高中数学客观试题解题方法

刘再进　高旭寿　主编

填空题　判断题　选择题　填空题　判断题　选择题

高中数学客观试题解题方法

——填空题、判断题、选择题

刘再进　高旭寿　主　编

张　荣　周佐贤·副主编

李铁汉　吴长刚
李庆芳　贾林杰　编

河　北　教　育　出　版　社

高中数学客观试题解题方法

——填空题、判断题、选择题

刘再进　高旭寿　主编

河北教育出版社出版（石家庄市城乡街44号）
河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米　1/32　21.125印张　454,000字　1993年5月第1版
1993年5月第1次印刷　印数：1—5,390　定价：6.05元

ISBN 7-5434-1502-x/G·1250

前　言

高中数学客观题包括选择题和填空题，它是一种较新的题型，题目灵活，覆盖面宽，有利于大范围地考查基础知识和基本运算。

选择题针对学生容易混淆的概念和运算，设置不同的选择支，从而培养学生迅速明辨是非，判断选择正确结论的能力，开发学生智力，发展学生思维能力。

填空题无非是不要求解答过程的求解题，因而任何一点失误都造成全盘错误，从而对学生思维的严密性和运算的敏捷性提出了较高的要求。

因此，客观题的解法值得特别的重视和研究。因为客观题的分数在各种考试中占很大份量。这本身就是可观的，同时它又是答好“主观”题的基础，所以可以说客观题有举足轻重的作用。

本书积作者多年教学经验：有针对基础知识的基本训练，有对容易混淆的问题的点拨，有经反复筛选的佳题巧解，还有一部分自编自解的新颖练习。

本书共编入选择题899个，填空题471个，选题的内容和顺序与高中数学教材紧密配合，不仅适合高中毕业班师生采用，而且有促进高一、高二学生和自学青年透彻理解教材、灵活运用知识、形式解题能力的功效。书中还设置了较深刻的题目，以期对“主观”题——解答题的解法起到渗透

作用。

为了便于学生自学，方便教师使用，书前编有选择题和填空题的解题方法及典型例题，书后不仅附有所有题目的答案，还有各题的详解过程，方法纷呈，启人深思，是本书的一大特色。

由于编者水平所限，虽然刻意求精，但缺点、错误仍恐难免，希望读者指正。

编　者

1991年10月20日。

目 录

第一章　怎样解数学选择题

由于近三、四十年来数学研究的进展，为培养学生思维能力、分析能力、运算能力、推理判断能力，产生了这种短小精悍、构思新颖、概念性强、题小面广、知识复盖面宽、解法灵活多样的"选择题"。选择题还有它独到之处即在它的选择支上，有意的在概念或运算上制造混乱、似是而非，鱼目混珠。从而培养学生明辨是非的能力。

选择题：是由条件和结论（结论有A、B、C、D几个答案）组成，在解选择题时，必须要认真审题、仔细观察。审题是正确地、全面地、细致地了解题意，即题目的条件是什么，结论是什么？把题目的条件（包括已知的条件和隐蔽的条件）与结论结合起来，分析它们的内在联系，或者通过归纳、转化把各个环节密切结合起来。得出正确的结论；也有大量题目是通过仔细观察，观察出题目的特点，然后导出猜想和判断，由少量条件推创出大量条件；由特殊的情况猜想到一般情况；由某一个性质猜想出类似的另一个性质；由熟知的结论猜想出可能的结论。其过程可概括为：

观察——猜想——判断——验证。

解答选择题既有常规的一般方法，也有独特的方法，它的独特之处就在于对于通常的选择题选择支"有且只有一个"答案是正确的，所以要根据已知条件和选择支提供的信息，挖掘和发挥选择支的"暗示"作用。排除 $n-1$ 个错误答案，

而得到唯一正确的答案。

下面介绍几种常见的解选择题的方法。

一 直接推算法

对于常规题目，直接通过观察，从题目的已知条件出发，借助于定义、定理、性质、法则、公式通过准确的运算、严密的推理。从而得出正确的结果，再与题目的结论的各选择支对照、对比，得出正确的答案。

例1 若 $2x=\log_2 3$，那么 $\dfrac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}$ 的值是（　　）。

(A) $\dfrac{13}{12}$；(B) $\dfrac{13}{6}$；(C) $\dfrac{13}{3}$；(D) $\dfrac{13}{2}$。

解：原式 $=\dfrac{2^{3x}-\dfrac{1}{2^{3x}}}{2^x+\dfrac{1}{2^x}}=\dfrac{\dfrac{2^{6x}-1}{2^{3x}}}{\dfrac{2^{2x}+1}{2^x}}$

$$=\frac{[(2^{2x})^3-1]2^x}{2^{2x}(2^{2x}+1)2^x}\qquad\left(\begin{array}{l}\because\ 2x=\log_2 3\\ \therefore\ 2^{2x}=3\end{array}\right)$$

$$=\frac{(2^{\log_2 3})^3-1}{2^{\log_2 3}(2^{\log_2 3}+1)}$$

$$=\frac{3^3-1}{3(3+1)}=\frac{13}{6}$$

对照选择支，故应选“B”。

例 2 已知集合 $M=\{(x,\ y)\,|\,|xy|=1,\ x>0\}N=\{(x,\ y)\,|\,\mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}y=\pi$，那么 $M\cup N=$（　　）。

(A) $M\cup N=\{(x,\ y)\,|\,|xy|=1\}$；　(B) $M\cup N=M$；

(C) $M\cup N=N$; (D) $M\cup N=\{(x, y)||xy|=1.$ 且 x, y 不同时为负数。$\}$

解：设 $x\in N$，$y\in N$，依题设条件，有

$\operatorname{arctg}x=\pi-\operatorname{arcctg}y$，即 $x=-\dfrac{1}{y}$，

$$\therefore\quad xy=-1。\qquad (1)$$

据反正切，反余切的定义

$\operatorname{arctg}x\in-\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\operatorname{arcctg}y\in(0, \pi)$ 结合已知条时

$$x>0,\quad \operatorname{arctg}x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)$$

由 (1) 和 (2) 得 $N=\{(x, y)|\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi\}\subset M$，

故 $M\cup N=M$，应选"B"。

例 3 $(3x^2-2y-5z)^6$展开式中 $x^2y^3z^2$项的系数是(　　)

(A)60；(B)-6000；(C)-36000；(D)-216000。

解：由多项式的乘法法则 $(3x^2-2y-5z)^6$ 可写成相同的 $(3x^2-2y-5z)$ 6 个括号相乘，再据排列组合的原理：从一个括号中任选一个 $3x^2$，再从余下的五个括号内任选 3 个 $-2y$，其余两个括号内取 $-5z$。即 $C_6^1 3x^2\cdot C_5^3(-2y)^3\cdot C_2^2(-5z)^2$ 其系数为 $C_6^1\cdot 3\cdot C_5^3\cdot(-2)^3\cdot C_2^2(-5)^2=-36000$，故应选"C"。

例 4 如果圆 $x^2+Dx+y^2+Ey+F=0$ 与 x 轴相切于原点，那么下列结论正确的是(　　)。

(A) $F=0$，$D\neq0$，$E\neq0$；

(B) $E=0$，$F=0$，$D\neq0$；

(C) $D=0$，$F=0$，$E\neq0$；

(D) $D=0$，$E=0$，$F\neq 0$。

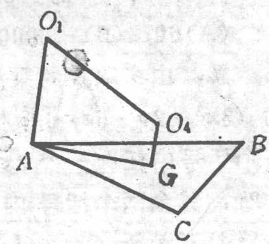
解：由圆的方程可知：圆心为 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$，半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$。

再观察题目中的条件"与 x 轴相切于原点"，那么，圆心一定在 y 轴上，则圆心的横坐标为零，纵坐标不为零，即 $D=0$，$E\neq 0$。对照选择支的四个答案，故应选"C"。

例 5 桌面上放四个球，其中三个的半径均为 R，且两两相切，第四球的半径为 R' 并且与其它三个球都相切，那么，R 与 R' 之间的关系为（　　）。

(A) $R'>R$；　　(B) $R'<R$；

(C) $R'=\frac{2\sqrt{6}}{3}R$；　　(D) $R'=\frac{1}{3}R$。



解：如右图所示，设它们与桌面的接触点分别为 A，B，C，G，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形，G 为其中心。$\therefore$ $AG=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$。O_1AGO_4 为直角梯形。

由此导出 $(R+R')^2=(R-R')^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}R\right)^2$

$\therefore$ $R'=\frac{1}{3}R$，故应选"D"。

例 6 如图：二面角 α—AB—β 的平面角是锐角，点 $C\in\alpha$，$C\notin AB$，D 是 C 在 β 内的射影，点 $E\in AB$，且 $\angle CEB$

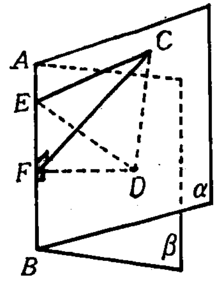
是锐角。那么(　　)。

(A) $\angle CEB>\angle DEB$;

(B) $\angle CEB=\angle DEB$;

(C) $\angle CEB<\angle DEB$;

(D) 这两个角大小不定。



解：据题意 $CD\perp\beta$，作 $DF\perp AB$ 于 F，据三垂线定理 $CF\perp AB$，在 $Rt\triangle CEF$ 与 $Rt\triangle DEF$ 中，$\operatorname{tg}\angle CEF=\dfrac{CF}{EF}$，$\operatorname{tg}\angle DEF=\dfrac{DF}{EF}$，　∵　$CF>DF$，

∴　$\operatorname{tg}\angle CEF>\operatorname{tg}\angle DEF$（正切函数在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上是增函数），故应选(A)。

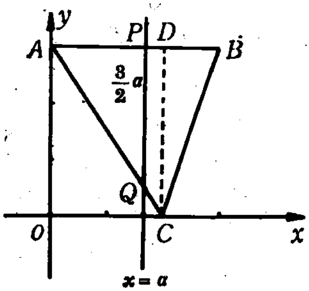
($\angle CEF=\angle CEB$，$\angle CDF=\angle CDB$)

例 7　在直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(0,3)$，$B(3,3)$，$C(2,\ 0)$。若直线 $x=a$ 将 $\triangle ABC$ 分割成面积相等的两部分，则实数 a 的值是(　　)。

(A) $\sqrt{3}$;　　　(B) $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(C) $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

(D) $2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



解：如图，做 $CD\perp AB$

则 $CD=3$，　$S_{\triangle ABC}=\dfrac{9}{2}$，

$AD=2\ BD=1$。故直线 $x=a$ 一定在 OA 与 CD 之间，设 $x=a$ 与 AB 与 AC 相交于 P、Q 两点，则 $AP=a$。则 $PQ=\frac{2}{3}a$。$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a\cdot a=\frac{9}{4}$，解之 $a=\sqrt{3}$。故应选（A）。

例 8 已知 m，n，x，$y\in R$，且 $m^2+n^2=a$，$x^2+y^2=b$，那么 $mx+ny$ 的最大值是（　　）。

(A) $\frac{1}{2}(a+b)$；　　(B) $\sqrt{ab}$；

(C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$；　　(D) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$。

解：设 $x=\sqrt{b}\cos\alpha$，$y=\sqrt{b}\sin\alpha$。

$$m=\sqrt{a}\cos\beta,\quad n=\sqrt{a}\sin\beta,$$

则
$$mx+ny=\sqrt{ab}\cos\alpha\cos\beta+\sqrt{ab}\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\sqrt{ab}\cos(\alpha-\beta)\leqslant\sqrt{ab}$$
。故应选(B)

例 9 已知 x_1，x_2 是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的两个实根，则 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值是（　　）

(A) 18；　(B) 19；　(C) 31；　(D) $\frac{50}{9}$。

解：据韦达定理 $x_1+x_2=k-2$。　$x_1\cdot x_2=k^2+3k+5$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19$；但不能盲目的选(B)。若选(B)就陷入了出题人故意设置的陷井。但必须注意到实根存在的这一隐蔽条件对参数 k 的判断作用：$\triangle=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\geqslant0$ 解得 $-4\leqslant k\leqslant-\frac{4}{3}$、故当 $k=-4$ 时，$x_1^2+x_2^2$ 最

大，其最大值为 18，故应选(A)。

例 10 已知函数 $f(x)=ax^2-c$，满足 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，则 $f(3)$ 满足(　　)。

(A) $7\leqslant f(3)\leqslant 26$　　(B) $4\leqslant f(3)\leqslant 15$

(C) $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$　　(D) $-\frac{38}{3}\leqslant f(3)\leqslant \frac{35}{3}$

解：据题意　$-4\leqslant a-c\leqslant -1$①　$-1\leqslant 4a-c\leqslant 5$③

$f(3)=9a-c$③。

设　$9a-c=m(a-c)+n(4a-c)$

比较系数 $\begin{cases} m+4n=9 \\ m+n=1 \end{cases}$　解之　$m=-\frac{5}{3}$　$n=\frac{8}{3}$

故 $9a-c=-\frac{5}{3}(a-c)+\frac{8}{3}(4a-c)$

$\therefore$　①$\cdot -\frac{5}{3}$ 得 $\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}a+\frac{5}{3}c\leqslant \frac{20}{3}$　　③

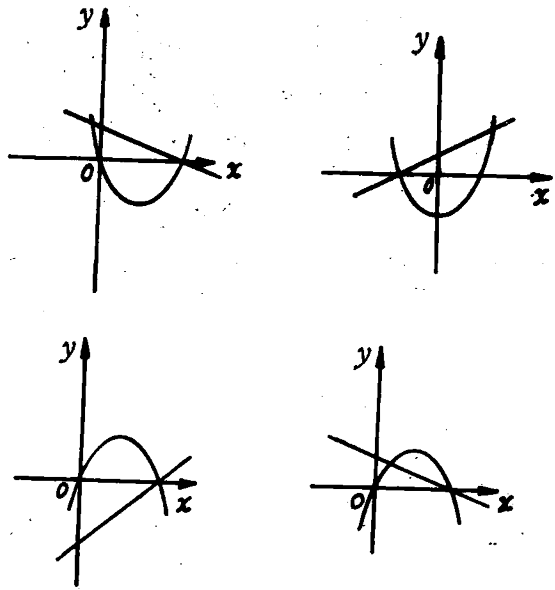
②$\cdot\frac{8}{3}$ 得 $-\frac{8}{3}\leqslant \frac{32}{3}a-\frac{8}{3}c\leqslant \frac{40}{3}$　　④

③＋④得 $-1\leqslant 9a-c\leqslant 20$　　故应选(C)。

二　淘汰法

淘汰法也叫做筛选法，有些题目从正面去解比较困难，那么我们可以从反面入手，发现矛盾，排除干扰。根据题设条件，把不合条件的选择支逐一给予否定，那么剩下的一个就是正确的结论。

例 11 下列各图中，$y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b$。($ab\neq 0$) 的图象可能是(　　)。



解：∵ $y=ax^2+bx$ 的图象必过原点，故先筛去(B)，$a>0$时，抛物线开口向上，直线斜率为正。故筛去（A），$a<0$时，抛物线开口向下，直线斜率为负，故筛去(C)，从而应选(D)。

例 12　方程 $x^2-1992x+1=0$ 的两个根，可能分别为（　）。

(A) 一椭园和一双曲线的离心率；

(B) 两抛物线的离心率；

(C) 一椭园和一抛物线的离心率；

(D) 两椭园的离心率。

解：据韦达定理：两根之和为 1992，两根之积为 1，两

根必有一大于1，一小于1。而椭园的离心率小于1，双曲线的离心率大于1，抛物线的离心率等于1。(*B*) 的离心率之积等于1，但其和为2，(*C*) 小于1的数与等于1的数之积小于1，故先排除(*B*)、(*C*)。两椭园的离心率之积小于1，故排除 (*D*) 应选 (*A*)。

例 13　$\lg(\cos x-1)^2$等于(　　)。

(A) $[\lg(\cos x-1)]^2$；　　(B) $2\lg(\cos x-1)$；

(C) $2\cos(\lg x)$；　　(D) $4\lg\left|\sin\frac{x}{2}\right|+2\lg 2$。

根据函数定义域 (*A*) (*B*) 中应有 $\cos x-1>0$ $\cos x>1$ 是不存在的，故先筛去。(*C*) 中要求 $x>0$ 是无保证的。也筛去。故应选(D)。

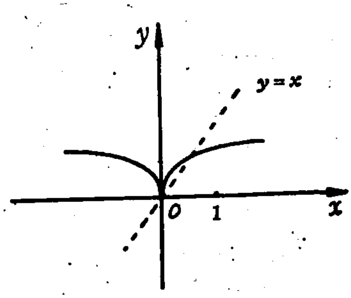
例 14　函数$y=x^{\frac{m}{n}}(m,\ n\in Z^+)$的图象如下图，则下面正确的是(　　)。

(A) n是奇数，m是偶数且$\frac{m}{n}<1$；

(B) m，n均是奇数$\frac{m}{n}<1$；

(C) n是奇数、m是偶数$\frac{m}{n}>1$；

(D) n是偶数，m是奇数$\frac{m}{n}<1$。



解：函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$故若m为奇数n为偶数，图象设有左半边，故先否去(D)，又因为图象关于y轴对称，m一定是偶数，否去(B)，又由于$x\in(0, 1)$时$x^{\frac{m}{n}}>x$故$\frac{m}{n}<1$，否去(C)，故应选(A)。

例 15　如果θ是第二象限角，且满足：$\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin\theta}$，那么$\frac{Q}{2}$是（　　）。

（A）是第一象限角；　　（B）是第三象限角；

（C）可能是第一象限角也可能是第三象限角；

（D）是第二象限角。

解：$\because$　θ是第二象限角，

$$\therefore\quad 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi, \qquad (1)$$

$$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2},$$

k为奇数时，$\frac{\theta}{2}$为第三象限角。

k为偶数时，$\frac{\theta}{2}$为第一象限角：

$$2n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2n\pi+\frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

$\therefore$　首先否去（D），

又$\because$　$\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin\theta}>0$。