普通高等教育（理工类）规划教材

高等数学

（第四版）　下册

同济大学数学系　刘浩荣　郭景德等　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育（理工类）规划教材

高等数学

（第四版）下册

同济大学数学系　刘浩荣　郭景德等　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是在2002年出版的普通高等工科院校教材《高等数学》(第三版)及所配《高等数学习题集》的基础上，参考教育部最新制定的"工科类本科基础数学课程教学基本要求"而修订改版而成的．全书仍分上、下两册，共16章．此为下册，其内容包括多元函数微积分、无穷级数和微分方程等6章．书中每节后配有习题及答案或提示，每章末除了配有复习思考题及答案外，还附有"学习指导"．"学习指导"以内容小结与例题分析为主，着重帮助学生总结深化知识概念并提高解题能力．

本书条理清晰，论述准确；由浅入深，循序渐进；推演论证，跨度较小；重点突出，难点分散；例题较多，典型性强；深广度要求适当，便于教学和自学．本书可作为普通高等院校(特别是"二本"及"三本"院校)或成人高校理工类各专业本科或专升本的"高等数学"课程的教材使用，也可作为工程技术人员或参加国家自学考试及学历文凭考试的读者的自学用书或参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/刘浩荣，郭景德等编著．—4版．—上海：同济大学出版社，2010.2

普通高等教育(理工科)规划教材

ISBN 978-7-5608-4178-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．①刘…②郭…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材
Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第189221号

普通高等教育(理工类)规划教材

高等数学(第四版)下册

同济大学数学系　刘浩荣　郭景德等　编著

责任编辑　曹　建　　责任校对　徐春莲　　封面设计　陈益平

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn
(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021－65985622)
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　同济大学印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　22
印　　数　1—5100
字　　数　519000
版　　次　2010年2月第4版　2010年2月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5608-4178-6

定　　价　31.00元

前　　言

本书是在原同济大学函授数学教研室编著的《高等数学》(第三版)及所配《高等数学习题集》的基础上修订改编而成.全书仍分上、下两册出版.上册内容为一元函数微积分、向量代数与空间解析几何等.此为下册,其内容包括多元函数微积分、无穷级数和微分方程等.

这次修订改版,主要是考虑到为方便教学使用,改变了原第三版的做法,仍将习题和所附答案分别编入各章、节之后.同时,还参照教育部最新制定的"工科类本科数学基础课程教学基本要求",对某些超出基本要求或在教学中可供选读的内容,也都作了删减或改写,并以 * 号标记.此外,为节省篇幅,本书中除习题及答案外,对各章末的"学习指导"及打 * 号的内容,也都采用了小号字排版.因同济大学原函授数学教研室早已被改制,故对本书的编者署名方式也作了改变,敬请诸位同行及广大读者谅解.

曾先后参加过本套教材前几版编写工作的有:刘浩荣、郭景德、谈祝多、$\boxed{\text{顾吉衢}}$、周忆行、周葆一、许新福等教授.这次修订改版工作,主要由刘浩荣、郭景德、谈祝多等教授参加完成.

本书原先是侧重于为函授生使用而编写的,几次改版都注意保留了它便于自学的特色.考虑到有些全日制工科院校本科或专升本专业的使用,也不断地删减了某些专为函授教学操作的环节.例如,这次改版删去了原书中所配各阶段的"自我检测题".总之,通过这次修订改版,我们希望本套教材更能符合教学基本要求及当前教学实际需要,也更能适合于高等成人教育或全日制"二本"及"三本"院校的理工类本科专业教学使用.

本书由北京航空航天大学李心灿教授主审.李心灿教授在百忙中详细审读了本书,并提出了许多宝贵建议和具体的修改意见,谨此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,教材中难免有疏漏或不足之处,恳请广大读者及同行多加批评指正.

编　者

2010 年 1 月于同济

第三版前言

本教材原来是侧重于为函授生使用而编写的，它比较便于自学，也适合于函授教学环节的操作．现考虑到有些全日制工科院校本科或专升本的教学，也都已选用本教材作为“高等数学”课程的教学用书．为了使这套教材除了可供函授教学使用外，也能适用于全日制工科类各专业的本科或专升本教学使用，我们在原书的基础上，特作了修订和改版．

这次改版，全书仍分为上、下两册，除了对原书的某些内容作了修改外．还重新组编了各节后的习题，另编成《高等数学习题集》，改变了原书中把习题分为节后“练习题”和章后“习题”的两段做法．为了帮助学生掌握各章内容要点，提高运用所学知识解题的能力，我们还着重改编了各章后的“学习指导”，以内容小结和例题分析为主要内容．

参加这次修订工作的有刘浩荣、郭景德、顾吉衢、谈祝多、许新福等．由于我们的水平有限，修订的时间又较匆促，难免还有许多错误或不当之处，恳请读者或同行不吝批评指正．

编　者

2002年3月于同济

第二版前言

由同济大学函授数学教研室编著、同济大学出版社出版的高等工科院校函授自学教材《高等数学》(上、下册),自1993年出版以来,得到了许多兄弟院校的大力支持,三年内已五次印刷,总计印数近五万套,为了进一步提高教材的质量,更好地适应成人教育发展的需要,保证函授本科教育的质量,我们认真总结原教材在试用中存在的问题,听取有关兄弟院校对使用教材的意见,参照1993年修订的"教学基本要求",重新修订编写了这套本科函授《高等数学》教材.新版教材仍分上、下两册.上册除"函数、极限和连续"、"一元函数微积分"外,还有"向量代数及空间解析几何";下册包括"多元函数微积分"、"无穷级数"和"微分方程"等.

新版教材继续保留了原教材的特色,它既便于自学,也具有适合于函授教学操作使用的多功能作用.为使教材的质量和水平更上一个新的台阶,我们在新版教材中主要采取了以下一些新的举措:

(1) 使教材的内容及深广度更加符合"成人教育工科类各专业本科《高等数学》课程的教学基本要求".按照全国普通理工院校成人教育研究会数学学科委员会于1993年修订的"教学基本要求".我们在新编教材中又删去了若干超出基本要求的或打"*"号的内容.例如,在上册中,删去了"反双曲函数"、"Γ-函数"、"向量的混合积"等.此外,对有关附录及"自学指导"中不必要的重复内容,也都作了删减,以有利于压缩教材的篇幅.

(2) 考虑到对原教材使用的习惯性和连续性,新版教材基本上保留了原有的体系,只是从有利于组织教学和使用方便的角度考虑,对部分章节内容及安排次序作了适当的调整或变动.例如,考虑到许多学校分两学期教学的安排,我们把原教材下册中的"向量代数"及"空间解析几何"提前放入上册之末,且对这部分内容作了较大的修改,使内容安排上更为紧凑些.与此同时,还删去了"空间立体图形的作法"这一节.把作图的要求分散到前面各节的例题中去,并有待于学习"三重积分"时再反复深化.

此外,从有利于突出重点或分散难点考虑,在对部分章节的内容组织及写法上都作了较大的变动或修改.例如,"复合函数"、"函数的极限"、"不定积分的换元法"、"向量的坐标表示法"等重点内容都作了较多的修改或重写.又如,为了分散难点,把原教材中"有关极限的定理"这一节拆散,分别放入"函数的极限"和"无穷小与无穷大"等有关节内.以避免几个极限定理过于集中在一起,增加自学的难度.

(3) 为了方便自学者在完成作业时参考或查对答案,我们改变了过去把答案附于书末的传统习惯,紧跟各次习题作业之后,便附上有关答案或提示,这样,既方便查找,也有利于编者校对,以减少原书稿或排版中的错误.为了加强对基本概念的训练,适应考试题型的更新,我们在每章之末的"复习思考题"部分,都配有(A),(B)类题.前者是普通题型(计算题、应用题、证明题等),后者是标准化题(选择题、填空题、是非题等).

(4) 修改了原书中部分不恰当的例题或习题.为适应社会主义市场经济的发展需要,在不增加教学内容的前提下,适当地扩充应用题的范围.例如,把求函数的最大值和最小值的原理与方法,扩充应用于经济决策分析中,求某种条件下的"最大利润"、"最低成本"、"最佳

产量”等，对于数学在物理、力学中的应用仍不减弱，以充分体现工科教材理论联系实际、重视实际应用的特色.

(5) 新版教材按国际规定使用有关数学符号. 如“x 的正切”和“x 的反正切”，分别用“$\tan x$”和“$\arctan x$”表示，而不再用“tg$x$”和“arctg$x$”；“x 的余切”和“x 的反余切”，分别用“$\cot x$”和“arccot$x$”表示，而不再用“ctg$x$”和“arcctg$x$”.

通过严格把握教材内容及出版的质量，我们相信，新版教材将会更受成人教育界的欢迎. 本书可供各类成人学历教育工科类本科或专升本层次的专业学生作为教材，也可作为全日制本科专业学生或自学考试者的教材或参考书.

本教研室参加这次修订编写工作的有：刘浩荣、郭景德、许新福、周忆行、谈祝多、顾吉衢等. 由于我们的水平所限，书中难免还有不足或错误之处，恳请诸位读者不吝指正.

编　者

1998 年 1 月

第一版前言

本书是在总结我校原有的函授《高等数学》教材及多年来的函授教学经验的基础上，根据全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组制定的“成人教育本科《高等数学》教学基本要求”编写而成的. 全书分上、下两册，其中上册为一元函数微积分；下册包括向量代数及空间解析几何、多元函数微积分、级数与微分方程等.

根据函授教学以“自学为主，面授为辅”的特点，我们在编写此书时，力求做到：概念清楚，论述正确；循序渐进，由浅入深；例题较多，台阶较小；重点突出，难点分散. 为使教材便于自学，便于使用，具有多种功能，我们在编写时，注意采取了以下一些措施：

(1) 取材“少而精”. 对于超出教学基本要求的内容，一般都不编入；对于个别后继课程用得较多的内容，则以“*”号标出，可以不作为必读的内容，仅供需要时查阅参考.

(2) 在内容的安排上，尽量保持章节间相对的独立性. 照顾到少学时专业或专科类专业函授生使用时，可以方便地删减取舍.

(3) 注意理论联系实际，重视学生能力的培养. 尽可能使数学的概念、理论与应用相结合，并适当增加数学在物理、力学中的应用举例.

(4) 在每章之末都编写了“自学指导”. 一方面指出学习该章的基本要求及重点，使学生自学后能够“心中有数”；另一方面对于某些概念、重点或难点，为避免多占正文的篇幅，放入“自学指导”，指出应当注意的问题，并适当地解释和说明，以弥补函授生在自学中缺少教师指导的不足.

(5) 贯彻“学练结合，适当反复”的教学原则. 在每节后都附有较为简单的练习题，以供学生消化所学的内容；在每章之末配有习题，以供学生在自学的基础上系统而又全面消化巩固所学的知识；为便于复习或提高的需要，在每章之末还选编了适量的复习思考题. 这些习题在书后均附有答案，个别较难的题也都附有提示，可供学生参考. 此外，为了定期检查学生的自学效果，书中还精心地选编了阶段性的测验作业题.

(6) 考虑到学生多分散于各基层单位，查找有关资料可能不便，我们在上册书末还特地附有积分表、初等数学常用公式及平面解析几何(摘要)等附录，可供查阅.

参加本书编写的有本教研室顾吉衢、谈祝多、周忆行、周葆一、郭景德、刘浩荣等同志. 其中第一、二、九、十、十一章由郭景德执笔；第三、五章由周葆一执笔；第四、十四、十五、十六章由周忆行执笔；第六、七、八、十二、十三章由刘浩荣执笔. 顾吉衢、谈祝多担任编写工作的指导，刘浩荣组织全书的汇总定稿，并选编了上册末的有关附录的内容.

本书经同济大学谈祝多副教授及北京科技大学原函授部主任钱文侠研究员详细审阅. 他们对全书的初稿提出了许多宝贵的意见，对于修改定稿起到了重要的作用. 在编写过程中，我们曾广泛地参考了许多国内外的《高等数学》教材，特别是本校及其他兄弟院校编写出版(或未正式出版)的《高等数学》教材或函授专用教材. 在此，我们一并表示衷心的感谢.

这套函授自学教材的编写出版，曾得到同济大学函授学院、应用数学系及同济大学出版社有关同志的关心与支持，也得到了本教研室的许多老师的热情帮助与支持，我们也深表

感谢.

本书除了工科专业函授生可以作为“高等数学”教材使用外,也可供工科类成人教育的电大、职大、夜大学生及广大自学者或工程技术人员作为教材或自学参考书.对于全日制工科类专业的大学生,也是比较合适的参考书.

由于我们的水平所限,书中难免有许多不足或错误之处,诚恳地希望广大读者批评指正.

编　者

1991年4月于同济

目　　录

第十一章　多元函数微分法及其应用

在上册中，我们研究了含有一个自变量的函数，这种函数又叫做**一元函数**．而在实际问题中，还会遇到多于一个自变量的函数，这就是将要讨论的**多元函数**.

多元函数微分法是一元函数微分法的推广和发展，其概念和性质与一元函数微分法有许多相似的地方．但是，在某些方面也存在着本质上的差别．读者在学习时，应该注意比较它们之间的异同.

本章将介绍多元函数的基本概念、偏导数、全微分和多元函数微分法的简单应用等．我们着重讨论二元函数，有关的结论都可类推到三元及三元以上的函数.

11.1　多元函数的概念

一、邻域和区域的概念

邻域和区域是研究多元函数时经常要用到的两个基本概念．本目主要在平面和空间直角坐标系中引入这两个概念.

1．邻域的概念

由上册知道，在数轴上，点 x_0 的 δ-邻域是指所有与点 x_0 的距离小于 δ 的点 x 的集合：$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$．现在，我们只要将数轴上的点换成平面上的点，便能得到平面上点的邻域的概念.

设点 $P_0(x_0,y_0)$ 是平面上一点，δ 是某一正数，所有与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的集合，称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ-邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid |P_0P|<\delta\}$$

或

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

几何上，点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ-邻域就是平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心、以 δ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

类似地，空间内一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的 δ-邻域是指所有与点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y,z)$ 的集合：

$$\{(x,y,z)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}.$$

几何上，空间内的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的 δ-邻域就是空间内以点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心、以 δ 为半径的球内部的点 $P(x,y,z)$ 的全体.

2．区域的概念

区域的概念中，要用到开集和集合的连通性这两个概念，现在先作些简要的介绍.

设集合 E 是平面上（或空间内）的一个点集，如果对于 E 内的每一个点，都至少存在该

点的一个邻域，使得邻域内所有的点都属于 E（图 11-1），那么，称点集 E 是**开集**.

设集合 A 是平面上（或空间内）的一个点集，如果对于 A 内的任意两点 P_1 和 P_2，都能用包含在 A 内的折线（即折线上的点都属于 A）连接起来（图 11-2），那么，称点集 A 是**连通**的.

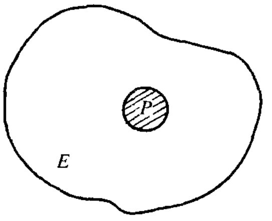

图 11-1

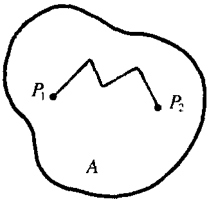

图 11-2

下面给出区域的概念.

如果平面上（或空间内）的点集 D 是开集，且是连通的，那么，称点集 D 为**开区域**，简称为**区域**.

区域可以分为有界区域和无界区域. 一个区域 D，如果能包含在一个以原点为圆心的圆（或以原点为球心的球）内（图 11-3），那么，称区域 D 是**有界区域**；否则，称区域 D 是**无界区域**.

如果点 P 不属于区域 D，而点 P 的任意一个邻域内，总含有属于 D 的点，那么，称点 P 是区域 D 的**边界点**. 所有边界点的集合，称为区域 D 的**边界**，记作 δD. 一个平面区域的边界可能是由几条曲线或一些孤立点组成；一个空间区域的边界可能是由几个曲面或一些孤立点组成. 区域 D 连同它的边界 δD 一起，称为**闭区域**，记作 $\overline{D} = D + \delta D$.

例如，平面点集 $D = \{(x,y) \mid x < 1, y > -1\}$（图 11-4）是一个区域，且是无界区域，它的边界为直线 $x = 1$ 上 $y > -1$ 的部分及直线 $y = -1$ 上 $x < 1$ 的部分. 又如，平面点集 $D = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$（图 11-5）是有界区域，它的边界是圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 和原点 $O(0,0)$.

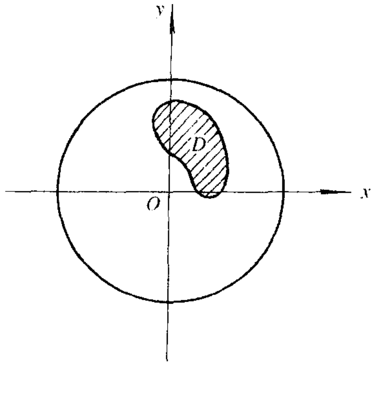

图 11-3

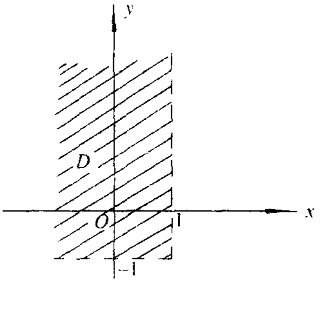

图 11-4

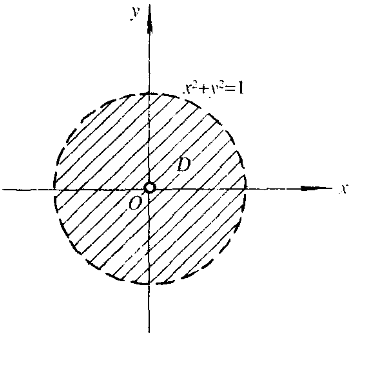

图 11-5

二、多元函数的概念

与一元函数一样，多元函数也是从实际问题抽象出来的一个数学概念. 现在，先看几个例子.

例 1 正圆锥体的体积 V 和它的高 h 及底面半径 r 之间有如下关系：

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

如果在观察的过程中，r 和 h 是变化的，那么，此关系式反映了三个变量 r,h 和 V 间的一种依赖关系. 当 r 和 h 在集合 $\{(r,h) \mid r>0,h>0\}$ 内取定一组数 (r,h) 时，通过关系式 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$，体积 V 就有唯一确定的值与之对应.

例 2 由物理学知道，电路中电压 V、电流强度 I 和电阻 R 之间有如下关系：

$$V = IR.$$

如果在观察的过程中，I 和 R 是变化的，那么，此关系式反映了三个变量 I,R 和 V 之间的一种依赖关系. 当 I 和 R 在集合 $\{(I,R) \mid I>0,R>0\}$ 内取定一组数 (I,R) 时，通过关系式 $V=IR$，电压 V 就有唯一确定的值与之对应.

例 3 一定量的理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间有如下关系：

$$p = \frac{RT}{V},$$

其中，R 是常数. 如果在观察的过程中，T 和 V 是变化的，那么，此关系式反映了三个变量 T，V 和 p 之间的一种依赖关系. 当 T,V 在集合 $\{(T,V) \mid T>T_0,V>0\}$ 内取定一组数 (T,V) 时，通过关系式 $p=\frac{RT}{V}$，压强 p 就有唯一确定的值与之对应.

上面三个例子虽然来自不同的实际问题，但是，它们却有共同之处. 首先，它们都说明三个变量之间存在着一种相互依赖关系，这种关系给出了一个变量与另两个变量之间的对应法则；其次，当两个变量在允许的范围内取定一组数时，按照对应法则，另一变量就有唯一确定的值与之对应.

由这些共性，就可得出以下二元函数的定义.

定义 设 D 是 xOy 面上的一个点集，如果对于 D 内的任意一点 $P(x,y)$，变量 z 按照一定的法则总有唯一[①]确定的值与它对应，则称 z 是变量 x,y 的**二元函数**（或称 z 是点 P 的函数），记作

$$z = f(x,y) \quad (\text{或 } z = f(P)).$$

点集 D 称为该函数的**定义域**，x,y 称为**自变量**，z 又称为**因变量**.

按照定义，上述所举的三个例子中，正圆锥体的体积 V 就是底面半径 r 和高 h 的函数；电压 V 就是电流强度 I 和电阻 R 的函数；压强 p 就是绝对温度 T 和体积 V 的函数. 它们都是二元函数.

有关二元函数的一些概念，与一元函数的内容相类似，下面作些简要的介绍.

函数 $z=f(x,y)$ 中的记号 f 表示对应法则，此法则也可以用其他字母来表示，所以，函数也可记成 $z=z(x,y)$，$z=\varphi(x,y)$，等等. 同样，自变量 x,y 和因变量 z 也可换成其他字母.

设点 (x_0,y_0) 是二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域内的一点，按照定义，因变量 z 必有唯一确定的值与它对应，这个值就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**函数值**，记作

$$z\Big|_{(x_0,y_0)} \quad \text{或} \quad f(x_0,y_0).$$

① 此处定义的函数又称为二元单值函数. 如果对于 D 内一点 $P(x,y)$，变量 z 按照一定的法则有两个或两个以上的值与它对应，那么，这种函数称为二元多值函数. 本书主要讨论单值函数.

当点(x,y)取遍定义域D内的各点时，对应函数值的集合

$$W=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为二元函数$z=f(x,y)$的**值域**.

如果二元函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处对应有函数值，那么，称二元函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处是**有定义**的（这时，点(x,y)必属于函数的定义域）；否则，称函数在点(x,y)处是**没有定义**的. 如果二元函数$z=f(x,y)$在平面点集A内的每一点处都有定义，那么，称二元函数$z=f(x,y)$在**点集 A 内有定义**（这时，A必是函数定义域的一个子集）.

在讨论二元函数$z=f(x,y)$的定义域时，如果它是由实际问题得到的，那么，它的定义域要根据问题本身的意义来确定. 如果仅研究用算式表示的二元函数，那么，函数的定义域是使得算式有意义的点的集合.

关于二元函数，也有复合函数和初等函数（简称为二元复合函数和二元初等函数）的概念，它们与一元函数中的复合函数和初等函数的概念相似，这里不再详细叙述.

例 4 求函数$z=\arcsin(x+y)$的定义域.

解 由反三角函数的定义知，x和y必须满足不等式：

$$-1\leqslant x+y\leqslant 1,$$

所以，函数$z=\arcsin(x+y)$的定义域是平面点集：

$$\{(x,y)\mid -1\leqslant x+y\leqslant 1\}.$$

此点集是介于两条直线$x+y=-1$，$x+y=1$之间（包括这两条直线）的那部分平面，它是一个闭区域（图 11-6），且是无界区域.

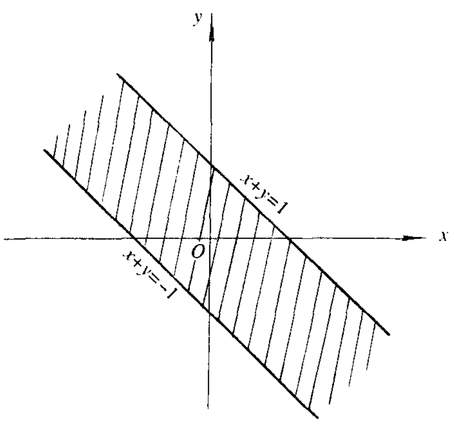

图 11-6

例 5 求函数

$$z=\ln(x^2+y^2-1)+\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

的定义域.

解 要使函数关系式右边的两个算式同时有意义，x和y必须满足不等式组：

$$\begin{cases}x^2+y^2-1>0,\\4-x^2-y^2>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x^2+y^2>1,\\x^2+y^2<4,\end{cases}$$

即

$$1<x^2+y^2<4,$$

所以，函数$z=\ln(x^2+y^2-1)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$的定义域是平面点集：

$$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}.$$

此点集是介于两圆周$x^2+y^2=1$和$x^2+y^2=4$之间的圆环区域（图 11-7）. 它是一个开区域，且是有界区域.

例 6 求函数$f(x,y)=\sqrt{x\sin y}$在点$\left(4,\dfrac{\pi}{2}\right)$处的函数值.