, \tag{3}$$

其中 $d(p,O)$ 表示点 p 与坐标原点 O 的距离. 由(3)式给出的集合是单位圆.

注 1.1.1　值得注意的是并非每个命题都可确定一个集合. 读者可参阅文献 7.

命题可分为简单命题与复合命题，简单命题是其本身不再包含其他命题的命题. 例如，"几何是数学的一个分支"是一简单命题. 复合命题是由一定的联结词将一个、两个或两个以上的命题联结起来构成的命题.

(1)负命题.

负命题是否定某种事物情况的命题. 例如，"并非数学是社会科学"是一负命题.

负命题由表示否定的联结词("并不是"、"并非"等)联结一个支命题构成. 在上例中，支命题是"数学是社会科学"，负命题则由"并非"+支命题构成.

由此例可见，支命题是假命题，而负命题是真命题. 我们用 p 表示支命题，用 $\neg p$ 表示负命题，负命题的真假有如下的关系：

若 p 是真命题，则 $\neg p$ 是假命题；

若 p 是假命题，则 $\neg p$ 是真命题；