# 常 微 分 方 程

## 自 学 指 导

全 坚 编

陕西师范大学出版社

**常微分方程自学指导**

全　坚　编

*

陕西师范大学出版社出版

（西安市陕西师大120信箱）

陕西省新华书店经销

西安小寨印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张8,5　字数177千字

1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷

印数：1—3 000册

ISBN 7-5613-0036-0/G·40

统一书号：7403·40　定价：1.40元

# 编 者 说 明

这本学习指导书及习题解答，是为配合学习刘志汉副教授主编的《常微分方程》而编写的。也可以作为学习其它常微分方程教材的参考。由于编者水平所限，书中错误难免，敬请读者指正。

艾克仁、刘志汉、车遴三位副教授看过本书全部内容，提了一些好的建议，编者表示感谢。

值此出版之际，编者对陕西师范大学出版社的同志所给予的热情协助，表示感谢。

编　者

1987年8月

# 目　录

## 第一部分　学习指导书

## 第二部分　习题解答

# 第一部分　学习指导书

## 第一章　微分方程实例和基本概念

### 一、内容提要、学习目的和要求

本章介绍了从数学、力学、化学、电磁学、生物学中所产生的一些微分方程及微分方程的基本概念。

通过本章学习，要求学员了解微分方程来源于生产实践，明确微分方程所研究的基本问题；要求学员了解微分方程建立的过程及方法并掌握微分方程的基本概念。例如方程阶的概念、线性方程及非线性方程的概念。还要求学员能够熟练地、准确地判定一个微分方程的类型，掌握方程的解、通解、特解等概念。

### 二、学习进度和作业安排

| 节　　次 | 自　学　时　数 | 习　　题 |
|---|---|---|
| 1.1 | 4 | 4,5 |
| 1.2 | 4 | 1,2,3 |

## 三、学习方法及学习中注意的几个问题

学员学习每章时，可把教材和指导书二者结合进行，独立地做完作业后，再参阅习题解答。

学习微分方程首先必须了解它产生于生产实践，是人们探索自然界发展规律的结果。同时人们又利用这些规律，使它成为改造自然界的重要工具。微分方程自十七、十八世纪从人们研究力学、光学、天文学开始，发展到今天成为数学的一个重要分支及其它数学分支的基础，例如成为偏微分方程、数理方法、变分法等分支的基础。同时它们又是进一步研究力学、物理学、天文学、化学、生物学及其它自然科学、工程技术的必备工具。并且我们今天为实现四化建设和培养新的一代也都需要学习它。

下面就本章基本概念中容易混淆的问题作些解释，对学员掌握概念或许有所帮助。

**1．什么叫微分方程？**

凡含有自变量、未知函数和未知函数导数的方程，称为微分方程。

这里应注意，在一个微分方程中，不一定明显地出现自变量和未知函数，但未知函数的导数一定要出现。例如，$y''=0$ 是一个微分方程，但它并未明显出现自变量和未知函数。而 $x^2+y^2=4$，是一个方程，但它不是微分方程。因此区分一个方程是否是微分方程，关键在于方程中是否出现未知函数的导数。

**2．微分方程的阶**

微分方程的阶是在微分方程中出现的未知函数最高阶

导数的阶数。在一个微分方程中，未知函数的导数可能有一阶、二阶、一直到$n$阶，那么该微分方程的阶就是$n$。例如微分方程$(y')^2+xy=0$，它是一阶微分方程，而不是二阶微分方程。因为量$(y')^2$是一阶导数的平方项，并不是未知函数$y$的二阶导数。

**3. 关于线性和非线性微分方程**

线性微分方程是教材讨论的重点，因此如何判断一个微分方程是线性方程就十分重要。

如果微分方程

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

的左端为$y$及$\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}$的一次有理整式，则称该方程为$n$阶线性微分方程。否则称为非线性微分方程。因此，$n$阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

其中$a_1(x),\cdots,a_n(x)$，$f(x)$是$x\in[a,b]$上的已知函数。

微分方程$y'+y^2=1$，不是线性方程，虽然关于$y'$是一次有理整式，但关于未知函数$y$并不是一次有理整式。再如微分方程$(y')^2+y=0$，它也不是一阶线性方程。它虽然对未知函数$y$是一次有理整式，但对未知函数的导数$y'$并不是一次有理整式。所以它是非线性微分方程。

微分方程

$$F(x,y,y')=0$$

是一个隐方程。而函数关系$F$是变元$x$，$y$，$y'$的已知函

数。一般地，它关于未知函数$y$和$y'$不一定是一次有理整式，故该方程是一阶微分方程的一般形式。

**4. 关于微分方程的解、通解和特解**

如果把一个函数代入一个微分方程，使该方程成为一个恒等式，那么这个函数称为该微分方程的一个解。

**例** 微分方程

$$\frac{dy}{dx}=xe^{2x}$$

取 $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}$ 代入方程左边，得

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}\right]=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}=xe^{2x}\equiv\text{右边}$$

故 $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}$是原方程的一个解。

因为任意常数$c$的导数是零，所以函数

$$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}+c$$

也都是原方程的解。

由此可知，微分方程的解并不只有一个，而是同时有无穷多个函数，所以，一个微分方程的全部解构成一个函数族。

上例从形式上看，方程的解加上一个任意常数$c$后还是方程的解。如果认为这是一个规律，那就不对了。例如微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$$

取$y=x^2$代入微分方程左边，得

$$\frac{d}{dx}(x^2)=2x=\text{右边}$$

故$y=x^2$是原方程的一个解。

但对任意一个常数$c$（$\neq 0$），函数$y=x^2+c$就不是原微分方程的解。而函数族$y=cx^2$却是原方程的解。这个微分方程的解也有无穷多，它们也构成一个函数族。

为了获得符合实际工作要求的完全确定的解，仅有微分方程是不够的，还必须附加一定的条件，这些条件称为定解条件。

而在定解条件中，比较常见，比较重要的一种，是描述已知物体在运动的某一时刻（如$t=0$）所处的状态。如已知初始位移、初始速度等，这类定解条件称为初值条件。附加了初值条件的微分方程问题，称为初值问题。本教材仅讨论初值问题（柯西问题）。

一般地说，一阶微分方程只需要一个初值条件，$n$阶微分方程应有$n$个初值条件。一个初值问题的求解过程应当分为两步：首先求出方程的带有和方程阶数相同个数的任意常数的解的表达式；其次，把初值条件代入，确定出其中任意常数的值，这样得到的解称为初值问题的特解。

第一步是求出方程的通解；第二步求初值问题的特解。

方程的通解通常理解为：在一个$n$阶微分方程的解的表达式中，如果包含$n$个任意常数，它们是相互独立的（不能相互合并），使对在一定范围内任意指定的$n$个初始条件，我们都能适当选定这些任意常数的值，而获得该初值问题的特解，这个解的表达式称为$n$阶微分方程的通解。那么，又如何判定方程的通解呢？

**例** 方程

$$y'-2y=0$$

函数$y=ce^{2x}$是否是通解呢？用直接验证的方法可知

第一，不论$c$为何数值，$y=ce^{2x}$都是方程的解。

第二，对于任意给定的初值条件

$y|_{x=x_0}=y_0$，$(-\infty<x_0<+\infty,\ -\infty<y_0<+\infty)$

都有$y_0=ce^{2x_0}$，即$c=y_0e^{-2x_0}$。此时，相应的解为$y=ce^{2x}=y_0e^{-2x_0}e^{2x}$就能满足所给的初值条件，因此，$y=ce^{2x}$是方程$y'-2x=0$在全平面$x—y$上的通解。而$y=y_0e^{-2x_0}e^{2x}$是方程满足初始条件$y|_{x=x_0}=y_0$的特解。

微分方程的基本问题是求解及研究解的各种属性。当然首要的问题是求解。如前所述，如果能求得方程通解的表达式，根据初值条件，能适当的选定任意常数而得到所求的特解。同时，利用这种解的表达式就可以来研究解的某些属性。

对于微分方程解的表达式，起初人们总想用初等函数来表达方程的解，但是即使最简单的一阶方程$y'=f(x)$，也是不一定能办到的。

**例** 方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{x}$$

的解就不能用初等函数表示出来，因为该初等函数$\frac{\sin x}{x}$的原函数不能用初等函数表示出来。

后来，人们提出，用“初等函数或初等函数的积分”形式来表达方程的解，这时上述方程可以用公式

$$y=\int\frac{\sin x}{x}dx+c$$

给出。所以，以后我们提到微分方程的解，总是理解为可用“初等函数或初等函数的积分”表达的解。

另外，求方程的通解，在微分方程发展历史的一个时期中，曾是人们关心的问题，也取得了一系列重大成果。但后来人们发现，绝大多数的微分方程都求不出通解，特别是在1841年*Liouville*（刘维尔）证明了一个事实，即*Riccati*（黎卡堤）方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

除了某些特殊情形外，对一般的函数$P$、$Q$、$R$来说，其通解不能用初等函数或初等函数的积分来表达。更由于物理学、力学上所提出的微分方程问题，大都要求满足某种附加条件(如初值条件、边值条件等)的特解，这样人们才由求通解而改变从事研究定解问题(如初值问题、边值问题)，这就形成对微分方程一般理论的研究。这些基本理论的研究，对求解和研究解的属性无疑都是十分重要的，希望学习时应给予重视。

本章的习题中，习题1，目的是要巩固线性与非线性微分方程及阶的概念。习题2，目的是学会验证方程解的方法。习题3是巩固通解及特解的概念及初步了解求特解的方法。习题4，5是联系力学实际，从而使学员初步了解建立微分方程的方法和过程。

# 第二章　一阶微分方程

## 一、内容提要和学习要求

（一）一阶导数已解出的微分方程类型及其解法途径

（1）变量分离方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

或
$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0$$

该类型方程变量分离即可求解。

（2）可化为变量分离的方程

1）齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $u=\frac{y}{x}$，可化为变量分离方程求解。

2）可化为齐次方程的方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

分三种情况进行求解。

当$c_1=c_2=0$时，可化为齐次方程求解。

当$c_1$、$c_2$不全为零时，但$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，

令$u=a_2x+b_2y$，可化为变量分离方程求解。

当$c_1$、$c_2$不全为零时，但$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$

令变换

$$x=X+x_0$$
$$y=Y+y_0$$

其中$x_0$，$y_0$是待定常数，可将方程化为关于$X$与$Y$的齐次方程求解。

（3）线性方程

齐线性方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$，变量分离求解。

非齐线性方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，用常数变易法求解。

（4）全微分方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

这里$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，可直接积分求解。如果微分方程不满足条件$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，可试用积分因子法求解。

（二）一阶隐方程的几种类型及其求解途径

（1）可就$y$解出的方程

$$y=f(x,y')$$

引入参数$y'=p$，化为导数可解出的方程，从而得到参数解或通解。

（2）可就$x$解出的方程

$$x=f(y,y')$$

引入参数$y'=p$,化为导数可解出的方程类型，得出参数解或通解。

（3）不含$y$的方程

$$F(x,y')=0$$

引入参数$y'=p$，化为变量分离方程，得出参数解。

（4）不含$x$的方程

$$F(y,y')=0$$

引入参数$y'=p$，化为变量分离方程，得出参数解。

（5）克莱洛方程

$$y=xy'+f(y')$$

引入参数$y'=p$，即可得出参数解。

（三）一阶微分方程解的存在与唯一性定理的叙述；一阶方程的几何解释；几何解法；奇解、包络、正交轨线等概念。

学习本章，要求学员熟练地掌握上述一阶微分方程的求解方法；明确一阶微分方程解的存在唯一性定理的内容和条件；了解奇解等概念，会求简单微分方程的奇解。

## 二、学习进度和作业安排

| 节次 | 自学时数 | 习　　题 |
|---|---|---|
| 2.1 | 18 | 2.1.1：一、1,2,4,10　二、2,3<br>2.1.2：1,2,4,9,10<br>2.1.3：1,2,5,6,7,9,10<br>2.1.4：1,2,4,5,6,7,8,11 |