邱继征 著

小波分析原理

科学出版社
www.sciencep.

－200

小波分析原理

邱继征　著

浙江工业大学专著与研究生
教材出版项目基金资助出版

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书包括小波变换、一元多分辨分析与正交小波、紧支集实小波、小波包、多元小波、双正交小波、样条小波、小波提升理论等发展较为成熟的小波分析基本内容。本书讲解透彻，证明细致，特别关注小波分析解决实际问题的原理。

本书不要求读者具有高深的数学基础，可供希望了解小波分析基本内容及原理的读者参考，也可作为研究生与高年级本科生的小波分析教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

小波分析原理/邸继征著. —北京: 科学出版社, 2009

ISBN 978-7-03-026106-9

I. 小… II. 邸… III. 小波分析-理论 IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 216203 号

责任编辑: 任 静 王志欣 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 赵 博 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010 年 1 月第一次印刷 印张: 16 3/4

印数: 1—3 500 字数: 325 000

定价: 40.00 元

前　言

小波分析是近年来迅速发展起来的一个数学分支。除在数学学科本身中的价值外，小波分析在许多非数学领域也有着广泛的应用。因而，小波分析的理论与方法受到了极大的关注，相关书籍也陆续出版，不少大学的一些专业，包括非数学专业的研究生、本科生都将其作为选修或必修课程。

现在，小波分析的基本理论正趋成熟，进入一个需要提炼和精化的阶段。

要进行这项工作，我们首先遇到的是概念问题。成熟的数学内容要求所涉及的概念必须明确，许多概念用定义给出，不能用定义表示的概念也尽量使其符号化。但对小波分析而言，实际应用 (指数学领域之外的应用) 伴随小波分析产生与发展的全过程，许多研究小波分析的学者甚至不属于数学专业，小波分析创始人之一的 Morlet 就是从事石油勘探信号处理的地球物理学家。因此，小波分析涉及的一些重要概念不是按照数学规律得到的，比如滤波、滤波器，原为物理学的概念，蕴含着处理波、函数和信息的方法与过程。不对后者有所了解，即使这些概念可以写做定义，看了也不能明白。概念问题需要我们给出合适的解决办法，否则必然严重影响读者对内容的掌握。

由于必须考虑小波分析的实际应用功能，所以应该让读者明白为什么小波分析能解决实际问题。换言之，应该让读者明白小波分析处理问题的原理。例如，用小波可以进行信号的消噪、图形和物体的边缘检测和轮廓与细节的提取，而这些作用实际上是滤波的翻版。称小波为数学中的望远镜和显微镜，也是对小波具有滤波作用的形象描述。但是，小波为什么和怎样起滤波的作用，从哪里看出小波是数学中的望远镜和显微镜？这些原理性问题都需要彻底搞清楚。

提炼和精化知识的方式有多种，但考虑到小波分析要为不同专业的学者服务，我们的提炼原则应该是：① 从浩瀚的资料中选取发展最成熟、应用最有效的部分；② 尽量采用浅显的研究方法。例如，同属小波分析系统的脊波、剪切波等还未发展成熟，不应选取。再如，许多小波分析研究文献中出现的 Z 变换，由复分析中 Laurent 级数 (即洛朗级数) 给出，数学专业以外的人士难以接受，利用 Z 变换进行讨论的方法不宜采用。

还有一点也要特别注意：由于作者考虑问题的角度不同，有关小波分析的不同资料对同一关系的表达方式也不同，这除了引起后续研究人员参阅的不便外，还引发了许多错误。例如，由于 Fourier 变换的不同定义和尺度方程不同的表达式引起有关公式的严重混乱就导致不少资料出现错误。错误使读者对内容心存疑虑，严重

影响学习与掌握，还可导致误用的不良后果。因此，要尽可能多地验证结果的正确性，而不能盲目相信参考资料。

本书即基于以上考虑而组织内容，呈现如下特点：

(1) 本书选取目前较为成熟的小波分析基本内容进行讨论，特别关注小波解决问题的原理，每章集中精力讲述主题的结构、原理，与主题无关的枝节不予讨论。本书中的很大一部分内容的原始结果无疑来自参考资料，但许多内容根据我们的目的给出了特别的表述，例如关于小波变换和小波级数如何进行滤波，低、高通滤波器的名称由何产生，都作了详细的阐述。

(2) 对于一些具有重要影响并有深刻背景的概念，本书不采用定义或其他简单的形式加以介绍，而是将其融于相关主题原理的阐述中，例如滤波的概念、代价函数的概念。尽量避免出现本书没有明确表述，凭读者猜测理解的概念、记号与结构。

(3) 为了使小波分析易于被不同专业人士学习和接受，全书在讲授方式上避开繁难的数学基础，希望具有高等数学基础的读者都可无障碍通读全书。第 4 章虽应用了代数几何观点，实际只涉及多项式方程组和线性方程组，也是容易接受的。

(4) 本书中凡是给出的正式证明，过程都十分细致，避免用显然、易知等词语掩盖实际上困难的证明。这样做的原因，一是希望本书能帮助有需要的读者掌握小波分析的基本研究方法与论证过程，二是巨细的推导可以避免错误的发生，使读者对结果放心并正确使用。需要说明，本书用到而未加证明的结果都经长期检验，是可以放心使用的。

本书 3~9 章都有笔者的见解与研究成果。特别地，第 3 章中关于小波为数学中的望远镜和显微镜的解读，未见诸其他文献；第 4 章的大部分内容为笔者的研究成果；第 5 章中给出了小波包中元素的明显表达式、最优小波包基的选取，用自上而下的方法进行；第 7 章中给出一些新的关系与公式。

本书内容曾为浙江工业大学理学院等院系四届研究生讲授，研究生银俊成、梁冰、王莉、姚素霞、焦淑云、石智慧、宋丛威、梁静、冯成祥、胡爱提出过宝贵的意见。

作　者

2009 年 3 月于浙江工业大学理学院

目　　录

第1章　绪　论

本章 1.1 节介绍本书涉及的部分数学概念与知识。1.2 节介绍 Fourier 级数，主要考虑 Fourier 级数理论中与以后介绍的小波级数有联系的内容，讨论 Fourier 级数的点态收敛、平均收敛与几种表述方式，试解释引入小波级数的原因。1.3 节介绍 Fourier 变换。小波分析理论离不开 Fourier 变换，Fourier 变换与小波变换也有很好的对应关系。此节内容有：Fourier 变换、逆变换与反演公式，Fourier 变换的性质，Fourier 级数与 Fourier 变换的对比，时-频窗、测不准原理，窗口 Fourier 变换，Fourier 变换的不同定义与多元 Fourier 变换。1.4 节介绍采样定理与滤波器。本节介绍的采样定理、滤波的数学表示，根据采样值对信号进行滤波，滤波器响应函数与滤波器等内容，除了本身的价值外，与小波分析理论中的相关内容对应，是小波分析中一些重要概念与方法的来源，是理解利用小波可以进行滤波的原理的重要先导。

1.1　相关数学概念与知识

1.1.1　空间 $L^p(R)$

设 $L^p(R)$ 为使 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p\mathrm{d}t<\infty$ 成立的自变量为实数的实值或复值函数 f 的全体。其中, $1\leqslant p<\infty, R\in(-\infty,\infty)$。

注意, 当 f 为复值函数时，存在实值函数 f_1,f_2, 使得 $f(t)=f_1(t)+\mathrm{i}f_2(t)\quad(t\in R)$, 因而

$$|f(t)|=\sqrt{f_1^2(t)+f_2^2(t)},\quad t\in R$$

由于集合 $L^p(R)$ 中任一元 f 的常数倍仍为其中元，任二元 f,g 的和仍为其中元，故 $L^p(R)$ 为一线性空间。对任意 $f\in L^p(R)$，定义其范数为

$$\|f\|_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

称为 L^p 范数, 则 $L^p(R)$ 成为一赋范线性空间。对任意 $f,g\in L^p(R)$，定义距离

$$\|f-g\|_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-g(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 $L^p(R)$ 成为一距离空间。特别地，对 $p=2$，再定义内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

则 $L^2(R)$ 称为一内积空间，其中，$\overline{g(t)}$ 为 $g(t)$ 的共轭复数。以上定义的范数与内积的关系为 $\|f\|_2=\sqrt{\langle f,f\rangle}$。以下见到 $L^2(R)$，则意味着该空间为同时具有如上定义的范数、距离和内积的空间。$L^1(R)$ 又记为 $L(R)$。

1.1.2 $L^p(R)$ 中函数性态与函数的伸缩平移

对任意 $f\in L^p(R)$，由 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p\mathrm{d}t<\infty$ 知

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{-\infty}^{\alpha}|f(t)|^p\mathrm{d}t=0,\qquad \lim_{\beta\to\infty}\int_{\beta}^{\infty}|f(t)|^p\mathrm{d}t=0$$

不妨考虑后者 (非数学学者跳过)。由后者可知，$\forall\varepsilon>0,\delta>0,\exists N$，当 $\beta>N$ 时，

$$m\{t:t\in[\beta,\infty),\quad |f(t)|^p>\delta\}<\varepsilon$$

其中，m 为 Lebesgue 测度。若不然，$\exists\varepsilon_0>0,\delta_0>0,\forall n$，存在 $\beta_n>n$，使得

$$m\{t:t\in[\beta_n,\infty),\quad |f(t)|^p>\delta_0\}\geqslant\varepsilon_0$$

则

$$\int_{\beta_n}^{\infty}|f(t)|^p\mathrm{d}t\geqslant\int_{\{t:t\in[\beta_n,\infty),|f(t)|^p>\delta_0\}}|f(t)|^p\mathrm{d}t\geqslant\varepsilon_0\delta_0$$

与 $\displaystyle\lim_{\beta\to\infty}\int_{\beta}^{\infty}|f(t)|^p\mathrm{d}t=0$ 矛盾。

通俗地说，随着 x 值的增大，使 $|f(x)|$ 大的 x 构成的集合测度减小。同样，当 $x<0$ 时，随着 $-x$ 值的增大，使 $|f(x)|$ 大的 x 构成的集合测度减小。

总之，大体上说，$|f(x)|$ 的值在一个长度有限的区间外接近 0，$|f(x)|^p$ 在该区间外的积分值也很小。

如此，根据需要，对给定 $\varepsilon>0$，可取实数 $\alpha,\beta,\alpha\leqslant\beta$，使

$$\int_{-\infty}^{\alpha}|f(t)|^p\mathrm{d}t<\varepsilon,\quad \int_{\beta}^{\infty}|f(t)|^p\mathrm{d}t<\varepsilon$$

且对区间 $[\alpha,\beta]$ 外几乎所有的 x，$|f(x)|$ 值不能很大，可以认为 $|f(x)|$ 的值在 $[\alpha,\beta]$ 外接近 0，称 $[\alpha,\beta]$ 为 $f(x)$ 的有效区间，$f(x)$ 定义于该区间的部分称为有效部分。

当函数 f 存在中心 x^*, 半径 Δ_f(1.3.4 节中定义) 时可以将 f 的有效区间取为 $[x^*-\Delta_f,x^*+\Delta_f]$。

对 $0<a<1$，与 $f(x)$ 比较，$f(ax)$ 的有效区间变长，$f(ax)$ 的有效部分图形 (对复值函数，图形指实、复部图形) 变宽 (称为伸)，对 $a>1$，$f(ax)$ 的有效区间

变短，有效部分图形变窄 (称为缩)， 该函数在有效区间上呈现突变势态。对实数 $a>0,b>0$，$f(ax+b)=f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)$ 的有效区间为 $f(ax)$ 的有效区间向 x 轴负向平移 $\frac{b}{a}$ 个单位，$f(ax+b)$ 的图形也向 x 轴负向平移相同单位。

对 $a>0,b<0$，$f(ax+b)$ 的有效区间为 $f(ax)$ 的有效区间向 x 轴正向平移 $\left|\frac{b}{a}\right|$ 个单位，$f(ax+b)$ 的图形也向 x 轴正向平移相同单位。由于此时无论对区间或图形，向 x 轴正向平移 $\left|\frac{b}{a}\right|$ 个单位，也可称向 x 轴负向平移 $\frac{b}{a}$，因此可以说 $f(ax+b)$ 的有效区间为 $f(ax)$ 的有效区间向 x 轴负向平移 $\frac{b}{a}$，$f(ax+b)$ 的图形为 $f(ax)$ 的图形向 x 轴负向平移 $\frac{b}{a}$。

对 $-1<a<0$，$f(ax)$ 的图形与 $f(-ax)$ 的图形关于 y 轴对称，$f(ax)$ 的有效区间与 $f(-ax)$ 的有效区间关于原点对称。因此，与 $f(x)$ 比较，$f(ax)$ 的有效区间变长，$f(ax)$ 的有效部分图形变宽，对 $a<-1$，$f(ax)$ 的有效区间变短，有效部分图形变窄，$f(ax+b)$ 的有效区间为 $f(ax)$ 的有效区间向 x 轴负向平移 $\frac{b}{a}$，$f(ax+b)$ 的图形为 $f(ax)$ 的图形向 x 轴负向平移 $\frac{b}{a}$。

总之，当 $|a|<1$ 时，与 $f(x)$ 比较，$f(ax)$ 的有效区间变长，$f(ax)$ 的有效部分图形变宽，当 $|a|>1$ 时，$f(ax)$ 的有效区间变短，有效部分图形变窄。$f(ax+b)$ 的有效区间为 $f(ax)$ 的有效区间向 x 轴负向平移 $\frac{b}{a}$，$f(ax+b)$ 的图形为 $f(ax)$ 的图形向 x 轴负向平移 $\frac{b}{a}$。

称上述 a 为函数 f 的伸缩系数是合理的。

今后为方便叙述，将根据有效部分图形的形状对函数进行称谓，例如，比较而言，有效部分图形低宽的函数称为低宽函数，有效部分图形高窄的函数称为高窄函数，有效部分图形平缓的函数称为低频函数，而起伏剧烈频繁的函数称为高频函数。

需要注意：引入函数的有效区间、有效部分等概念，主要为了把握函数起重要作用部分的形状和位置，有效区间的长度没有本质的重要性。

1.1.3 内积空间中的正交及相关问题

为方便起见，记 $Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，$Z_+=\{0,1,2,\cdots\}$，$Z_{N_1,N_2}=\{N_1,N_1+1,\cdots,N_2-1,N_2\},N_1,N_2\in Z,N_1<N_2$。

定义 1.1 设 X 为内积空间，又由 $\|a\|=\sqrt{\langle a,a\rangle}(a\in X)$ 给出范数。

称 X 中的二元 a,b 正交，若 $\langle a,b\rangle=0$。

称 X 中元组成的序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$(简记为 $\{a_n\}$) 为 X 的一个标准正交系，若其中任一元范数为 1，任二元正交。若对任意 $x\in X$，又有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k\right\|=0$$

即

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n a_n$$

其中 α_n 为实数，则称 $\{a_n\}$ 为 X 的一个标准正交基。

X 中的一元 a 与一子集 A 正交，若 $\langle a,b\rangle=0$ 对任意 $b\in A$ 成立。X 中的二子集 A,B 正交，若 $\langle a,b\rangle=0$ 对任意 $a\in A,b\in B$ 成立。

对 X 中彼此正交的子集序列 (由 X 的子集组成的序列)$\{A_n\}$(可为有限个。为方便叙述，有限个时也称序列)，若对 X 中任一元 x，皆可唯一地表示为

$$x=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n\in A_n,\quad n=1,2,\cdots$$

则称 X 为 $\{A_n\}$ 的直交和，记为

$$X=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n\oplus\cdots=\bigoplus_{n=1}^{\infty}A_n$$

其中，在 $\{A_n\}$ 个数为无限时，$x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 表示

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}a_k\right\|=0$$

容易理解，X 中彼此正交的子集序列也可为 $\{A_n\}_{n\in Z},\{A_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 等，此时，相应的表述也不难给出。例如对后者，若 $A_{j,k}\subset X$ 彼此正交且对 X 中任一元 x，皆可唯一地表示为

$$x=\sum_{j\in Z}\sum_{k\in Z}a_{j,k},\quad a_{j,k}\in A_{j,k},\quad j,k\in\mathbf{Z}$$

则称 X 为 $\{A_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 的直交和，记为

$$X=\bigoplus_{j,k=-\infty}^{\infty}A_{j,k}$$

其中，$x=\sum\limits_{j\in Z}\sum\limits_{k\in Z}a_{j,k}$ 表示

$$\lim_{j_1,k_1\to-\infty,j_2,k_2\to\infty}\left\|x-\sum_{j=j_1}^{j_2}\sum_{k=k_1}^{k_2}a_{j,k}\right\|=0$$

对 X 的子集 $A,B,A\subset B$，记与 A 中每个元正交的 B 中元的集合为 $A_B^{\perp}$，即 $A_B^{\perp}=\{b:\langle a,b\rangle=0,a\in A,b\in B\}$，称为 A 在 B 中的正交补。而记 $A_X^{\perp}=A^{\perp}$。

1.1.4 赋范线性空间中的闭集等概念

对任一赋范线性空间 X，若 A 为 X 的子集，

$$\{a_n\} \subset A, \quad a \in X, \quad \lim_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$$

且 $\{a_n\}$ 中有无穷多项互不相同，则称 a 为 A 的聚点。A 的聚点全体记为 A'，称为 A 的导集，$\overline{A} = A' \bigcup A$ 称为 A 的闭包。$\overline{A} = A$ 时，称 A 为闭集。若 A, B 为 X 的子集，$\overline{A} = B$，则称 A 在 B 中稠密。

由于线性空间 X 上必定义加法和数乘运算，即对任意 $x, y \in X, x + y \in X$，任意 $x \in X, \alpha \in F, \alpha x \in X$，其中 F 为一数域。故任意线性空间 X 必伴随一个数域 F，赋范线性空间当然也如此。设 X 为一赋范线性空间，F 为伴随的数域，若 A 为 X 的子集，令

$$\mathrm{span}A = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n : \alpha_i \in F, a_i \in A, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant n < \infty\}$$

称为由 A 生成的子空间。当

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \right\| = 0, x \in X, a_i \in A, \alpha_i \in F$$

时，

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n \in \overline{\mathrm{span}A}$$

反之，若 $X = \overline{\mathrm{span}A}$，则 X 中任一元 x 必可表示为 A 中元构成的级数。其中集合上方横线表示该集合的闭包。

赋范线性空间 X 中的序列 $\{a_n\}$ 称为一个基本列，如果任给 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $m, n > N$ 时 $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$。

若对赋范线性空间 X 中的任一基本列 $\{a_n\}$，都有 $x \in X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - a_n\| = 0$，即 $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$，则称 X 为完备的赋范线性空间或 Banach 空间。

若内积空间 H 按照定义 1.1 给出的范数成为 Banach 空间，则称其为 Hilbert 空间。

Hilbert 空间 H 中的序列 $\{a_n\}$ 称为 H 的一个框架 (有的资料称标架)，若存在正数 A, B，对任意 $x \in H$ 有

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, a_n\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2$$

特别的，若 $A = B$，则称 $\{a_n\}$ 为一个紧框架。

若 $\{a_n\}$ 为 H 的一个框架，则对任意 $x \in H$，序列 $c=\{c_n\}=\{\langle x, a_n\rangle\}$ 必属于 l^2，且 $\|c\|_{l^2}$ 与 $\|x\|$ 满足上述不等式，大小相互牵制，其中 $l^2=\left\{c=\{c_n\}: \sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<\infty\right\}$，$\|c\|_{l^2}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$。此时我们称 $\|c\|_{l^2}$ 与 $\|x\|$ 等价。

Hilbert 空间 H 中的序列 $\{a_n\}$ 称为 H 的一个 Riesz 基，若 $H=\overline{\operatorname{span}\{a_n\}}$，且存在正数 A, B，对任意 $c=\{c_n\} \in l^2$ 有

$$A\|c\|_{l^2} \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n\right\| \leqslant B\|c\|_{l^2}$$

反之，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n = a \in H$，则 $c=\{c_n\} \in l^2$，且上述不等式成立。

其余必要的数学概念，将在出现处即时介绍。

1.1.5　和式变换与积分变换技巧

这里说的和式变换与积分变换，指的是对求和变量和积分变量进行的变换，熟知的换元积分就是积分变换。由于我们会不时进行和式 (包括级数) 与积分变换，因此需要熟悉这两种变换的一些常见技巧。

两种变换有类似之处。

积分变换有如下特点：积分上下限加同一数，积分变量减该数，积分值不变，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\mathrm{d}(x-c) = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\mathrm{d}x$$

积分上下限与积分变量同时变号，积分值不变，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{-b} f(-x)\mathrm{d}(-x) = -\int_{-a}^{-b} f(-x)\mathrm{d}x$$

注意当积分上下限皆为无穷时，上下限同加一有限数仍为原无穷，故对任意实数 c 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+c)\mathrm{d}x$$

和式变换也有相同的情形，即有

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l}, \quad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=-m}^{-n} a_{-k}$$

注意当和式上下限皆为无穷时，对任意整数 l 有

$$\sum_{k\in Z} a_k = \sum_{k\in Z} a_{k+l}$$

还需注意

$$\sum_{k\in Z} a_k = \sum_{k=\infty}^{-\infty} a_k = \sum_{k\in Z} a_{-k}$$

1.2 Fourier 级 数

Fourier 级数与 Fourier 变换是 Fourier 分析的基本内容。我们在此介绍 Fourier 分析，原因有二: 其一, 这些内容可以作为小波级数与小波变换的引导，由此可以回味小波分析的渊源；其二，小波分析中的一些结论及其证明，不能离开 Fourier 分析。

定义 1.2 对定义于 $R=(-\infty,\infty)$ 有关积分存在且周期为 2π 的实值或复值函数 f，级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \tag{1.1}$$

称为 f 的 Fourier 级数，其中

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x, & k=0,1,2,\cdots \\ b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, & k=1,2,\cdots \end{cases} \tag{1.2}$$

称为 f 的 Fourier 系数。

讨论级数 (1.1) 的收敛是十分复杂的问题。有例子表明，对一些函数 f, 级数 (1.1) 处处发散，还有例子表明，存在函数 f(甚至是连续函数), (1.1) 即使在一些点 x 收敛，其和也不等于 $f(x)$。

级数有几种意义下的收敛，如点态收敛 (也称逐点收敛)，一致收敛，依某范数收敛等。依 L^p 范数收敛又称平均收敛。

目的所限，以下仅介绍 Fourier 级数理论中与本书主要内容密切相关的结果。

1.2.1 Fourier 级数的点态收敛

先介绍有界变差函数的概念。

定义 1.3 若 f 定义于 $[a,b]$, 且可表示为两个不减函数之差，则称 f 在 $[a,b]$ 上具有有界变差，或称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数。

定义于闭区间的单调函数在区间内部任一点 x 的左右极限存在：

$$f(x \pm 0) = \lim_{h \to 0+} f(x \pm h)$$

区间左端点右极限存在，右端点左极限存在，因此，$[a,b]$ 上的有界变差函数亦然。

若 f 为以 2π 为周期的函数，对任意实数 a 有

$$R = \bigcup_{k \in Z} [a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi]$$

则由周期性知，f 在每个 $[a+2k\pi, a+2(k+1)\pi]$ 上的性质都是相同的。故对这样的函数，可仅给出其在某一长为 2π 的闭区间 (例如 $[-\pi,\pi]$) 上的性质假定。

定理 1.1　设 f 以 2π 为周期，且为 $[-\pi,\pi]$ 上的有界变差函数，则级数 (1.1) 在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛于 $[f(x+0)+f(x-0)]/2$。即有

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{1.3}$$

对任意 $x \in [-\pi,\pi]$ 成立，其中

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \tag{1.4}$$

为级数 (1.1) 的前 $2n+1$ 项部分和，为 n 阶三角多项式。

特别强调 (1.4) 式对 $x = -\pi, \pi$ 成立，例如

$$\lim_{n \to \infty} S_n(-\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2}$$

注意 f 定义于 R，并不仅仅定义于 $[-\pi,\pi]$，又 f 以 2π 为周期，故当 $x>0$ 充分小时，

$$f(-\pi-x) = f(-\pi-x+2\pi) = f(\pi-x)$$

当 $x \longrightarrow 0+$ 时，便得

$$f(-\pi-0) = f(\pi-0)$$

同理可得

$$f(-\pi+0) = f(\pi+0)$$

所以当 $x = -\pi, \pi$ 时，级数 (1.1) 收敛于值

$$\begin{aligned} \frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2} &= \frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} \\ = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} &= \frac{f(\pi+0)+f(-\pi-0)}{2} \end{aligned}$$