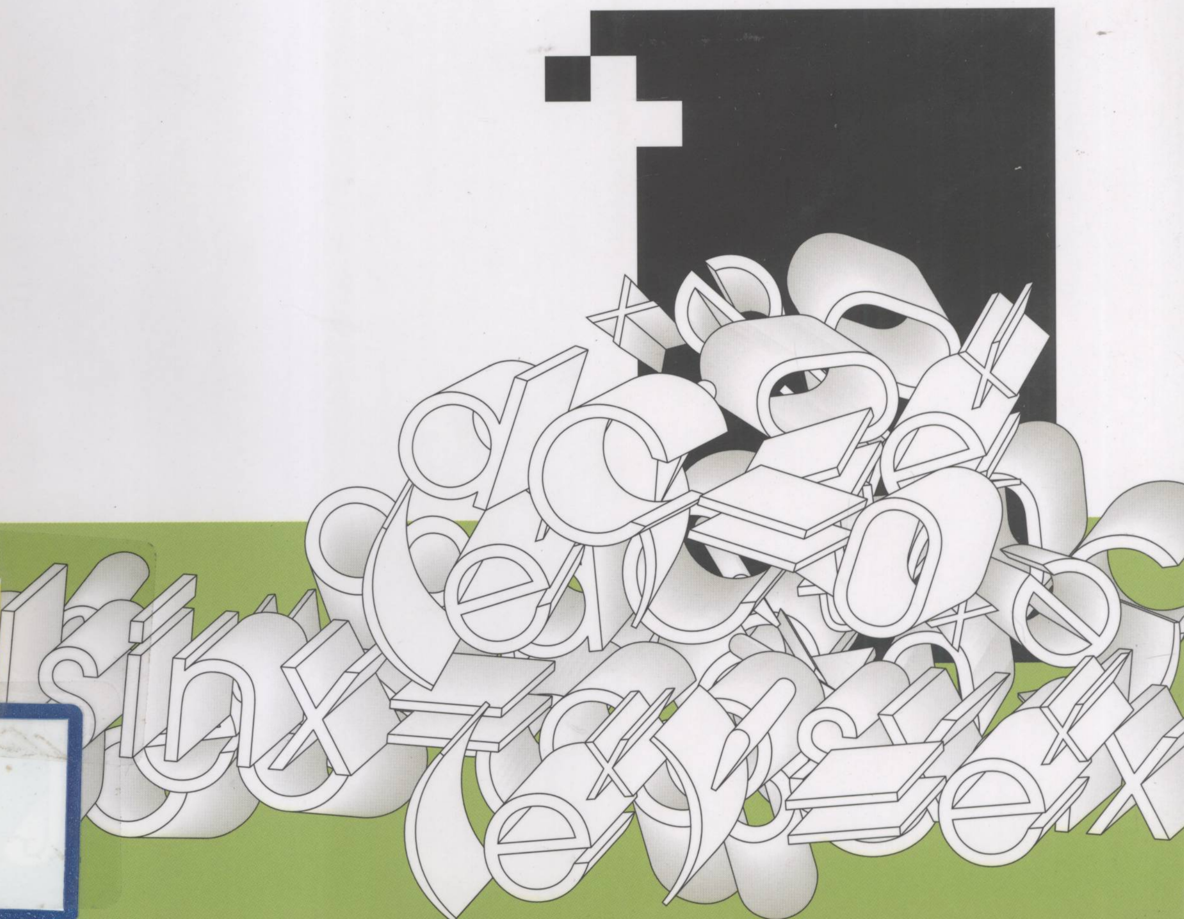
# 微积分（第二版）

## （上）

# CALCULUS

主编 王国政 王婷

西南财经大学出版社



# 微积分

（上）

# CALCULUS

(第二版)


主编：王国政　王　婷

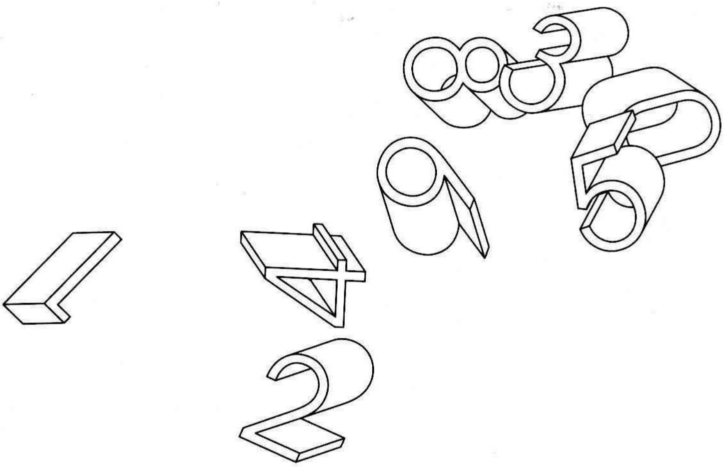
编委：赵海玲　秦春艳

张高勋　周　霞

邓畏平　葛丽艳



西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分．上册/王国政，王婷主编．—2版．—成都：西南财经大学出版社，2009.8

ISBN 978-7-81138-499-4

Ⅰ．微…　Ⅱ．①王…②王…　Ⅲ．微积分—高等学校—教材　Ⅳ．0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第145562号

微积分(上)(第二版)

主编：王国政　王婷

责任编辑：邓克虎
封面设计：穆志坚
责任印制：封俊川

| | |
|---|---|
| 出版发行： | 西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号) |
| 网　　址： | http://www.bookcj.com |
| 电子邮件： | bookcj@foxmail.com |
| 邮政编码： | 610074 |
| 电　　话： | 028-87353785　87352368 |
| 印　　刷： | 四川森林印务有限责任公司 |
| 成品尺寸： | 170mm×240mm |
| 印　　张： | 14 |
| 字　　数： | 265千字 |
| 版　　次： | 2009年8月第2版 |
| 印　　次： | 2009年8月第1次印刷 |
| 印　　数： | 1—5000册 |
| 书　　号： | ISBN 978-7-81138-499-4 |
| 定　　价： | 28.00元 |

# 前 言

高等数学是普通高等院校本、专科各专业普遍开设的一门公共基础课程。它既是学习线性代数、概率论与数理统计等后续课程的基础,也是在自然科学和经济技术等各领域中应用广泛的数学工具。本书是根据教育部颁发的《经济数学基础教学大纲》编写的,其适用性强、浅显适中,适合普通高等院校经济与管理类专业的学生使用,亦可供有志学习本课程的读者选用。

本书在编写上力求内容适度、结构合理、条理清晰、循序渐进,文字叙述方面力求简明扼要、深入浅出。

本书具有如下特点:

(1)在满足教学要求的前提下,淡化理论推导过程;

(2)语言精简严谨,篇幅较传统教材要少,但内容基本概括,且有一定的深度;

(3)章节安排符合认知规律,语言通俗易懂,既便于教师讲授,也易于学生阅读、理解;

(4)注重理论联系实际,增加了大量数学在经济等方面应用的例子,以更好地培养学生解决实际问题的能力;

(5)每一章都有丰富的练习题,便于学生练习。

本书在不定积分与定积分的处理上与其他微积分教材略有区别,主要采用由浅入深的介绍方法,尽可能让读者便于掌握。

本书的作者是长期工作在教学一线的专业教师,具有丰富的教学经验。本书编写的分工如下:第一、二章由赵海玲、秦春艳共同编著,第三章由王婷编著,第四、六章由张高勋、邓艮平、葛丽艳共同编著,第五章由周霞编著,王婷负责全书的统稿和部分修订工作,王国政负责全书的策划、审稿工作。

编写本书的目的,是试图为一般院校经济与管理类专业的学生提供一本比较适合的教材。由于编者学识有限,加上时间仓促,本书疏漏与错误之处在所难免,恳请读者不吝批评与指正。

**编者**

**2008 年 7 月**

# 目 录

# 1 函数

## 1.1 实数

### 1.1.1 实数集

微积分学主要是在实数范围内研究函数,那什么是实数呢?这一节我们来复习一下有关实数的一些知识.

(1)整数和有理数

最简单的数就是**自然数**,如:

$$1,2,3,4,5,6,\cdots$$

我们可以用这些自然数计算有多少本书,有多少个朋友,有多少钱等.如果加入负数和零,就可以得到**整数**:

$$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$$

当我们测量长度、重量或电压时,仅有整数是不够的.还应将整数拓展,使得在测量时更加精确.因而需要考虑整数的商(比),如:

$$\frac{3}{4},\frac{-7}{8},\frac{21}{5},\frac{19}{-2},\frac{16}{2},\frac{-17}{1}$$

类似这样的数,我们称之为**分数**.

【注意】①这里的$\frac{16}{2}$和$\frac{-17}{1}$通常写成整数 8 和 $-17$.因为根据除法的定义,它们是等同的.

②类似$\frac{5}{0}$和$\frac{-9}{0}$这样的形式,没有任何意义,即除数不能为零.

所有可以写成$\frac{m}{n}$(其中 $m$ 和 $n$ 是整数,且 $n\neq0$)形式的数,称为**有理数**.

是不是有理数就足以表示任意长度呢?不是的.在公元前 15 世纪古希腊人发现了这个惊人的问题.他们发现,在直角三角形中,当两条直角边长度都为 1 时,斜边长度为$\sqrt{2}$,而$\sqrt{2}$不能表示成两个整数比的形式.因此,$\sqrt{2}$是非有理数(一般称为无理数).类似地,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt[3]{7}$,$\pi$ 都是无理数.

(2)实数

有理数和无理数统称为**实数**.

实数与数轴上的点是一一对应的. 通常,用一个字母或数字表示某个实数,同时表示以此实数为坐标的数轴上的对应点. 比如,数 $a$ 与点 $a$,数$\sqrt{5}$与点$\sqrt{5}$等.

所有以上讨论过的数的分类都有相应的符号表示:**N** 表示自然数的集合,**Z** 表示整数的集合,**Q** 表示有理数的集合,**R** 表示实数的集合. 它们之间的关系是:

$$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$$

其中"$\subseteq$"表示集合间的包含关系,读作"包含于". "$A\subseteq B$"表示集合 $A$ 中的每个元素都在集合 $B$ 中.

(3)任意和存在

许多命题的正确性取决于变量的取值. 例如,命题"$\sqrt{x}$是一个有理数"的正确性取决于 $x$ 的值. 当 $x=1,4,9,\frac{4}{9},\frac{10\ 000}{49}$时,该命题是正确的;当 $x=2,3,77,\pi$ 时,该命题就不正确. 有些命题,如"$x^2\geqslant0$",对任意实数 $x$ 都成立;而有些命题,如"$x$ 是大于 2 的素数(即只能被 1 及本身整除的整数)",只对某些特定的 $x$ 成立. 我们用 $P(x)$ 表示 $x$ 值使得其成立的一个真命题.

当所有 $x$ 的取值使得命题 $P(x)$ 为真时,我们就说"对任意(或所有)的 $x$,有 $P(x)$ 成立". 至少有一个 $x$ 的值使得$P(x)$成立,我们就说"存在 $x$ 使得 $P(x)$成立. "这里有两个重要的量词"任意(或所有)"和"存在",在数学上分别记作: $\forall$和$\exists$.

**例 1** 判断下列命题的真假.

(1)对 $\forall x,x^2>0$.

(2)$x<0\Rightarrow x^2>0$.

(3)对 $\forall x$, $\exists y$,使得 $y>x$.

(4) $\exists y$,使得对 $\forall x$,有 $y>x$.

**解** (1)假. 若取 $x=0$,则 $x^2=0,x^2>0$ 不成立.

(2)真. 若 $x$ 为负,则 $x^2$ 为正.

(3)真. 对于任意一个实数 $x$,只要取 $y=x+1$ 即可.

(4)假. 假设存在一个最大的实数 $y$. 令 $x=y+1$,则 $x>y$,这与 $y$ 是最大实数的假设相矛盾.

### 1.1.2 不等式

(1)区间

①开区间

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

②闭区间

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

③半开区间

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

④无穷区间

$$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}=\{x\mid x\leqslant b\},$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}=\{x\mid x<b\},$$

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}=\{x\mid a\leqslant x\},$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}=\{x\mid a<x\},$$

$$R=(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.$$

通常,将开区间、闭区间、半开区间和无穷区间统称为**区间**. 区间可以在数轴上表示出来,如图 1-1 所示.

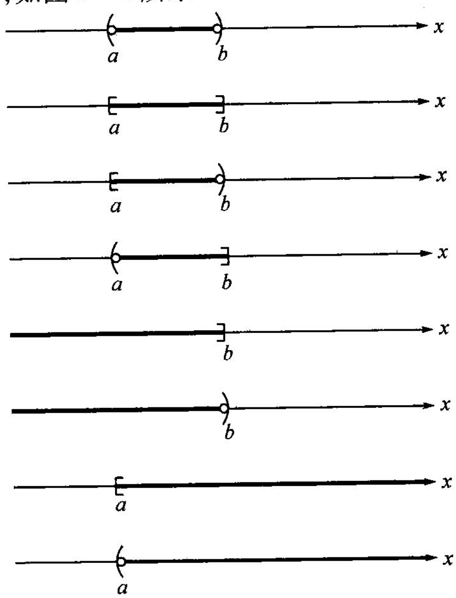



图 1-1

(2)邻域

设 $\delta$ 为某一正数,称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域,记为 $U(x_0,\delta)$ 或 $U_\delta(x_0)$(如图 1-2 所示),$x_0$ 为该邻域的中心,$\delta$ 为该邻域的半径.

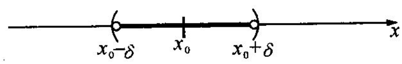



图 1-2

点 $x_0$ 的邻域表示成不等式形式为:

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

或

$$|x-x_0|<\delta$$

点 $x_0$ 的邻域去掉中心 $x_0$ 后的集合为：

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$$

称其为点 $x_0$ 的去心邻域（或空心邻域），记为 $U^0(x_0,\delta)$ 或 $U_\delta^0(x_0)$（如图 1－3 所示）. 用不等式表示为：

$$0<|x-x_0|<\delta$$

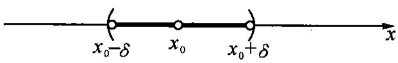



图 1－3

开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为**点 $x_0$ 的左邻域**；开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为**点 $x_0$ 的右邻域**.

（3）不等式.

不等式有三个重要特性：

①不等式两端同时加上同一个数，不等号方向不变.

②不等式两端同时乘以一个正数，不等号方向不变.

③不等式两端同时乘以一个负数，不等号方向改变.

**例 2** 解不等式 $4x-3<6x+4$.

**解** $4x-3<6x+4$

$4x<6x+7$ （加 3）

$-2x<7$ （加 $-6x$）

$x>-\dfrac{7}{2}$ （乘以 $-\dfrac{1}{2}$）

**例 3** 解不等式 $-2<3x+4\leqslant 5$.

**解** $-2<3x+4\leqslant 5$

$-6<3x\leqslant 1$ （加 $-4$）

$-2<x\leqslant\dfrac{1}{3}$ （乘以 $\dfrac{1}{3}$）

当 $x>a$ 时，线性因式 $x-a$ 是正数；当 $x<a$ 时，线性因式 $x-a$ 是负数. 这样，表达式 $(x-a)(x-b)$ 由正变为负，或由负变为正就在点 $a$ 和点 $b$ 处. 我们称使因式为零的点为**分割点（分点）**. 它们是确定二次不等式或更复杂不等式解集的关键.

**例 4** 解二次不等式 $x^2+x<12$.

**解** 和解二次方程类似，将非零的常数和未知数移到不等式同一侧.

$x^2+x<12$

$x^2+x-12<0$ （加 $-12$）

$$(x+4)(x-3)<0$$

其中 $-4,3$ 是分割点,它们将实数轴分成三个区间 $(-\infty,-4)$,$(-4,3)$,$(3,+\infty)$. 在每个区间内表达式 $(x+4)(x-3)$ 都有确定的符号,要么是正号,要么是负号. 结果发现,只有区间 $(-4,3)$ 内的所有点使得表达式 $(x+4)(x-3)$ 为负数,则不等式 $(x+4)(x-3)<0$ 的解集为 $(-4,3)$.

**例 5** 解不等式 $\frac{x+1}{x-2}\geqslant -1$.

**解** 首先移项得

$$\frac{x+1}{x-2}+1\geqslant 0$$

整理,得

$$\frac{2x-1}{x-2}\geqslant 0$$

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-2}\geqslant 0$$

上式不能在不等式两边直接乘以 $(x-2)$,因为 $(x-2)$ 的符号不能确定. 我们发现分子和分母的分割点 $\frac{1}{2}$ 和 2 使得分式的符号发生改变,而且在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 和区间 $(2,+\infty)$ 内该分式的符号为正;在 $\frac{1}{2}$ 处等于零;在 2 处没有意义. 因此,该不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 或 $(2,+\infty)$,表示成集合的并,即为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup(2,+\infty)$.

**例 6** 解不等式 $x(x-1)^2(x-4)\leqslant 0$.

**解** 分割点 $0,1,4$ 将数轴分成四个区间:$(-\infty,0)$,$(0,1)$,$(1,4)$,$(4,+\infty)$. 通过检验每个区间可知,在开区间 $(0,1)$,$(1,4)$ 内表达式 $x(x-1)^2(x-4)$ 为负数,在端点 $0,1,4$ 外表达式的值都为零. 所以不等式的解集为 $[0,4]$.

**例 7** 解不等式 $2.2<\frac{2}{x}<2.4$.

**解** 由不等式可知未知数 $x$ 的符号为正,因此,不等式两端同时乘以 $\frac{x}{2}$,不等号的方向不变. 故有

$$1.1x<1<1.2x$$

该不等式为**联不等式**(即由两个及以上不等式联合而成表示变量之间的关系). 在解联不等式的时候,将联不等式分解为两个或多个不等式,然后求

这些不等式解集的交集，即为原来联不等式的解集. 因此有：

$$\begin{cases}1.1x<1\\1<1.2x\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x<\dfrac{1}{1.1}\\\dfrac{1}{1.2}<x\end{cases}$$

所以，原不等式的解集为$\frac{1}{1.2}<x<\frac{1}{1.1}$.

### 1.1.3 绝对值

在计算过程中经常会用到绝对值的知识，读者必须掌握相关的内容. 实数 $x$ 的**绝对值**表示为$|x|$，其定义为：

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\-x, & x<0\end{cases}$$

例如，$|5|=5$，$|0|=0$，$|-2|=-(-2)=2$.

由定义可知，对任意实数 $x$ 有：①$|x|\geqslant 0$；②$|-x|=|x|$.

绝对值的几何意义是：表示点与点之间的距离. 例如，$|x|$表示点 $x$ 与原点的距离；$|x-a|$表示点 $x$ 与点 $a$ 的距离.

(1)绝对值的性质

①$|a|\geqslant 0$；$|a|=|-a|$.

②$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

③$|ab|=|a|\cdot|b|$

④$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$，$(b\neq 0)$.

⑤$|a+b|\leqslant|a|+|b|$.（三角不等式）

⑥$|a-b|\geqslant||a|-|b||$.

(2)绝对值不等式

绝对值不等式，顾名思义，就是含有绝对值的不等式. 例如，$|x|>2$，$|x|<2$，$|x-1|>3$ 等. 由绝对值的几何意义可知，$|x|<2$ 表示 $x$ 与原点的距离小于 2. 也就是说，$x$ 既要大于 $-2$ 又要小于 2，即 $-2<x<2$. 而$|x|>2$ 表示 $x$ 与原点的距离大于 2，即 $x<-2$ 或 $x>2$. 一般地有：

$$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a\quad(a>0)\tag{1-1}$$

$$|x|>a\Leftrightarrow x<-a\text{ 或 }x>a\quad(a>0)\tag{1-2}$$

在解绝对值不等式时，可以利用以上两个等价关系去掉绝对值符号.

**例 8** 解不等式$|x-1|>3$，并解释其几何意义.

**解** 由(1-2)式,则有

$$|x-1|>3 \Leftrightarrow x-1<-3 \text{ 或 } x-1>3$$

即

$$x<-2 \text{ 或 } x>4$$

则原不等式的解集为$(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$.

绝对值$|x-1|$表示$x$与1的距离,故不等式表示$x$与1的距离大于3. 因此,$x$在$-2$的左侧或在4的右侧,即$x<-2$或$x>4$.

**例9** 解不等式$|2x-3|\leqslant 1$.

**解** 由(1-1)式,则有

$$-1\leqslant 2x-3\leqslant 1$$

$$2\leqslant 2x\leqslant 4$$

$$1\leqslant x\leqslant 2$$

则原不等式的解集为$[1,2]$.

通常,希腊字母$\delta$(*Delta*),$\varepsilon$(*Epsilon*)表示一个很小的正数. 我们看以下两个例题.

**例10** 设$\varepsilon$为某一正数,证明$|x+3|<\frac{\varepsilon}{2}\Leftrightarrow|2x+6|<\varepsilon$,即$x$与$-3$的距离小于$\frac{\varepsilon}{2}$,当且仅当$2x$与$-6$的距离小于$\varepsilon$.

**证明**

$$\begin{aligned}
|x+3|<\frac{\varepsilon}{2} &\Leftrightarrow 2|x+3|<\varepsilon && (\text{乘以}2)\\
&\Leftrightarrow |2||x+3|<\varepsilon && (|2|=2)\\
&\Leftrightarrow |2(x+3)|<\varepsilon && (|a|\cdot|b|=|ab|)\\
&\Leftrightarrow |2x+6|<\varepsilon
\end{aligned}$$

**例11** 设$\varepsilon$为某一正数. 证明存在一个正数$\delta$,使得$|x-2|<\delta\Leftrightarrow|5x-10|<\varepsilon$.

**证明**

$$\begin{aligned}
|5x-10|<\varepsilon &\Leftrightarrow |5(x-2)|<\varepsilon\\
&\Leftrightarrow 5|x-2|<\varepsilon && (|ab|=|a|\cdot|b|)\\
&\Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{5} && (\text{乘以}\tfrac{1}{5})
\end{aligned}$$

因此,取$\delta=\frac{\varepsilon}{5}$,有

$$|x-2|<\delta\Leftrightarrow|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}\Leftrightarrow|5x-10|<\varepsilon.$$

## 1.2 函数的概念

函数是微积分学的基本概念之一,是微积分学的研究对象.

在同一个自然体系和过程中,往往有几个变量在同时发生着变化,这几个变量不是独立存在的,而是相互影响的. 例如在任何一个确定的地点,一天之中的气温 $T$ 是随着时间 $t$ 不断变化的,在一天 24 小时之中的任一确定时间都有确定的温度与之对应,现实世界中广泛存在着这种类型的相互依赖关系,这正是函数概念的背景.

**定义 1.1**　设 $D$ 是一个非空集合,若存在一个对应法则 $f$,使得对于任意 $x \in D$,存在唯一确定的值 $y$ 与之对应,则称对应法则 $f$ 为定义在集合 $D$ 上的一个函数,称 $x$ 为自变量,$y$ 为因变量.

函数是一种对应关系,使得一个集合(称为定义域,记为 $D$ 或 $D_f$)中每一个元素 $x$,都有另一个集合中唯一的值 $y$ 和它相对应. 我们称这个由全体函数值 $y$ 构成的集合为函数的值域,通常记为 $Z$ 或 $Z_f$.

### 1.2.1　函数表示法

函数通常用一个单独的字母 $f$(或 $g$、$h$、$F$)表示. 习惯上,我们常把函数记为 $f(x)$,表示函数 $f$ 在 $x$ 处(或点 $x$)的函数值. 如,令 $f(x)=x^3-4$,则

$$f(2)=2^3-4=4$$
$$f(-1)=(-1)^3-4=-5$$
$$f(a)=a^3-4$$
$$f(a+h)=(a+h)^3-4$$

**例 1**　设 $f(x)=x^2-2x$,求下面各式.

(1) $f(4)$　　　(2) $f(4+h)$

(3) $f(4+h)-f(4)$　　　(4) $[f(4+h)-f(4)]/h$

**解**　(1) $f(4)=4^2-2\times 4=8$

(2) $f(4+h)=(4+h)^2-2\cdot(4+h)=8+6h+h^2$

(3) $f(4+h)-f(4)=(4+h)^2-2\cdot(4+h)-8=6h+h^2$

(4) $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{6h+h^2}{h}=6+h$

**例 2**　设 $g(x)=\dfrac{1}{x}$,求 $[g(a+h)-g(a)]/h$.

**解**
$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}=\frac{\dfrac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h}$$
$$=\frac{-h}{(a+h)a}\cdot\frac{1}{h}=\frac{-1}{(a+h)a}=\frac{-1}{a^2+ah}$$

### 1.2.2　函数的定义域和值域

函数的实质是一种对应关系,这种对应关系是联系定义域和值域的纽带. 例如,定义函数 $F(x)$ 为:$F(x)=x^2+1$,定义域为 $\{-1,0,1,2,5\}$,则值

域为$\{1,2,5,26\}$.

从函数的定义我们可以看到,函数概念有两个要素:定义域和对应关系.如果两个函数的定义域相同,对应关系相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

在实际问题当中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的,例如,圆面积公式$S=\pi r^2$的定义域为$D=(0,+\infty)$.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,我们约定,函数的定义域就是自变量所能取的使得函数表达式有意义的一切实数所组成的集合,通常称为自然定义域.

具体表示一个函数时,必须明确指明函数的定义域和对应关系(但是自然定义域常常不明确表出,可根据函数表达式自行判断).例如,分式函数的定义域为全体实数中去掉使得分母为零的点后所成的集合;函数为偶次方根时,其定义域为使被开方的式子非负的点所成的集合;对数函数的定义域是使真数为正的点组成的集合;有限个函数经四则运算而得到的函数,其定义域为这有限个函数的定义域的交集,并除去分母为零的点.

**例3** 求下列函数的自然定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$　　　　(2) $g(t)=\sqrt{9-t^2}$

(3) $h(w)=\dfrac{1}{\sqrt{9-w^2}}$　　　　(4) $\varphi(x)=\sqrt{x-3}+\dfrac{2}{x-5}$

**解** (1)函数$f(x)$的自然定义域就是全体实数中去掉使得分母为零的点,即$x=3$.因此,自然定义域为$\{x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 3\}$.

(2)函数$g(t)$的自然定义域就是全体实数中去掉使得被开方数为负的点,即$9-t^2\geqslant 0$,即$|t|\leqslant 3$.因此,自然定义域为$\{t\in\mathbf{R}$ 且 $|t|\leqslant 3\}$,或者写成区间$[-3,3]$.

(3)函数$h(w)$的自然定义域就是全体实数中去掉使得被开方数为负的点和分母为零的点,即$9-w^2>0$,即$|w|<3$.因此,自然定义域为$\{w\in\mathbf{R}$ 且 $|w|<3\}$,或者写成区间$(-3,3)$.

(4)函数$\varphi(x)$的定义域是表达式中$\sqrt{x-3}$和$\dfrac{2}{x-5}$自然定义域的交集.$\sqrt{x-3}$的自然定义域为$\{x|x\geqslant 3\}$;$\dfrac{2}{x-5}$的自然定义域为$\{x|x\neq 5\}$.因此,函数$\varphi(x)$的定义域为$\{x|x\geqslant 3\}\cap\{x|x\neq 5\}$,即$\{x|x\geqslant 3$ 且 $x\neq 5\}$.表示成区间为$[3,5)\cup(5,+\infty)$.

### 1.2.3 分段函数

在实际应用中我们经常遇到这样的函数:在其定义域的各个不相交的子集上,函数分别用不同的表达式表示,这类函数称为**分段函数**.

【注意】分段函数在整个定义域上是一个函数. 另外,分段函数的定义域是每个子集的并集.

**例 4** 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**,一般记为 $f(x)=\operatorname{sgn}x$,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $Z=\{-1,0,1\}$. 事实上:

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

**例 5** 设 $x$ 为任一实数,不超过 $x$ 的最大整数记为 $[x]$,例如,$[0.75]=0$,$[\sqrt{3}]=1$,$[-1]=-1$,$[-3.5]=-4$. 一般地有 $[x]=n, x\in[n,n+1)$,$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$若把 $x$ 看成自变量,则有函数

$$f(x)=[x]$$

称其为**取整函数**,定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为整数集 $\mathbf{Z}$.

## 1.3 函数的几种特性

### 1.3.1 函数的单调性

**定义 1.2** 设函数 $f(x)$ 在某区间 $D$ 上有定义,对于任意的 $x_1,x_2\in D$,且 $x_1<x_2$.

(1)若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上单调增加.

(2)若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上单调减少.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数,使得函数 $f(x)$ 单调的区间称为单调区间.

例如,函数 $f(x)=x^2$,在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调递增函数,在 $(-\infty,0]$ 上是单调递减函数,在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

### 1.3.2 函数的有界性

**定义 1.3** 设函数 $f(x)$ 在某区间 $D$ 上有定义,若存在常数 $M>0$,使得对任意的 $x\in D$,恒有

(1)若 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有界,否则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上无界;

(2)若 $f(x)\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有上界;

(3)若 $f(x)\geqslant -M$,则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有下界.

显然,有界函数必有上界和下界;反之,既有上界又有下界的函数一定有界.

例如:$y=\sin x$,由于$|\sin x|\leqslant 1$,所以$y=\sin x$在定义域$\mathbf{R}$上是有界函数.而函数$y=x^2$在$\mathbf{R}$上虽然有下界,但无上界,因此无界;但是在区间$[-1,1]$上,因为$x^2\leqslant 1$,因此函数$y=x^2$在区间$[-1,1]$上有界.

### 1.3.3 函数的奇偶性

**定义 1.4** 设函数$f(x)$在某区间$D$上有定义,且$D$关于原点对称,若对任意的$x\in D$,恒有

(1) $f(-x)=f(x)$,则称函数$f(x)$为偶函数;

(2) $f(-x)=-f(x)$,则称函数$f(x)$为奇函数.

例如,函数$f(x)=x^2$是偶函数,$f(x)=x^3$是奇函数,而函数$f(x)=\sin x+\cos x$是非奇非偶函数.

由定义可知:

(1)奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于$y$轴对称;

(2)若在区间$D$上,函数$f(x)$和$g(x)$同为奇函数或同为偶函数,则函数$f(x)\pm g(x)$的奇偶性与原来函数的奇偶性相同,函数$f(x)g(x)$为偶函数,函数$f(x)/g(x)\,(g(x)\neq 0)$为偶函数;

(3)若在区间$D$上,函数$f(x)$和$g(x)$其中有一个为奇函数,一个为偶函数,则函数$f(x)/g(x)\,(g(x)\neq 0)$及$f(x)g(x)$为奇函数.

### 1.3.4 函数的周期性

**定义 1.5** 设函数$f(x)$在区间$D$上有定义,若存在常数$T>0$,使对任意的$x\in D$,恒有$x\pm T\in D$,且

$$f(x\pm T)=f(x)$$

成立,则称$f(x)$为周期函数.满足上式的最小正数$T_0$,称为$f(x)$的最小正周期,简称**周期**.

例如,三角函数$\sin x$和$\cos x$是$\mathbf{R}$上的周期函数,周期为$2\pi$;$\tan x\,(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$是以$\pi$为周期的周期函数.

由定义可知,若$f(x)$是以$T$为周期的周期函数,则在长度为$T$的两个相邻区间上,函数图像的形状相同.

### 1.3.5 复合函数

设 $y=\sqrt{u}$,$u=1+x^2$,用$1+x^2$代替$u$得

$$y=\sqrt{1+x^2}$$

我们称函数$y=\sqrt{1+x^2}$是由$y=\sqrt{u}$及$u=1+x^2$复合而成的复合函数.

**定义 1.6** 若函数$y=f(u)$的定义域为$D_1$,函数$u=g(x)$的定义域为$D_2$,值域为$Z_2$,并且$Z_2\cap D_1\neq\varnothing$,则称函数