

儿童数学认知结构的 发展与教育

孙昌识 姚平子 著

人民教育出版社

儿童数学认知结构
的
发展与教育

ERTONG SHUXUE RENZHI JIEGOU DE FAZHAN YU JIAOYU

孙昌识 姚平子 著

人民教育出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

儿童数学认知结构的发展与教育/孙昌识, 姚平子著.

北京: 人民教育出版社, 2004

ISBN 7-107-18275-7

I. 儿...

II. ①孙... ②姚...

III. 数学—儿童教育—研究

IV. 01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 140957 号

人民教育出版社 出版发行

(北京沙滩后街 55 号 邮编: 100009)

网址: <http://www.pep.com.cn>

北京天宇星印刷厂印装 全国新华书店经销

2005 年 3 月第 1 版 2005 年 3 月第 1 次印刷

开本: 890 毫米×1 240 毫米 1/32 印张: 8.75

字数: 213 千字 印数: 0 001~2 000 册

定价: 15.10 元

前言

QIANYAN



数学能力有不同的层次：一种是作为智力的基本成分之一的数学能力，这是处在深层结构中的数学能力，其发展变化较为缓慢，多为心理测量学家和认知发展心理学家研究的对象；另一种是在掌握了基本的数学概念以后，形成数学认知结构时所产生的数学能力，这是处在中层结构中的数学能力，其发展变化比前者略快，为本书的研究对象；最后一种是在学习数学知识、技能后所产生的数学能力，其发展变化比前二者更快，是教育心理学或数学教学心理学研究的对象。但这种区分是相对的，在实际心理活动中，这几个层次是密切联系着的。

当前中小学数学教育的改革，已成为世界各国关注的焦点问题。因为数学教学不仅仅要学生学会必要的一些计算技能技巧，为进一步学习打好基础，更重要的是通过数学教学可以促进学生逻辑思维的发展。数学思维的特征是简洁、推理有序、逻辑连贯、准确、灵活、敏捷以及高度的抽象性。这一系列的思维品质是从事各项工作，特别是那些高速发展的新科技所不可缺少的心素质。但是，目前数学教学的现状还有不尽如人意之处。

我们从1983年初即开始着手研究、探索儿童数学认知结构发展变化的规律，并试图在此基础上推动中小学数学教学的改革。本书是研究组十多年来实验研究的结果，其中也介绍了国内

外近年来有关的研究。

本研究成果的取得，与已故的我国著名儿童心理学家朱智贤教授和刘范教授的指引和鞭策是分不开的。我们的研究课题也可以说是两位教授生前研究课题的一个子课题，从这种意义上说，这项工作两位教授事业中的一个小部分。我们正是在两位教授为科学献身和对教育事业无限热爱的精神的鼓舞下完成这项工作的。

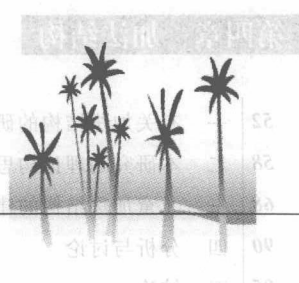
十多年来的实验研究过程中，各所实验学校的领导、教师的大力支持，令我们难以忘怀。正是由于他们的热诚合作、辛勤劳动、无私奉献，才有了今天的研究成果。在此，谨代表研究组全体成员向他们表示衷心的感谢。还要感谢那些一直关心我们撰写、出版此书的朋友们。

由于作者的学识有限，错误在所难免，望同仁与读者不吝赐教。

作者

目 录

MULU



前 言

第一编 理论依据

第一章 绪 论

- 3 | 一 特殊的研究领域——儿童数学知识的获得与发展
- 4 | 二 特殊的分析方法——概念分析
- 5 | 三 特殊的研究对象——儿童数学认知结构的发展
- 8 | 四 特殊的研究任务——揭示儿童数学认知结构发展变化的规律

第二章 认知结构

- 10 | 一 从具体经验谈起
- 13 | 二 认知结构理论
- 18 | 三 研究儿童数学认知结构发展的基本构思

第三章 儿童认知发展理论：皮亚杰学派和新皮亚杰学派

- 20 | 一 皮亚杰认知发展理论
- 39 | 二 新皮亚杰学派

第二编 实验研究

第四章 加法结构

- 52 | 一 有关加法结构的研究
- 58 | 二 本研究的理论构思
- 68 | 三 儿童加法结构的建构与发展的实验研究
- 90 | 四 分析与讨论
- 95 | 五 结论
- 96 | 六 问题讨论
- 100 | 七 教育建议

第五章 乘法结构Ⅰ(初步探索)

- 105 | 一 吉尔德·维格诺德论乘法结构
- 110 | 二 心理学实验研究
- 122 | 三 小结

第六章 乘法结构Ⅱ(度量同构)

- 126 | 一 本研究的设想
- 132 | 二 在整数范围内乘法结构的建构与发展
- 142 | 三 在分数范围内乘法结构的建构与发展
- 153 | 四 在比例概念水平上乘法结构的建构与发展

第七章 乘法结构Ⅲ(面积和体积)

- 176 | 一 有关儿童掌握面积、体积概念的研究概况
- 181 | 二 实验研究

第八章 基本运算和简便运算

- 189 | 一 加减基本运算
- 205 | 二 乘法模型
- 208 | 三 简便运算
- 225 | 四 本章研究的理论意义和对数学教学的建议

第三编 理论与应用

第九章 理论研究

- 229 | 一 关于数学认知结构和儿童数学认知结构的发展阶段
- 238 | 二 儿童认知发展规律的特殊性和普遍性
- 243 | 三 儿童认知发展的循环一致性
- 248 | 四 阶段转换机制
- 252 | 五 对未来研究的展望

第十章 理论的应用

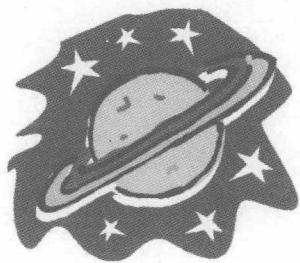
- 254 | 一 教师在数学教学中必须具有统帅全局的战略思想
- 257 | 二 教师必须促进学生实现心理发展的两次飞跃
- 263 | 三 根据小学生思维发展特点,充分利用线段图和乘法结构表
- 263 | 四 高度重视数学概念的教学
- 264 | 五 根据认知结构建构的过程,采用发展法的教学方法
- 265 | 六 让儿童自己独立思维

主要参考文献



第一编

理论依据





特殊的研究领域——儿童数学知识的获得与发展

在心理学的研究中可以看到，人们的认知是受内容制约的。心理学家们深知这一点，所以在他们的研究中，为了排除被试的特殊的知识经验的影响，采用的调查材料常常是与专门的知识经验无关的测题，以探寻心理活动的普遍规律。通过这种理论研究所获得的理论模型具有较高的理论价值，这是毋庸置疑的，但它不能有效地指导学生解决那些在学校各科学习中所碰到的诸多问题。

今天，在认知心理学一般理论得到长足发展的情况下，已有条件在认知心理学和认知发展心理学的普遍规律指导下，深入细致地研究各个特殊领域的实际问题，揭示出其特殊的规律，有效地指导各个领域的实践活动。同时这种研究对丰富和发展认知心理学和认知发展心理学的普遍规律，也具有不可忽视的作用。本研究就是在认知心理学、认知发展心理学所揭示的普遍规律指导下，研究儿童数学知识的获得与发展。以前在皮亚杰(J. Piaget)的研究中虽然涉及数学的一些概念(如数、分数、面积、体积……)，但他的研究目的在于分析儿童的认知特征，探索儿童认知发展的普遍规律。我们的研究对象和分析问题的方法与皮亚杰的研究不同。

特殊的分析方法——概念分析

概念分析是分析心理活动内容的作用，分析知识和数学教学在儿童心理发展中的重要作用的一种方法。

首先，在研究中，对数学知识的内容和结构作心理学分析，因为它是儿童数学认知发展的重要外因，在一定程度上制约着儿童解题时的心理活动和心理的发展。儿童数学认知结构的发展与数学教材体系、教材呈现顺序、教学方法……有密切关系。

美国学者基伦（Kieren, 1976）和莱什（Lesh, 1979）等人，通过概念分析方法研究学生有理数的获得时，认为学生要真正掌握有理数概念，必须掌握有理数的七个子结构。它们是：

- （1）分数表示部分与整体的关系；
- （2）比表示两个量之间的关系；
- （3）比率表示两个量之间关系的一种新的量；
- （4）商表示有理数与除法之间的关系，即 a/b 作为有理数，可解释为 a 除以 b ；
- （5）线性坐标把有理数解释为数轴上的点，表示有理数集是实数集的子集；
- （6）小数表示有理数与十进制系统的关联；
- （7）算子表示有理数是函数，每一个有理数都是一个变换。

部分与整体结构是有理数概念发展的基础结构，也是有理数其他六个子结构教学的基础和起点。中学生在获得有理数概念过程中遭到挫折，其原因可归之为小学时期未能掌握分数概念。概念分析无疑为数学教学和学生数学认知结构发展的实验研究提供了极为有价值的研究方法。

其次，概念分析要求收集学生在解决数学问题时的一系列心理活动。透过学生解题的各种认知行为表现（解题的成功与失败），分析其问题表征、所使用的程序和策略等等，在此基础上

进一步推断学生有关数学概念的理解水平与有关知识的整合程度。因为上述学生的内部因素制约学生解题的成功与失败,只有这种分析才可以深入了解学生数学概念的获得与发展的漫长过程。

概念分析是从数学知识的内容和结构如何制约儿童认知活动的心理学角度所进行的研究分析,所以这种分析与数学家研究与形的规律时所作的分析有所不同。

由于概念分析涉及具体知识领域,因此与信息加工心理学的一般作业分析不同。同时,也与皮亚杰的儿童认知特征分析不同。皮亚杰对儿童数学概念的发展进行了长时期的大量研究,用符号逻辑描述儿童各个时期认知发展的特点,反映儿童认知发展的普遍规律。儿童数学认知发展过程中所表现出来的概念间(或反映同一概念的作业间)的差异,被皮亚杰当做没有意义的“水平差异”而忽略。概念分析和皮亚杰的认知特征分析的主要区别在于,概念分析强调数学知识和数学教学在儿童数学认知发展中的重要作用,而皮亚杰轻视教学作用。皮亚杰所忽视的“水平差异”,恰恰是概念分析重视的问题。

虽然概念分析、作业分析和儿童认知特征分析各有不同,但是在研究儿童数学认知结构发展时这三种分析方法相辅相成。在用概念分析时,并不排斥作业分析和认知特征分析,正如心理学的基础理论(包括现代认知心理学的理论)和儿童心理发展理论是儿童数学认知发展研究的基础理论一样,作业分析和儿童认知特征分析在我们的研究中也是一种基础的分析方法。

三 特殊的研究对象——儿童数学认知结构的发展

我们的理论观点与皮亚杰和新皮亚杰学派的观点类似,认为儿童数学认知的发展就是儿童数学认知结构的发展。不同年龄儿童的数学认知结构有质的差别,从而决定儿童数学认知结构的发

展具有阶段性的特点。

人类认知活动高度复杂，具有多侧面、多形态、多水平、多联系的特点，众多的心理学家各自从不同的研究任务出发，研究认知结构，因而对认知结构的界定所说不一，至今尚无公认一致的定义。

由于本研究的对象、任务和分析方法的特殊性，笔者从局部（数学领域）、一个侧面为数学认知结构下一个可操作性的定义：儿童数学认知结构乃是儿童掌握数学知识后，在头脑中建立相应的心理结构。数学认知结构所含的心理成分有数学概念系统、表征系统和相应的加工系统（加工机制）。

（一）数学概念系统

人们所获得的数学知识，多是在以概念（词）为节点的语义网络中储存的，人们头脑中的概念有个重要的特征，即它们都是被嵌入到一个有组织概念体系中。个别数学概念的意义总离不开其他的数学概念及其相互关系，表现出系统的整体特征。例如，分数概念的意义离不开乘法、除法、被除数、除数、分子、分母、整体与部分等概念。而分数概念的进一步发展及巩固，又离不开自然数、小数、百分数、比例等概念，与它们建构更复杂的关系网络，形成更完美的数学认知结构。概念体系是从概念的内在网络中获得意义；反之，概念内在网络也是从它们赖以存在的概念体系中获得自身的意义。在数学认知结构中，由于某些概念在概念体系网络中具有重要作用，表现为它与其他概念建立更多的联系而处于中心地位（这既与数学知识体系、教材体系有关，也与个体数学经验有关）。

在小学学生的数学认知结构中，有些数学概念与加减法有密切关系，对这种概念体系，称之为加法结构（后面有一章专门介绍）。有些数学概念与乘除法有密切关系，称之为乘法结构（后

面有四章专门介绍)。

(二) 表征系统

表征是客观事物在头脑中的再现。再现有动作、形象(表象)和概念三种主要形式,三种形式是紧密联系着的。在相应概念尚未建立以前,儿童多以动作或表象来表征客观事物。我们的研究表明,以表象来表征数学知识在儿童数学认知结构中占有重要地位。在一项“5~13岁儿童面积概念的认知发展”实验研究中,问小学生什么是面积,四年级学生(10~11岁)有近10%的人回答为一个矩形的表面。这恰好说明这些小学生是以矩形的表象来表征面积的。数学教育家创造出许多直观教学用具,如线段图、数轴、图表等,一旦为学生所掌握,就能为新概念的建构提供有力的认知工具。因为它既直观形象,又能表示抽象的数量关系,易为儿童所接受。

概念和概念系统以及它们的表征系统,相当于认知心理学所说的陈述性知识。

(三) 加工系统

培根有一句名言:知识就是力量。知识是前人思考的结晶。知识之所以有力量,就在于知识中蕴涵着解决有关问题的智力活动方式。如三角形的面积公式为 $\frac{1}{2}a \cdot h$ (a 表示底的长度, h 表示高的长度),学习这一数学知识,不仅要懂得和记住这一公式,而且要会使用这一公式计算各种三角形的面积。也就是说要掌握蕴涵在这一公式中的算法,在头脑中形成一定的智力活动方式。例如要计算某一三角形的面积,就要找出它的底和高的长度(二者度量单位要一致),求出它们的积,再乘以 $1/2$ (或除以2)。由于是求积,三个因子中哪两个先乘都可以(根据乘法交换律)。



(3) 研究促进学生数学认知结构发展的各种因素。

(4) 揭示加法结构和乘法结构的形成过程和规律。

综上所述，我们的研究所走的是一条独特的路线。这项研究涉及的是特殊的数学知识领域，可以说是发展心理学家尚未系统地研究过的一个领域。虽然有些心理学家的研究曾涉及一些特殊知识领域，但由于研究目的不同，所采用的分析方法也不同。我们采用的方法主要是概念分析，它是由我们的研究对象（数学认知结构）和任务决定的，所以揭示儿童数学认知结构的发展过程和规律是我们研究的重要特征。