GAODENG YUANXIAO JINGPIN GUIHUA JIAOCAI

高等院校精品规划教材

# 新编高等数学学习指导(上册)

◎ 主　编　张野芳
◎ 副主编　李长青

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等院校精品规划教材

# 新编高等数学学习指导(上册)

◎ 主 编 张野芳
◎ 副主编 李长青

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

## 内 容 提 要

本书是在总结多年教学经验的基础上精心编写而成的，目的是指导学生结合课堂学习，系统地复习高等数学，为后续课程学习及硕士研究生入学考试打下良好基础。

全书共十二章，分为上、下册，上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册包括微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数。每章包括基本内容、例题分析、常规练习题和提高训练题，使读者在熟悉本章主要内容的基础上掌握各种解题方法，灵活运用所学知识，做到举一反三。

本书主要作为高等学校本科生高等数学的配套教材和硕士研究生入学考试的参考用书。

**图书在版编目（CIP）数据**

新编高等数学学习指导. 上册/张野芳主编. —北京：中国水利水电出版社，2009

高等院校精品规划教材

ISBN 978-7-5084-6775-7

Ⅰ. 新… Ⅱ. 张… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 150495 号

| | |
|---|---|
| 书　名 | 高等院校精品规划教材<br>**新编高等数学学习指导（上册）** |
| 作　者 | 主编　张野芳　副主编　李长青 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社<br>（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038）<br>网址：www.waterpub.com.cn<br>E-mail：sales@waterpub.com.cn<br>电话：（010）68367658（营销中心） |
| 经　售 | 北京科水图书销售中心（零售）<br>电话：（010）88383994、63202643<br>全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　版 | 中国水利水电出版社微机排版中心 |
| 印　刷 | 北京市地矿印刷厂 |
| 规　格 | 184mm×260mm　16 开本　7 印张　166 千字 |
| 版　次 | 2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷 |
| 印　数 | 0001—5000 册 |
| 定　价 | **15.00** 元 |

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

**版权所有·侵权必究**

# 前　　言

高等数学是高等学校本科学生的一门重要的公共基础课，也是硕士研究生入学考试数学科目的主要组成部分。高等数学课程在培养学生的思维能力、提高学生的创新能力方面都具有非常重要的作用，同时高等数学课也是大学其他课程的重要的基础。只有学好高等数学，才能更好地掌握各专业的专业课。为了帮助学生正确理解《高等数学》的基本概念，掌握解题基本方法与技巧，提高学生的解题能力，我们在总结多年教学经验的基础上编写了这本学习指导书。目的是通过本书指导学生结合课堂学习系统地复习《高等数学》的内容，巩固、提高所学知识，培养学生分析问题和解决问题的能力，为后续课程的学习及将来的硕士研究生入学考试打下良好的基础。

本书共分十二章，分为上、下册出版。其上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册包括微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每章包括基本内容、例题分析、常规练习题、提高训练题4个部分的内容。基本内容部分给出该章内容的概要，读者在使用本书时可不必查阅高等数学教材就可了解本章的主要内容与主要公式。例题分析部分对各种类型的题目给出了较为详细的解题思路分析，帮助读者熟悉和掌握解题方法。常规练习题部分按一般高等数学教材的顺序，根据教材中的相应内容配备了适当的练习题。题目类型有判断题、选择题、填空题、计算题和证明题等。选题力求能够反映大纲要求和知识的综合应用，使读者通过这些常规练习题熟练掌握大纲所规定内容，并能够做到灵活运用所学知识。提高训练题部分精选了一些典型试题及历年研究生入学考试的部分真题，读者通过练习这部分练习题，能够了解研究生入学考试对高等数学的基本要求，提高解题能力，增强自身的应试能力，为以后的研究生入学考试打下良好的基础。为辅助读者自学做题、自查需要，本书末附有练习题参考答案或提示。

掌握数学概念与方法的最好途径就是做题，在使用本书时，读者应尽力多做一些练习题，通过练习真正掌握每章的内容。对于本书提供的例题，读者应先对题目进行独立思考，然后再查阅解答过程，最好能够提出不同于书中的解题方法，做到举一反三。书中带“*”号的是一些较深的内容或难度

稍大的题目，与提高训练题一样，可作为考研训练之用。

本书由张野芳、李长青副教授主持编写。参加本书编写的老师有徐优红、何再乐、沈最意、曹金亮、王廷、朱玉辉、王娜儿、徐海娜、卢献庆、陈丽燕、姜静、王朝平、周杰等。在本书的编写过程中，编者除了总结多年的教学经验外，还参考了其他的一些教材和参考书，在很多方面得到启发与教益，在此不一一指明，谨对原书编著者表示衷心地感谢。限于编者水平有限，书中不妥之处恳请读者批评指正。

编　者

2009 年 7 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 目　录

# 第一章　函 数 与 极 限

**【基本内容】**

1. 函数的定义

设数集 $D \subset R$，则称映射 $f$：$D \to R$ 为定义在 $D$ 上的函数，通常记为 $y = f(x)$，$x \in R$ 其中 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量，$D$ 称为定义域，记为 $D_f$，即 $D_f = D$.

2. 有界性

若存在正数 $M$，使函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是有界函数，否则，$f(x)$ 在区间 $I$ 上是无界函数.

3. 单调性

设函数 $f(x)$ 在定义区间 $I$ 上的任意两点 $x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $[f(x_1) > f(x_2)]$，则称 $y = f(x)$ 在区间 $I$ 上是严格单调递增（或严格单调减少）的函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在一个正数 $l$，使对于任一 $x \in D$，有 $(x \pm l) \in D$，且 $f(x \pm l) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，$l$ 称为 $f(x)$ 的周期，通常函数的周期是指最小正周期.

5. 奇偶性

若函数 $f(x)$ 在关于原点对称的定义域 $D$ 上满足 $f(-x) = f(x)$ [或 $f(-x) = -f(x)$]，则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

6. 反函数

设函数 $f$: $D \to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$，称此映射 $f^{-1}$ 为函数 $f$ 的反函数.

7. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 $D_f$，函数 $u = g(x)$ 的定义域为 $D_g$，其值域 $R_g \subset D_f$，则 $y = f[g(x)]$，$x \in D_g$ 称为由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 $D_g$，变量 $u$ 称为中间变量.

8. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合而成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

9. 数列极限的定义

已知数列 $\{x_n\}$，如果对于任意给定的正数 $\varepsilon$，总存在正整数 $N$，使得对于适合不等式 $n > N$ 的一切 $x_n$，不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立，则称常数 $a$ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$；如果数列极限不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

10. 函数极限的定义

(1) 当$x\to\infty$时，函数$f(x)$是以$A$为极限的定义，如果对于任意给定的正数$\varepsilon$，总存在正数$X$，使得对于适合不等式$|x|>X$的一切$x$，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数$A$为函数$f(x)$当$x\to\infty$的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(2) 当$x\to x_0$时，函数$f(x)$是以$A$为极限的定义，如果对于任意给定的正数$\varepsilon$，总存在正数$\delta$，使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切$x$，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立，则称常数$A$为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

11. 单侧极限

如果$x<x_0$，且$x\to x_0$，记为$x\to x_0^-$，类似地，如果$x>x_0$，且$x\to x_0$，记作$x\to x_0^+$，于是$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$分别称为函数$f(x)$在点$x_0$的左极限和右极限．当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限存在的充要条件是等式$f(x_0^-)=f(x_0^+)$成立.

12. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小．如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$[或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$]，则称函数$f(x)$为当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小.

(2) 无穷大．如果对于任意给定的正数$M$，总存在正数$\delta$（或正数$X$），使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$（或$|x|>X$）的一切$x$，恒有$|f(x)|>M$，则称函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷大，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}f(x)=\infty$$

13. 无穷小与无穷大之间的关系

在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；若$f(x)$是无穷小，且$f(x)\neq0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

14. 等价无穷小

设$\alpha(x)$、$\beta(x)$是当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小，且$\beta(x)\neq0$，如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$\left[\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\right]$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的等价无穷小，记作$\alpha(x)\sim\beta(x)$；如果$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$、$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$\left[\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right]$.

15. 极限运算法则

在自变量的同一变化过程中，如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

(3) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$.

16. 极限存在准则和两个重要极限

(1) 夹逼准则：如果对于 $x_0$ 的某个领域内的一切 $x$（但 $x_0$ 点可以除外，或对于 $|x| > X > 0$），有不等式 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ 成立，并且有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x) = A$，则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = A$.

(2) 单调有界数列必有极限.

(3) 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

17. 函数在一点处的连续性

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

18. 间断点的定义

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个领域内有定义（$x_0$ 可以除外），$f(x)$ 在点 $x_0$ 处只要满足下列条件之一时，则称 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点：

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处没有定义.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

函数左右极限都存在的间断点称为第一类间断点，特别左右极限相等时，称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，左右极限不相等时，称为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

19. 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都连续，所谓定义区间是指包含在定义域内的区间.

20. 连续函数在闭区间上的性质

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定能取到它的最大值和最小值.

(2) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$m$ 和 $M$ 分别表示函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则对于任何 $c \in [m,M]$，至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = c$.

(3) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

注：性质 (3) 经常用来判断一个方程在给定的区间内是否有根.

## 【例题分析】

**例 1**　求函数 $f(x) = \arccos\frac{x}{[x]}$ 的定义域，其中 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数.

**分析**　讨论函数时首先要注意它的定义域，反余弦函数自变量的绝对值不能大于 1.

**证**　要使 $f(x)$ 有意义，$x$ 应满足

$$-1 \leqslant \frac{x}{[x]} \leqslant 1,\ 且 [x] \neq 0$$

因为$x-1<[x]\leqslant x$，所以，当$x<0$时，$0<\frac{x}{[x]}\leqslant 1$；当$0\leqslant x<1$时，$\frac{x}{[x]}$无意义；当$x\geqslant 1$时，$\frac{x}{[x]}\geqslant 1$，且该不等式的等号仅当$x\in N$时成立．由此可得$f(x)$的定义域为$\{x \mid x<0$或$x=1,2,3,\cdots\}$.

**例2** 设$\alpha_1=1$，$\alpha_2=2$，$3\alpha_{n+2}-4\alpha_{n+1}+\alpha_n=0$（$n=1,2,\cdots$）求$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_n$.

**分析**

$$\begin{aligned}\alpha_n&=\alpha_1+(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_3-\alpha_2)+\cdots+(\alpha_n-\alpha_{n-1})\\&=\alpha_1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}\end{aligned}$$

**解** 对任何自然数$n$，有

$$3\alpha_{n+2}-4\alpha_{n+1}+\alpha_n=0$$

所以
$$\frac{\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}=\frac{1}{3}$$

令
$$b_n=\alpha_{n+1}-\alpha_n(n=1,2,\cdots)$$

则$\{b_n\}$是公比为$\frac{1}{3}$的等比数列，故当$n\geqslant 2$时，有

$$\alpha_n=\alpha_1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

**例3** 已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

**分析** 当$x\to 0$时，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$，$e^x-1\sim x$，$\sin x\sim x$.

**解** 因$\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}-1)=0$，所以

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin x}-1)=0$$

即
$$\lim_{x\to 0}f(x)\sin 2x=0$$

从而
$$2=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$$

所以有
$$\lim_{x\to 0}f(x)=6$$

**例4** 求$f(x)=\frac{\ln|x|}{x^2-3x+2}$的间断点，并指出类型.

**分析** 函数的间断点主要发生在函数无定义的点、使分母为零的点及分段函数的分段点上.

**解** 由$\ln|x|$的定义域知$x\neq 0$，又由$x^2-3x+2=0$得$x_1=1$，$x_2=2$，而$f(x)$在$(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,2)$，$(2,+\infty)$上是初等函数，所以连续，故$f(x)$的间断点为0，1，2.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

因为 $$\lim_{x\to 0}\ln|x| = -\infty,\ \lim_{x\to 0}(x^2-3x+2) = 2$$
所以 $$\lim_{x\to 0}f(x) = -\infty$$
故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属于第二类.

又 $\lim\limits_{x\to 1}f(x) = -1$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，属于第一类.

在 $x=2$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 2}f(x) = \infty$，故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属于第二类.

**例 5** 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，证明：存在 $x_0\in[0,1]$，使
$$f(x_0) = f\left(x_0+\frac{1}{4}\right)$$

**分析** 设法构造一个适当函数，将要证明的问题转化为证明所构造函数零点的存在性.

**证** 令 $F(x) = f(x) - f\left(x+\frac{1}{4}\right)$，则 $F(x)$ 在 $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ 上连续，若对任意的 $x\in\left[0, \frac{3}{4}\right]$，都有 $F(x)\neq 0$，那么在 $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ 上必有 $F(x)>0$ 或 $F(x)<0$. 现不妨设 $F(x)>0$，这样当 $x$ 分别取 $0$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$ 时，就有
$$f(0) - f\left(\frac{1}{4}\right) = F(0) > 0$$
$$f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) > 0$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$
$$f\left(\frac{3}{4}\right) - f(1) = F\left(\frac{3}{4}\right) > 0$$
从而有 $f(0)>f(1)$，这与 $f(0)=f(1)$ 矛盾，故存在 $x\in\left[0, \frac{3}{4}\right]$，使 $F(x_0)=0$，即有 $x_0\in[0, 1]$，使
$$f(x_0) = f\left(x_0+\frac{1}{4}\right)$$

**例 6** 讨论函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}(x\geqslant 0)$ 的连续性.

**分析** 先求出 $f(x)$，然后讨论它的连续性.

**解** 因为 $\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}} = x^2\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}}$，所以，当 $0\leqslant x<2$ 时，有
$$f(x) = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}} = 0$$

当 $x>2$ 时，有

$$f(x)=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}}=x^2$$

当 $x=2$ 时，$f(x)=2\sqrt{2}$，由此可得

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 2\sqrt{2}, & x=2\\ x^2, & x>2\end{cases}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=4$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续，且 $x=2$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，故 $f(x)$ 除点 $x=2$ 外，在定义域内其他点均连续.

【常规练习题】

## 第一节 映射与函数

一、判断题.

1. 初等函数在其定义域内连续.  (  )
2. 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积也是偶函数.  (  )
3. 周期函数一定有最小正周期.  (  )
4. 设函数 $f(u)=\arcsin u$，$u=\varphi(x)=2+x^2$，则 $f[\varphi(x)]$ 一定为 $x$ 的复合函数.  (  )
5. 设 $f(x)$，$g(x)$ 均为 $(a,b)$ 上的无界函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 一定为 $(a,b)$ 上的无界函数.  (  )

二、选择题.

1. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们可以构成复合函数 $f[f(x)]$，$g[f(x)]$，则其中为奇函数的是（  ）.

(A) $f[f(x)]$　　(B) $g[f(x)]$　　(C) $f[g(x)]$　　(D) $g[g(x)]$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ 的定义域为（  ）.

(A) $x\in R$，但 $x\neq 0$　　(B) $x\in R$，但 $1+\dfrac{1}{x}\neq 0$

(C) $x\in R$，但 $x\neq 0$，$-1$，$-\dfrac{1}{2}$　　(D) $x\in R$，但 $x\neq 0$，$-1$

3. 函数 $y=\sin\dfrac{\pi}{2(1+x^2)}$ 的值域是（  ）.

(A) $[-1,1]$　　(B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　(C) $(0,1]$　　(D) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

4. 设 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，则 $y=x-[x]$ 是（ ）.
（A）无界函数 （B）周期为 1 的周期函数 （C）单调函数 （D）偶函数
5. 函数 $f(x)=\sin(x^2-x)$ 是（ ）.
（A）有界函数 （B）周期函数 （C）奇函数 （D）偶函数
三、填空题.
1. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2},\ (x>0)$，则 $f(x)=$__________.
2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$__________.
3. 函数 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$ 的反函数是________________.
4. 若 $T_1$、$T_2$ 分别是函数 $f(x)$、$g(x)$ 的周期，且 $T_1$、$T_2$ 存在最小公倍数，则 $f(x)+g(x)$ 的周期是__________.
四、证明：函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

五、设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0)$，求（1）$f[f(x)]$； （2）$f(x)$ 的反函数.

六、已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$ 求 $\varphi(x)$，并写出它的定义域.

## 第二节 数列的极限

一、判断题.
1. 当 $n$ 充分大以后，数列 $\{x_n\}$ 越来越接近于 $a$，则 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 必定以 $a$ 为其极限.（ ）
2. 若对于任意给定的正整数 $k$，总存在正数 $N$，当 $n>N$ 时，所有 $x_n$ 均满足 $|x_n-a|<10^{-k}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.（ ）
3. 数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{|x_n|\}$ 同敛散.（ ）

二、选择题.

1. 下列哪些说法与$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的定义等价?

(A) $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists N$，$n\geqslant N$，$|x_n-a|\leqslant 100\varepsilon$

(B) $\forall\varepsilon>1$，$\exists N$，当$n\geqslant N$时，有$|x_n-a|\leqslant\varepsilon$

(C) $\forall N$，$\exists\varepsilon>0$，当$n\geqslant N$时，有$|x_n-a|\leqslant\varepsilon$

(D) $\exists N$，$\forall\varepsilon>0$，当$n\geqslant N$时，有$|x_n-a|\leqslant\varepsilon$

2. 设数列的$x_n$和$y_n$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$，则下列断言正确的是（ ）.

(A) 若$x_n$发散，则$y_n$必发散　　(B) 若$x_n$无界，则$y_n$必有界

(C) 若$x_n$有界，则$y_n$必为无穷小　　(D) 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小，则$y_n$必有界

3. 设数列的通项为$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}，若 n 为奇数\\ \dfrac{1}{n}，若 n 为偶数\end{cases}$，则当$n\to\infty$时，$\{x_n\}$为（ ）.

(A) 无穷大量　　(B) 无穷小量　　(C) 有界变量　　(D) 无界变量

三、填空题.

1. 数列$\{x_n\}$的一般项是$x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$__________.

*2. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=$__________.

*四、证明题.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

2. 若数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

3. 对于数列$\{x_n\}$，若$x_{2k-1}\to a$ ($k\to\infty$)，$x_{2k}\to a$ ($k\to\infty$)，证明：$x_n\to a$ ($n\to\infty$).

## 第三节 函数的极限

一、判断题.

1. 若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数的极限都存在且都等于 $A$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.　（　）

2. 函数当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是左极限和右极限各自存在．　（　）

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$, $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 在 $x\to0$ 时的左，右极限都存在．　（　）

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=A$.　（　）

5. 若 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant0$.　（　）

二、填空题.

*1. 对于函数 $f(x)=x^2$，$\delta$ 取__________使与任一 $x\in U(0,\delta)$ 所对应的函数值都在邻域 $U(0,2)$ 内.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{ax}, & -1\leqslant x<0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\end{cases}$，则 $f(0^+)=$__________，$f(0^-)=$__________，当 $a=$__________时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

*3. 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-2}{x^2+1}\to1$，问 $X$ 取________时，使得当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$.

三、选择题.

1. 下列极限错误的是（　）.

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=-1$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$　　(D) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有定义是它在该点有极限的（　）.

(A) 充分条件　(B) 必要条件　(C) 充要条件　(D) 无关条件

四、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x>0\\ 3x^2+a, & x<0\end{cases}$，若 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，求 $a$ 的值.

*五、根据函数极限定义证明：$\lim\limits_{x\to 3}(2x+5)=11$.

六、设$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$，问：(1) $f(x)$在$x=0$处是否有极限？(2) 函数在$x=1$处是否有极限？

## 第四节 无穷小与无穷大

一、判断题.

1. 两个无穷小的商还是无穷小. ( )

2. 在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小. ( )

3. 在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷小，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大. ( )

4. 如果当$x\to\infty$时，$f(x)$为无界函数，则当$x\to\infty$时，$f(x)$必为无穷大. ( )

二、选择题.

1. 函数$f(x)=x\sin x e^{\cos x}$ ( ).

(A) 在$(-\infty, +\infty)$内有界　　(B) 当$x\to\infty$时为无穷大

(C) 在$(-\infty, +\infty)$内无界　　(D) 当$x\to\infty$时有极限

2. $n\to+\infty$时，下列数列中 ( ) 为无穷大.

(A) $x_n=3^n\sin n\pi$　　(B) $x_n=2^n\cos n\pi$

(C) $x_n=\dfrac{2^n}{3^n}$　　(D) $x_n=\dfrac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$

三、填空题.

1. 已知数列$x_n=\left[\dfrac{n+1}{n}\right]^{(-1)^n}$，$n=1, 2, \cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$______.

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4}=$______.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com