$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

排列 组合 二项式定理

谷世菁

河北人民出版社

内 容 提 要

本书内容包括“数学归纳法”、“排列”、“组合”、“可重复的排列组合问题”、“二项式定理”等五个部分，分类举例讲解，每节后附有习题，最后附习题解答，供读者习作和参考。

本书取材比较丰富，文字力求通俗简练，可供中学数师教学参考和中学生课外阅读。

排列 组合 二项式定理

谷世青

河北人民出版社出版
河北新华印刷一厂印刷
河北省新华书店发行

1979年1月第1版
1979年1月第1次印刷
印数 1—510,000
统一书号 7086·966 定价 0.23元

排列 组合 二项式定理

谷世菁

河北人民出版社

一九七九年·石家庄

目　录

第一节　数学归纳法

一、由特殊到一般的推理方法

人们在认识客观世界的时候，经常采用的一种方法是首先考察和研究一些特殊的和个别的事物，在获得对这些特殊事物认识的基础上，总结和抽象出一般的结论来，这种由特殊到一般的推理方法，通常称为归纳法。当然，完成这一推理过程，是不能离开对客观实际的考察的。

例如，我们要考察某班级内的40个学生是否全是少先队员。这里有两种考察方法：第一种方法，首先从班内任叫一个学生，比如张三是少先队员，又从班内任叫一个学生，比如李四也是少先队员，由此我们得出结论：全班的40个学生都是少先队员；第二种方法，对全班的40个学生逐一加以调查，发现他们全是少先队员，从而我们得出结论：全班的40个学生都是少先队员。在此，所得的结论虽都是一样的，但却是由不同的推理方法得到的。前一种是根据对两个特殊事例的考察的结果而得出的结论，这种推理方法称为不完全归纳法；后一种是根据对所有对象的考察结果而得出的结论，这种推理方法称为完全归纳法。显然，利用完全归纳法所获得的结论是可靠的，而利用不完全归纳法所获得的结论就不一定可靠。

当然，只有在我们所考察的对象是有限的时候，才可能应用完全归纳法，而当所考察的对象不是有限时，用完全归纳法

就有困难了，这时我们可以先采用不完全归纳法，然后再去讨论所得之结论是否正确。

例 1 历史上有人曾经验证过当 $n=1, 2, 3, \cdots, 11000$ 时，函数

$$f(n)=n^2+n+72491$$

的值都是素数①。利用不完全归纳法，我们可以得出结论：对于任何自然数 n，函数 $f(n)$ 的值均为素数。

例 2 考察从 1 开始的诸连续奇数的和，容易得到：

$$\begin{aligned}
1 &= 1^2.\\
1+3 &= 2^2.\\
1+3+5 &= 3^2.\\
1+3+5+7 &= 4^2.\\
1+3+5+7+9 &= 5^2.
\end{aligned}$$

利用不完全归纳法，我们可以得出结论：从 1 开始的连续 n 个奇数的和等于其项数 n 的平方，即

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

在上述的例 1 和例 2 中，我们都是采用的不完全归纳法，因此所获得的结论不一定是完全可靠的，所以还需要进一步的讨论和研究。

对于例 1，虽然当 $n=1, 2, 3, \cdots, 11000$ 时，函数

$$f(n)=n^2+n+72491$$

的值均为素数，但是，当 $n=72490$ 时，则有

$$\begin{aligned}
f(72490) &= 72490^2+72490+72491\\
&= 72490^2+2\times72490+1\\
&= (72490+1)^2.
\end{aligned}$$

---

① 只能被 1 及其自身整除的自然数称为素数。素数亦称质数。

显然，此值已不再是素数了．所以前面由归纳法得出的结论是不正确的．

对于例 2，我们考察了从 1 开始的连续 5 个奇数的和等于项数 5 的平方．这一结论我们亦可从图 1 中直观的看出．在图 1 中，从右下角开始，往上一层一层的小正方形的个数依次为

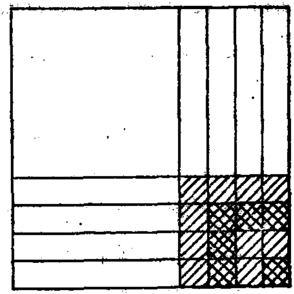

图 1

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots$$

个，而其所组成的较大的正方形的面积依次为

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \cdots$$

在例 2 中，如果我们继续往下计算，可以发现其结论仍是正确的．但是由于有无限多个奇数，所以不论我们计算多少次，所得的结论也还是对有限个个别对象考察的结果，因此，仍然不能肯定我们所获得的结论是正确的．这样，就产生了一个矛盾，即对个别对象的考察不能得出肯定的结论，而对无限多的对象又不可能作完全的考察．要解决这一矛盾，就要用数学归纳法．应用数学归纳法，可以通过有限来解决无限的问题．

那么，应如何考察例 2 中结论的正确性呢？我们是沿着如下过程去考虑的．通过计算，可证明 $n=1$ 时结论是正确的；当 $n=1$ 时结论正确，通过推理证明 $n=1+1=2$ 时结论也正确；当 $n=2$ 时结论正确，通过推理证明 $n=2+1=3$ 时结论也正确，如此等等．由于这些推理方法都是一样的，所以实质上我们是解决了如果当 $n=k$ 时结论正确，通过推理证明了当 $n=k+1$ 时结论也正确．这样，我们就解决了对无限个对象的考察问题，从而也就证明了结论的正确性．它既有部分事实为

基础，又有理论规律为依据，因此，所得结论是可靠的。这就是完全归纳法，也就是数学归纳法的基本思路。

二、应用数学归纳法的步骤

要证明一个关于自然数 n 的命题，如果

第一步，验证当 $n=1$ 时命题为真；

第二步，假设当 $n=k$ 时命题为真，推得当 $n=k+1$ 时命题也真，则命题对一切自然数 n 均为真。这种推理方法就叫做**数学归纳法**。

在这两个步骤中，第一步是基础，是解决特殊性的问题，也叫做**验证**；第二步是根据，它是在第一步的基础上，解决延续性的问题。因为根据第一步，命题对 $n=1$ 为真，根据第二步可推出命题在 $n=2$ 时为真，由命题对 $n=2$ 时为真，再根据第二步又可推出命题在 $n=3$ 时为真，如此不断应用第二步可知命题对任何自然数均为真，因此，第二步的实质是解决由有限到无限的过渡问题。

数学归纳法是在数学中应用极为广泛的一种论证方法，它和命题如何归纳而成是没有关系的。

应当指出，并不是任何涉及自然数的命题的正确性都一定要用数学归纳法去证明，有些问题如果可以通过直接计算去证明就不必应用数学归纳法去证明了。例如，要证明对任何自然数 n，等式 $(n+1)(n-1)=n^2-1$ 成立，这时只要通过计算就可以由左边推导出右边来。而对于那些无法直接计算又必须按由小到大的顺序计算的式子，通常是要采用数学归纳法去证明的。

据记载，数学归纳法最早是由法国的巴斯卡（Pascal，1623～1662）提出的。

例 3　证明对于任何自然数 n，等式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

均能成立。

证明　当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1$，等式成立；

假设当 $n=k$ 时等式成立，即从 1 开始连续 k 个奇数的和等于其项数 k 的平方，也即

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2,$$

则增加第 $k+1$ 项 $(2k+1)$ 后得

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)\\=&[1+3+5+\cdots+(2k-1)]+(2k+1)\\=&k^2+(2k+1)\\=&(k+1)^2.\end{aligned}$$

此即当 $n=k+1$ 时等式也成立，由此可得对任何自然数 n 等式均成立。

例 4　证明对任何自然数 n 等式

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

均能成立。

证明　当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=\frac{1}{2}\cdot 2=1$，等式成立；

假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1),$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1+2+\cdots+k+(k+1)\\=&(1+2+\cdots+k)+(k+1)\\=&\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1].$$

此即当 $n=k+1$ 时等式也成立，由此可得对任何自然数 n 等式均成立。

例5 证明对任何自然数 n，等式

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

均能成立。

证明 当 $n=1$ 时，左边 $=1^4=1$，右边 $=\frac{1}{30}\cdot 2\cdot 3\cdot 5=1$，等式成立；

假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$1^4+2^4+\cdots+k^4=\frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1),$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&1^4+2^4+\cdots+k^4+(k+1)^4\\
&=(1^4+2^4+\cdots+k^4)+(k+1)^4\\
&=\frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)+(k+1)^4\\
&=\frac{1}{30}(k+1)[k(2k+1)(3k^2+3k-1)+30(k+1)^3]\\
&=\frac{1}{30}(k+1)(6k^4+39k^3+91k^2+89k+30)
\end{aligned}$$

↓ 怎样来的

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{30}(k+1)(2k^2+7k+6)(3k^2+9k+5)\\
&=\frac{1}{30}(k+1)(k+2)(2k+3)(3k^2+6k+3+3k+3-1)\\
&=\frac{1}{30}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1][3(k+1)^2+\\
&\quad 3(k+1)-1].
\end{aligned}$$

此即当 $n=k+1$ 时等式也成立，由此可得对任何自然数 n 等式均成立。

从例3至例5属于同一种类型，都是级数求和的问题；其证法也大体上相同，都是利用一些恒等变形逐步得到。

应用数学归纳法证明一个命题的正确性时，除第一步具体验证外，第二步必须在假定 $n=k$ 时命题正确的基础上，推导出所要证明的命题中所有关于 n 的位置均换为 $k+1$ 的形式。

例6 证明对任何自然数 n，等式

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

均能成立。

证明 当 $n=1$时，左边 $=2$，右边 $=\frac{1}{3}\cdot2\cdot3=2$，等式成立；

假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2),$$

则当 $n=k+1$时，有

$$\begin{aligned}&1\cdot2+2\cdot3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\&=[1\cdot2+2\cdot3+\cdots+k(k+1)]+(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)\\&=\frac{1}{3}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2].\end{aligned}$$

此即当 $n=k+1$ 时等式也成立，由此可得对任何自然数 n 等式均成立。

例7 证明对任何自然数 n，等式

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

均能成立。

证明 当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{1}{2}$，右边 $=\frac{1}{2}$，等式成立；

假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1},$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\
&=\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\
&=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\
&=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}\\
&=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}\\
&=\frac{k+1}{(k+1)+1}.
\end{aligned}$$

此即当 $n=k+1$ 时等式也成立，由此可得对任何自然数 n 等式均成立。

对于例6、例7类型的问题，要分析清楚项数与 n 的关系，然后进行恒等变形即可。

例8 证明对任何自然数 n，等式

$$\cos A+\cos 3A+\cdots+\cos(2n-1)A=\frac{\sin 2nA}{2\sin A}\quad(\sin A\neq 0)$$

均能成立。

证明 当$n=1$时，左边$=\cos A$，右边$=\dfrac{\sin 2A}{2\sin A}$

$$=\frac{2\sin A\cos A}{2\sin A}=\cos A，\text{等式成立；}$$

假设当$n=k$时等式成立，即

$$\cos A+\cos 3A+\cdots+\cos(2k-1)A=\frac{\sin 2kA}{2\sin A},$$

则当$n=k+1$时，有

$$\cos A+\cos 3A+\cdots+\cos(2k-1)A+\cos(2k+1)A$$

$$=\frac{\sin 2kA}{2\sin A}+\cos(2k+1)A$$

$$=\frac{\sin 2kA+2\sin A\cdot\cos(2k+1)A}{2\sin A}$$

$$=\frac{\sin 2kA+\sin 2(k+1)A-\sin 2kA}{2\sin A}$$ [应用积化和差公式

$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$]

$$=\frac{\sin 2(k+1)A}{2\sin A}.$$

此即当$n=k+1$时等式也成立，由此可得对任何自然数n等式均成立。

证明这种类型的问题，要熟练地掌握三角公式，例如积化和差公式等。

例9 证明对任何自然数n，均有

$$x+a \mid x^{2n+1}+a^{2n+1} \quad ①$$

证明 当$n=1$时，$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$，所以$x+a \mid x^3+a^3$，结论成立；

假设当$n=k$时结论成立，即$x+a \mid x^{2k+1}+a^{2k+1}$，则当

---

① 此处的符号表示$x+a$整除$x^{2n+1}+a^{2n+1}$

$n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&x^{2(k+1)+1}+a^{2(k+1)+1}\\
&=x^{2k+3}+a^{2k+3}\\
&=x^{2k+3}+a^{2k+1}\cdot x^2-a^{2k+1}\cdot x^2+a^{2k+3}\\
&=x^2(x^{2k+1}+a^{2k+1})-a^{2k+1}(x^2-a^2).
\end{aligned}$$

由归纳假设 $x+a\mid x^{2k+1}+a^{2k+1}$，又$x+a\mid x^2-a^2$，于是得到 $x+a\mid x^{2(k+1)+1}+a^{2(k+1)+1}$，此即当 $n=k+1$ 时结论成立，由此可得对任何自然数 n 结论均成立。

为了便于本例之证明，在运算过程中采用了增一项和减一项的办法，这是证题时经常采用的一种方法。

三、应用数学归纳法时应注意的几点

第一，根据所讨论的问题的性质的不同，第一步的验证不一定必须检验 $n=1$，而是检验使结论有意义的最小正整数。

例如，在证明凸 n 边形 n 个内角和等于 $(n-2)\pi$ 时，只有取 $n\geqslant 3$ 时问题才有意义，于是其证明过程应为：

当 $n=3$ 时，三角形内角和 $=\pi=(3-2)\pi$，结论成立；

假设当 $n=k(k\geqslant 3)$ 时结论成立，即凸 k 边形的内角和为 $(k-2)\pi$，今设 A_1，A_2，…，A_{k+1} 为凸 $k+1$ 边形的诸顶点(图2)，连结 A_1A_k，于是此线段将该凸 $k+1$ 边形分为两个图形，一个是凸 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$，一个是三角形 $A_1A_kA_{k+1}$。显然，凸 $k+1$ 边形的内角和是这两个图形的内角和的和，即

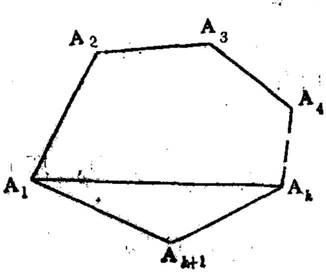

图 2

$$(k-2)\pi+\pi=(k-1)\pi=[(k+1)-2]\pi,$$

此即当 $n=k+1$ 时结论成立。由此可得对任何自然数 $n(n\geqslant 3)$ 结论均成立。

第二、在第一步进行验证时只须验证 $n=1$ 时使结论成立就够了，不必再验证 $n=2$，$n=3$ 是否使结论成立，因为验证的再多也还是解决特殊性的问题，所以验证 $n=2$，$n=3$ 是多余的；更要注意，第一步不可写成"当 $n=1,2,3,\cdots$ 时结论成立"，这种写法是很不确切的。当然，此处验证 $n=2,3$ 还只是多余，而不确切的地方主要表现在"…"上，因为这种写法给人以一种模糊的概念，不知道需要验证到什么数？验证了没有？验证后是否使结论成立？所以，在应用数学归纳法时切记不要写出此种形式。

第三、在进行第二步的证明时，一定要在归纳假设的基础上去推证所要证明的命题的正确性，也就是说，一定要在假设 $n=k$ 时命题正确的基础上去推导出 $n=k+1$ 时命题正确。如果不利用归纳假设的条件去推证，那就不是属于这种推理方法。

例如，用数学归纳法证明对一切自然数 n 均有如下等式：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

如果第二步的证明如下叙述：

假设 $n=k$ 时等式成立，即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

此即当 $n=k+1$ 时等式也成立。

在这段证明中就没有利用归纳假设的条件，而是直接应用等比数列的求和公式，因此这种证明方法虽然对，但不是属于应用数学归纳法证的。

第四、在应用数学归纳法证明一个命题的正确性时必须两步证全，缺一不可。在证明过程中两个步骤之中缺少了哪一个步骤都可能导致错误的结论。

首先，不要以为第一步验证的步骤太简单而丢开不管，这样就有可能导出错误的结论。例如，我们讨论"从 1 开始 n 个连续奇数的和等于 n^2+a(为任意数)"这个结论是否正确。如果我们丢开第一步不讨论，而只讨论第二步，即假设当 $n=k$ 时结论为真，$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2+a$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)\\=&[1+3+5+\cdots+(2k-1)]+(2k+1)\\=&(k^2+a)+(2k+1)\\=&(k+1)^2+a.\end{aligned}$$

由此，在 $n=k+1$ 时结论亦真。但是，显然在 $n=1$ 时结论是不成立的。这种谬误的产生是由于忽略了第一步而造成的。

另外，也不要以为第一步验证对了就可以不再证明第二步了，这样也可能产生谬误。例如，法国的费尔马（Fermat，1601～1665）曾提出："对于任何非负整数 n，形状为 $2^{2^n}+1$ 的数都是素数。"下面是一些验证的结果：

当 $n=0$ 时，　　$2^{2^0}+1=3$；

当 $n=1$ 时，　　$2^{2^1}+1=5$；

当 $n=2$ 时，　　$2^{2^2}+1=17$；

当 $n=3$ 时，　　$2^{2^3}+1=257$；

当 $n=4$ 时，　　$2^{2^4}+1=65537$。

验证的结果表明这几个数均为素数，但由此并不能说明结论就是对的。事实上，瑞士的欧拉(Euler，1707～1783)在1732年就发现了费尔马的错误，他指出当 $n=5$ 时，

$$2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297=641\times6700417.$$

说明它已不再是素数，从而推翻了费尔马的归纳结论。而且后来人们发现，当 $n>4$ 时，费尔马的结论都是错误的。

四、数学归纳法的合理性

为了阐明数学归纳法是一种合理的推理方法，我们先来讨论自然数的性质。

自然数的性质：

〔1〕 1是自然数；

〔2〕 每一个自然数 a，都有一个确定的后继数①a'，a' 也是自然数；

〔3〕 1不是后继数；

〔4〕 一个数只能是某一个数的后继数，或者根本不是后继数；

〔5〕 任何一个自然数的集合，如果包含1，并且假设若此集合包含 a 也一定包含 a 的后继数 a'，则此集合包含所有的自然数。

这五条性质是由意大利的皮亚诺(Peano)抽象出来的，通常称为**自然数的皮亚诺公理**。而其中的第〔5〕条则是数学归纳法的根据。

定理一 数学归纳法是合理的推理方法。

---

① 紧接在某一个自然数后面的自然数，叫做该数的后继数。如1的后继数为2，2的后继数为3，等等。