LGB 理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

模糊集理论与方法

张振良 张金玲 殷允强 李扉 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

21 世纪高等学校数学系列教材

模糊集理论与方法

张振良　张金玲　殷允强　李　扉　编著

武 汉 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

模糊集理论与方法/张振良,张金玲,殷允强,李扉编著.—武汉:武汉大学出版社,2010.1

21世纪高等学校数学系列教材　理工类本科生

ISBN 978-7-307-07339-5

Ⅰ.模…　Ⅱ.①张…　②张…　③殷…　④李…　Ⅲ.模糊集—高等学校—教材　Ⅳ.O159

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第172780号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘　欣　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:通山金地印务有限公司

开本:787×1092　1/16　印张:17　字数:339千字　插页:2

版次:2010年1月第1版　　2010年1月第1次印刷

ISBN 978-7-307-07339-5/O·412　　定价:28.00元

内 容 简 介

本书系统地介绍了模糊集的基本理论与方法。内容包含格与模糊格、模糊集的基本理论、L 型模糊集、模糊关系、模糊逻辑、模糊推理、模糊控制、模糊决策、模糊线性规划以及模糊信息系统与知识获取等，每章的后面都配备了适量的习题。

本书可以作为数学、计算机科学、信息科学、管理科学专业的硕士生及高年级本科生的选修课教材，也可以供大学教师、模糊数学工作者和从事科研工作的科技工作者参考。

21 世纪高等学校数学系列教材

编　委　会

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议、策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材。旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学（福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一．在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争将该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量!

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

前　言

1965 年，美国控制论专家 L. A. Zadeh 在《Information and control》发表的开创性论文《Fuzzy sets》，创立了模糊集合论．模糊集合作为经典集合的推广，它概括了更加普遍，更加多样的数学概念，推广了数学理论的发展，形成了一门新的数学学科——模糊数学．使得经典数学的各个数学分支在更广阔、更深刻的意义下向前推进，形成了模糊数学的相应数学分支：模糊测度、模糊拓扑、模糊代数、模糊概率、模糊规划等．至今从模糊数学本身的基础理论到各个分支都形成了自己的理论框架和应用的理论基础．引起了国内外各领域，众多学者的关注．是从事研究的人员众多，成果显著、应用广泛的数学学科之一．

1973 年，L. A. Zadeh 又提出了用模糊语言描述系统的方法，并为模糊控制的实施提供了有效的方法．把模糊系统作为研究模糊性的内在规律，探讨模糊语言和模糊逻辑．在这方面，模糊数学与人工智能、知识工程、专家系统、神经网络等方面的有机结合，促进了计算机科学，多媒体技术、自动控制和信息的采集与处理等诸多技术的发展，更好地模拟人的思维，对客观事物进行识别、聚类、决策、评价、控制和优化等．在应用科学、管理科学、决策科学，包括理、工、农、医及社会科学等众多领域都具有广泛的应用．

1982 年，波兰数学家 Z. Pawlak 在《International Journal of Computer and Information Sciences》上发表的文章《Rough Sets》中，首次提出了一种处理不确定性现象的数学理论——粗糙集理论。该理论与同样处理不确定性现象的模糊理论的区别在于，该理论无需提供所需处理的数据集合之外的任何先验信息，所以模糊集理论和粗糙集理论的相结合，在处理不确定性问题时有很好的互补性。1990 年，Dubois. D 和 Prade. H 首先提出了模糊粗糙集模型，将论域上的等价关系推广到模糊等价关系，将被近似描述对象集推广到模糊集上。到 20 世纪 90 年代末期，模糊粗糙集模型在理论研究和实际应用中都取得了丰富的成果。模糊粗糙集理论在机器学习与发现、数据挖掘、决策支持与分析、专家系统、模式识别、智能控制等方面都具有广泛的应用。

本书系统地介绍了模糊集的基本理论，包括模糊集的分解定理、表现定理、扩张原理、模糊关系等基础内容，同时还介绍了模糊聚类、模糊评价、模糊决策、模糊规划等模糊集的应用方法。介绍了模糊逻辑、模糊推理，并以此为基础，阐述了模糊控制理论及其实现方法。最后介绍了粗糙集和模糊粗糙集的基本

理论，介绍了信息系统与模糊信息系统的属性约简方法。全书共分 10 章，第 1 章介绍了格和模糊格的基础知识，第 2 章、第 3 章和第 4 章介绍了模糊集的基本理论，第 5 章、第 6 章和第 7 章介绍了模糊逻辑、模糊推理和模糊控制的基本理论和应用方法。第 8 章、第 9 章介绍了模糊决策和模糊规划的理论与方法。第 10 章介绍了粗糙集与模糊粗糙集的基本理论和信息系统的属性约简方法。

本书与其他模糊集理论方面的书所不同的是，本书以格论为基础，在完全分配格上阐述模糊集理论，形成具有自身特色的理论体系。另外，在应用基础方面，本书涉及了模糊逻辑、模糊控制、模糊聚类、模糊评价、模糊决策、模糊规划以及模糊信息系统的属性约简等的理论基础和应用方法。是在介绍模糊集理论与方法方面较为全面的一本教材和参考书。

本书第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章由张振良编写；第 5 章、第 6 章由张金玲、殷允强编写；第 7 章、第 8 章、第 9 章由殷允强、李扉编写，第 10 章由李扉编写。全书由张振良统稿，张金玲编排。

在本书的编写过程中参考了张文修教授的《模糊数学引论》，罗承忠教授的《模糊集引论》，汪培庄教授和李洪兴教授的《模糊系统理论与模糊计算机》等著作。本书在编写和出版过程中，得到了武汉大学出版社理工事业部李汉保编辑的大力支持，得到了昆明理工大学津桥学院的关心和支持，借此机会，表示衷心感谢!

由于作者的学识和水平有限，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者和专家批评指正。

作　者

2009 年 8 月

目　录

第 1 章　格与模糊格

§1.1　集　　合

1.1.1　集合及其运算

集合概念是现代数学的最基本的概念. 我们把所考虑的对象的全体称为一个集合,也称为论域,记为 X. X 中的对象称为元素,记为 $x,y,\cdots$. 若 x 是 X 的元素,称为 x 属于 X,记为 $x\in X$;若 x 不是 X 的元素,称为 x 不属于 X,记为 $x\notin X$,或 $x\ \in X$. X 中的一部分元素组成的集合称为 X 的子集,记为 $A,B,\cdots$. 若 A 是 X 的子集,记为 $A\subseteq X$;若 A 不是 X 的子集,记为 $A\nsubseteq X$. 不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$. 空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

给定性质 P,$P(x)$ 表示 x 具有性质 P,所有具有性质 P 的元素汇集成一个集合 X,记为

$$X=\{x\mid P(x)\} \tag{1.1}$$

设 X 是论域,A,B 是 X 的两个子集,若 A 中的元素都是 B 中的元素,称为 A 包含于 B,或称为 B 包含 A,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

显然,$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x(x\in A)\rightarrow(x\in B)$,$A=B$ 定义为 $A\subseteq B$,$B\subseteq A$,即

$$A=B\Leftrightarrow\forall x(x\in A)\rightarrow(x\in B)\text{ 且 }\forall x(x\in B)\rightarrow(x\in A).$$

显然,$A\subseteq A$,$\varnothing\subseteq A$.

把论域 X 的每个子集看做一个元素,由 X 的某些子集组成一个新的集合,即集合的集合,称为集合族. 而 X 的所有子集组成的集合族称为 X 的幂集,记为 $P(X)$ 或 2^X,即

$$P(X)\triangleq\{A\mid A\subseteq X\} \tag{1.2}$$

由此,$A\subseteq X\Leftrightarrow A\in P(X)$.

定义 1.1.1　设 $A,B\in P(X)$,记

$$A\cup B\triangleq\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\} \tag{1.3}$$

$$A\cap B\triangleq\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\} \tag{1.4}$$

$$A'\triangleq\{x\mid x\notin A\} \tag{1.5}$$

分别称为 A 与 B 的并、交和 A 的余集.

定理 1.1.1 设 $A,B,C\in P(X)$，则并、交、余满足下列性质:

(1) 幂等律 $A\cup A=A,A\cap A=A$;

(2) 交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(3) 结合集 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(4) 吸收集 $A\cup(A\cap B)=A,A\cap(A\cup B)=A$;

(5) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(6) 同一律 $A\cup\varnothing=A,A\cap X=A$;

(7) 两极律 $A\cup X=X,A\cap\varnothing=\varnothing$;

(8) 对合律 $(A')'=A$;

(9) 对偶律 $(A\cup B)'=A'\cap B',(A\cap B)'=A'\cup B'$;

(10) 互补律 $A\cup A'=X,A\cap A'=\varnothing$.

证明从略.

集合的并、交可以推广到任意多个集合的情况，设 T 是指标集，$\forall t\in T$，$A_t\in P(X)$，记

$$\bigcup_{t\in T}A_t\triangleq\{x\mid \exists t\in T,x\in A_t\}\tag{1.6}$$

$$\bigcap_{t\in T}A_t\triangleq\{x\mid \forall t\in T,x\in A_t\}\tag{1.7}$$

特别地，指标集 $T=\varnothing$，则

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\varnothing$$

$$\bigcap_{t\in T}A_t=X$$

分配律和对偶律可以推广到无穷情况:

(5′) 分配律 $A\cup(\bigcap_{t\in T}A_t)=\bigcap_{t\in T}(A\cup A_t)$，

$A\cap(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t)$；

(9′) 对偶律 $(\bigcup_{t\in T}A_t)'=\bigcap_{t\in T}A_t'$，

$(\bigcap_{t\in T}A_t)'=\bigcup_{t\in T}A_t'$.

定义 1.1.2 设 $A,B\in P(X)$，记

$$A-B\triangleq\{x\mid x\in A,x\notin B\}\tag{1.8}$$

$$A\ominus B\triangleq(A-B)\cup(B-A)\tag{1.9}$$

分别称为 A 与 B 的差和对称差.

显然
$$A-B=A\cap B'\tag{1.10}$$

$$A\ominus B=(A\cup B)-(A\cap B)\tag{1.11}$$

设 $A\in P(X)$，X 的子集 A 可以用二值函数表示，当 $x\in A$ 时函数值为 1，当 $x\notin A$ 时函数值为 0，所以 X 的子集 A 可以用下列的函数唯一确定.

定义 1.1.3　设 $A \in P(X)$，函数 $X_A: X \to [0,1]$ 为

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{1.12}$$

称为 A 的特征函数.

特别地　　$X_X(x) = 1$，　$X_\varnothing(x) = 0$.

为了方便，简记 $X_A(x) \triangleq A(x)$. 由此，集合的包含、相等，并、交、余用特征函数分别表示如下：$\forall A, B \in P(X)$，则：

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, A(x) \leqslant B(x)$;

(2) $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, A(x) = B(x)$;

(3) $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$;

(4) $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$;

(5) $A'(x) = 1 - A(x)$.

其中"$\vee$"表示上确界"sup"，"$\wedge$"表示下确界"inf".

证明简单，从略.

同理，无穷多个集合的并、交用特征函数分别表示为，$\forall t \in T, A_t \in P(X)$，则：

(6) $(\bigcup_{t \in T} A_t)(x) = \bigvee_{t \in T} A_t(x)$;

(7) $(\bigcap_{t \in T} A_t)(x) = \bigwedge_{t \in T} A_t(x)$.

1.1.2　映射

定义 1.1.4　设 X, Y 是集合，如果存在一个法则 f，对于每一个 $x \in X$，通过法则 f 都有唯一确定的一个 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 是 X 到 Y 的一个映射，记为

$$f: X \to Y$$

X 称为映射 f 的定义域，$f(X)$ 称为 f 的值域；y 称为 x 在 f 作用下的像，记为 $y = f(x)$，而符号 $f: x \to y$ 表示 x 是 y 的原像.

特别地，映射 $I_X: X \to X, x \to x$ 称为 X 上的恒等映射或单位映射.

在现代数学中，映射与函数是同义词.

设 $f: X \to Y$，$\forall A \subseteq X$，记

$$f(A) \triangleq \{f(x) \mid x \in A\} \tag{1.13}$$

称为 A 在 f 作用下的像，显然 $f(A) \subseteq Y$. 特别地，$f(X)$ 称为映射 f 的像集，记为 $\mathrm{Im}f$. 一般地，$f(X) \subseteq Y$. $\forall B \subseteq Y$，记

$$f^{-1}(B) \triangleq \{x \in X \mid f(x) \in B\} \tag{1.14}$$

称为 B 在 f 作用下的完全原像，显然 $f^{-1}(B) \subseteq X$，$f^{-1}(Y) = X$.

注：f^{-1} 不是 Y 到 X 的一个映射，而是 Y 到 X 的一种关系.

定理 1.1.2　设 $f: X \to Y$，若 $A, B \in P(X)$，则：

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(2) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

证明 (1) $\forall y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow\exists x\in A\cup B, f(x)=y, \Leftrightarrow\exists x\in A, f(x)=y$,或 $\exists x\in B, f(x)=y. \Leftrightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$,故

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B).$$

同理证(2).

一般地,$f: X\to Y$,$\{A_t\}_{t\in T}$是 X 的子集族,则:

(3) $f(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}f(A_t)$;

(4) $f(\bigcap_{t\in T}A_t)\subseteq\bigcap_{t\in T}f(A_t)$.

定理 1.1.3 设 $f: X\to Y$,若 $A,B\in P(Y)$,则:

(1) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$;

(2) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$;

(3) $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$.

证明 (1) $\forall x\in f^{-1}(A\cup B)\Leftrightarrow f(x)\in A\cup B\Leftrightarrow f(x)\in A$ 或 $f(x)\in B\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)$ 或 $x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$,故 $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

同理证(2),现证(3).

(3) $\forall x\in f^{-1}(A-B)\Leftrightarrow f(x)\in A-B\Leftrightarrow f(x)\in A, f(x)\notin B\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A), x\notin f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$,故 $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$.

在(3)式中,取 $Y=A$,则得

(4) $$f^{-1}(B')=(f^{-1}(B))'.$$

一般地,$f: X\to Y$,$\{B_t\}_{t\in T}$是 Y 的子集族,则

(5) $$f^{-1}(\bigcup_{t\in T}B_t)=\bigcup_{t\in T}f^{-1}(B_t).$$

(6) $$f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t)=\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B_t).$$

定理 1.1.4 设 $f: X\to Y$.

(1) 若 $A\in P(X)$,则 $A\subseteq f^{-1}(f(A))$;

(2) 若 $B\in P(Y)$,则 $B\supseteq f(f^{-1}(B))$.

证明(1) $\forall x\in A\Rightarrow f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(A))$,故 $A\subseteq f^{-1}(f(x))$. 同理证(2).

定理 1.1.5 设 $f: X\to Y, g: Y\to Z$,定义 $g\circ f$ 为: $\forall x\in X, (g\circ f)(x)=g(f(x))$,则 $g\circ f$ 是 X 到 Z 的映射.

证明 $\forall x\in X$,令 $y=f(x)$,则 $y\in Y$,又令 $z=g(y)=g(f(x))$,则 $z\in Z$,即 $\forall x\in X$,都$\exists z\in Z$,使 z 和 x 对应. 现在证明这种对应的唯一性,假若$\exists z_1, z_2\in Z, z_1\neq z_2$,使 $z_1=(g\circ f)(x)=g(f(x))$, $z_2=(g\circ f)(x)=g(f(x))$,即 $z_1=g(y)$, $z_2=g(y)$,这与 g 是 Y 到 Z 的映射矛盾,故 $z_1=z_2$,即 x 在 $g\circ f$ 的作用下,像是唯一的,所以 $g\circ f$ 是 X 到 Z 的映射.

定义 1.1.5 设 $f: X\to Y, g: Y\to Z$,则称 $g\circ f: X\to Z, (g\circ f)(x)=g(f(x))$ 为 f 和 g 的复合映射.