实用统计决策与 Bayes 分析

林叔荣　编著

厦门大学出版社

实用统计决策与 Bayes 分析

林叔荣　编著

厦 门 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是国内一本较系统介绍统计决策与Bayes(贝叶斯)分析的专著,也是初学者一本很好的入门书。特点是叙述由浅入深、理论联系实际、重点突出应用;同时注意到每个统计概念的背景、处理问题的思想和方法,并对结论给出严格的叙述和必要的证明;还附有工程技术和经济预测、决策的应用实例。此外,书中还介绍本学科的若干结果的最近发展,有助于进一步深入学习和研究。

主要内容包括统计决策(含贝叶斯、最小最大和遗憾决策等)的原理、方法和应用;参数、非参数经验Bayes分析方法;分级Bayes分析方法;一般Bayes和分级Bayes以及经验Bayes线性模型等九章。本书可供大专院校以上医农、理工、经济管理等专业的师生及应用统计工作者、科技人员作教材和参考书。

实用统计决策与Bayes分析
林叔荣 编著
●
厦门大学出版社出版发行
福建省新华书店经销
福建第二新华印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/16 15印张 384千字
1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷
印数 1—1000册
ISBN 7—5615-0388—1
O·27 定价:4.25元

序

在进行社会调查或科学实验时，人们往往会获得大批数据；如何根据这些数据来作出科学的判断，必须应用数理统计的方法。因此，数理统计是一门应用非常广泛而且理论严密的数学学科。

数理统计中有两大学派：一是传统的、坚持频率观点的学派；另一是 Bayes 学派。前者认为，母体分布中的参数 θ 是常数，不是一变数，尽管人们暂时还不知道它的值，但可以利用样本来对它进行估计。而 Bayes 学派则把 θ 看成一随机变数，至于 θ 的分布，则可视情况而假定它有某一先验分布；然后利用此先验分布及样本来对母体进行统计推断。

目前在绝大多数的数理统计书中采用的都是频率观点，即使偶尔也涉及 Bayes 统计，但大都简略带过，语焉不详。在国内，系统地而且数学上严密地论述 Bayes 数理统计，就笔者所知，本书或者是第一本，或者是极少数几本中之一。本书的出版，将填补这一缺陷，因而是一件值得高兴的事。

除理论上相当严整而外，本书很注重实用，特别是在经济问题中的应用，书中实例很多，这对着眼于应用的读者，无疑是有借鉴和启迪的作用。

这本书是作者长期从事科研和教学的辛勤积累的产物，既叙述了国际上若干课题的最新发展，也介绍了作者本人的一些研究成果，因而是有相当高的学术价值。

我们希望，本书在论述 Bayes 数理统计方面，将会取得较大的成功。

王梓坤

1991.1.20

引 言

数理统计学的基本思想，是能从研究对象中获得的个别少量的资料(或数据)，按一定目标提取有用的信息，并有效的利用信息，获得最优目标的决策。目标是决策的最终目的，统计学中描述目标的方法是用损失函数、目标函数或收益函数等。所研究的课题是广泛的，包括信息加工(如数据分析、序贯分析、时间序列等等)，建模(如线性和非线性、参数和非参数回归模型，密度函数和分布函数等等)以及统计推断(包括点估计、区间估计和假设检验等)。信息加工和建模是综合、概括的过程，推断是比较、分析的过程，它们之间的交互作用，把数据反复的分离和重新组合，揭示出相似和差异，外推出更大的数据集，以期望所得的结果。

数理统计的理论与方法，已广泛的应用到工程技术、社会、经济、工业、农业等各个领域，并渗透到各个学科。统计学的许多方法已经成为控制论、运筹学、通讯工程、人工智能、经济计量学、生物计量学、计量生理学、统计物理、人口学、遗传学、保险学、教育计量学、社会学等应用学科的基本数学工具。

被称为信息时代的今天，已有了高效能地收集资料的技术，如何处理和综合分析所得到的大量资料(信息)，并利用这些资料作出正确的决策，使数理统计学面临着新的挑战。因此，促进统计学方法的应用与理论研究，是统计工作者面临的新任务。这是作者写这本书的目的。

数理统计学有两个基本观点：一个是频率学派(古典数理统计)观点；一个是Bayes学派观点。这两个学派是在回避或使用决定先验分布这个难题不断发展起来的。两个学派的争论至今还没有结束，所得到的结果都在实践中获得广泛的应用，在应用方法和理论研究上都有新发展。例如，经验Bayes方法(简称EB方法)利用样本理论和Bayes推断的优点，使Bayes决策和推断获得新的进展；参数EB方法(PEB方法)的研究中，利用分级Bayes结构，直接获得压缩估计、岭估计的Bayes结构的理解，并且把这些估计与稳健性的研究联系成一个整体。这些方法可直接用到实践中去，尤其可直接地应用到经济计量模型中关于随机系数的估计和灵敏分析，等等。

本书不管双方的争论，仅从决策论的观点来看Bayes决策，整理出双方争论而发展起来的新成果，而且是着重于叙述基本原理和应用方法，因此定名为《实用统计决策与Bayes分析》。

本书所讨论的内容是作者在科研和教学实践中积累的经验和参考国内外有关文献资料编撰而成的，尽量反映国内外的最新成果，其中有一些是作者未发表的结论。本书的初稿已按不同程度和内容，在本科生和研究生中讲授过，并在此基础上进一步删节补充修改而定稿的。内容力求由浅入深，理论联系实际，着重于基本原理和直观背景以及处理问题的思想和方法。对一些简单而重要的原理和结论，给出严格的叙述和证明，重点突出应用，尽量给出实用的例子，而且更多的方法是适合中小样本。需要更深的理论工具(如测度论等)和庞长的证明(如大样本理论)，只给出结论的叙述和应用的凡例。需要更深入的了解和有关问题的研究，用补充和附注的方式，列出有关内容和参数资料。本书力求广泛适用于理、工、医、农、经济等大专以上的教材，并可作为有志于更进一步深入学习和研究者的参考书。

为使初学者能了解统计决策和推断是人与自然“博奕”的实质，第一章介绍二人零和博奕，这章也为今后逐步深入作准备。

第二章给出统计决策基本原理和应用，主要介绍非随机法则的Bayes决策和后验决策原理，最小最大决策原理和遗憾决策原理等。

第三章列举第二章各种原理和方法在经济决策中的应用实例。

第四章介绍主观概率和先验信息的概念，还给出确定先验分布的若干方法。主要有确定主观先验的最大似然法，无信息先验的意义和最大熵、最大信息原理确定先验的方法等。

第五章是第二章更深入的内容，也是 Bayes 分析的基础。主要是介绍如何利用似然函数和充分性原理计算后验分布。共轭族是 Bayes 统计的重要概念，也给出它的信息理论意义。本章还详细讨论 Bayes 决策法则的各种推广，并给出估计理论中常用的可容许性和后验稳健性的理论和方法。区别于 Bayes 决策的 Bayes 推断专门介绍在 § 5.2.3。

第六章介绍两种经验 Bayes 方法，一种是以 Robbins 提出的非参数 EB 方法(简称 NPEB 方法)，他是吸取 Bayes 学派的不孤立利用当前数据进行统计推断的好思想，避开或少用先验分布的假设，而使用当前数据和历史数据进行统计推断；另一种是 Morris 所提出的参数经验 Bayes 方法(PEB)，他是首先建立在参数模型中，假定先验分布为已知分布族类型，通过样本的参数估计获得后验分布，然后进行统计推断。叙述 NPEB 方法在大样本下，近似 Bayes 推断；推导 PEB 方法可以得到 Bayes 压缩估计、岭估计和稳健性问题，这种估计适合中小样本问题，它是介于古典统计和 Bayes 统计之间，容易使一般统计工作者所接受。

PEB 方法实际上是利用分级 Bayes 决策的结构，为此，我们在第七章介绍分级先验和分级 Bayes 分析方法。

第八章是介绍 Bayes 线性回归模型和灵敏度分析。我们知道，信息的综合是信息源的加权平均，估计量的分析是平均权的最优选择，而灵敏度分析是描述估计量的可能集合，它是稳健估计的一种方法。本章中特别指出分级结构的线性回归可直接应用到经济计量模型中具有随机系数的研究，而且更适于时间记录和截面记录这种二维数据的统计。

第九章是简单介绍具有随机决策法则的各种原理和一般理论，使读者对统计决策和 Bayes 分析有更全面的了解。

如前所述，统计学是各种应用学科必不可少的数学工具，这表明统计概念的有用性是客观存在的。但是由于非物质性格带来的数学抽象性，使统计的本质难以理解。比如，应用统计方法时，参数族 $f(x|\theta)$ 的选择是极其主观的，在 Bayes 统计中，先验分布和损失函数的选择也是主观的。如何清楚理解这些本质，或许可以利用熵和信息的概念得到新的认识，甚至可以促进新的统计学的研究。作者对这方面的调查研究工作，分别在 § 4.5、§ 4.6、§ 5.1.3 和 § 5.2.4 中叙述。我们还在 § 6.4 中专门介绍 BOX，G. E. P 建议的在科学建模的 Bayes 推断方法。

本来，对系统学习数理统计的读者，还应当了解频率学派和 Bayes 学派争论的观点和内容，以便对这门学科有较全面的认识，但由于国内已有材料专门介绍，本书就从略了。有兴趣的读者可参阅陈希孺教授等著的《数理统计教程》§ 5.1 等。

王梓坤教授审阅了本书的初稿，从内容的编排到体系的确定，都提出许多宝贵意见，而且还写了序言，使本书的内容更加充实，观点更加清晰；黄荣坦、廖书传、张开广同志为本书的编写提供了部分的材料；在出版过程中一直得到钟同德教授、林鸿庆教授，厦大出版社吴天祥同志的关注。正是由于他们的热情支持和帮助，使本书得以早日问世，作者在此深表谢意。

林叔荣

1991. 1. 30

注：本书系国家自然科学基金资助的项目。

目　　录

第一章 二人零和有限博奕

§1.1 基本概念

博奕论(Game Theory)又简称策略论，它是用定量方法研究两方或两方以上具有理智相互竞争的数学理论。

策略论是由 Borel(1921)和 Von Neumann(1928)开始建立的，Von Neumarnn 和 Morgenstern (1944)进一步扩充，建立最优策略论基础。

博奕论有二人、三人或更多人的博奕，本教材仅讨论二人博奕。二人博奕称为对策论。博奕又按照输赢总和是否为零定义为零和博奕或非零和博奕。这里着重介绍二人零和博奕的方法和理论。

博奕论中的最优策略涉及商业机制之间的相互竞争，人群之间和军事集团之间，政治集团之间对抗双方的斗争。二人零和有限博奕是最简单的一种策略，这是一种理论的极大简化。二人零和有限博奕不仅有实际的应用，而且更重要的是可利用最小最大原理到统计机制，使统计推断提高到一个新的阶段。事实上，统计工作者所处理和分析的问题，可以看成对策双方的博奕，即人作为一方(主观的)，自然界作为一方(客观的)。如果我们所研究的对象是一个随机变量 X，$X \sim f(x|\theta)$，为要对密度函数 $f(x|\theta)$ 或参数 θ 进行推断(估计或检验等)，我们总是对 X 进行观察(或抽样)，得到一个容量为 n 的简单子样，然后用经验分布或统计量 $T(X_1, \cdots, X_n)$ 对 θ 进行估计与检验，这就是人与自然界的博奕。对策的结果总会引起信息的减少或损失，一般用损失函数 $L(T, \theta)$ 来表示。例如，如果用子样均值 $\bar{X}$ 估计 $E(X) = \mu$，那么损失函数为方差 $Var(\bar{X})$，它表示误差的损失函数。为了获得估计的信度，我们总是用假设 H_0，H_1 作为自然界一方，以人作为一方，人选定某些准则，然后根据这些准则否定或肯定 H_0 子样均值。今后将会看到，我们可以利用一个判决函数和某些准则，进一步概括有关经典的统计推断问题。

二人零和有限博奕的一般规则是：需要有二个局中人(player)(Ⅰ)和(Ⅱ)，局中人(Ⅰ)具有有限个行动(actions)或策略(strategies)，记为

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}.$$

局中人(Ⅱ)也需有有限个策略

$$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}.$$

(Gains)

若局中人(Ⅰ)选取策略 α_i,局中人(Ⅱ)选取策略 β_j,则(α_i, β_j)构成一个局势。根据这种局势,决定(Ⅰ)赢得(gains)数量 a_{ij},而(Ⅱ)损失(loses)a_{ij}(或赢得$-a_{ij}$),$i=1,2,\cdots,m$,$j=1,2,\cdots,n$。按照以上规定,得到(Ⅰ)的赢得阵 $A=(a_{ij})mxn$,由于双方赢得数量总和为 0,故按上述规则定义的博奕称为二人零和有限博奕,简记为 $G=\{S_1, S_2, A\}$.二人零和有限博奕又简称为矩阵博奕。

典型二人零和有限博奕的例子是不少的。例如,两个人为了打赌某一事件,用三种手势作为策略:用手掌代表“纸”,拳头代表“石头”,两个手指代表“剪刀”。如果双方竞争和局用 0 表示,败局用-1表示,赢得用$+1$表示,由此可以得到甲方赢得阵如表 1—1 所示:

表 1—1

乙＼甲	纸	石	剪
纸	0	−1	1
石	1	0	−1
剪	−1	1	0

显然,表 1—1 是典型的二人零和有限博奕。

§1.2 最优纯策略

先从两个例子谈起。

例 1.2.1 设局中人(Ⅰ)和局中人(Ⅱ)所组成的局势和(Ⅰ)的赢得阵如表 1—2 所示。

表 1—2

Ⅰ＼Ⅱ	β_1	β_2	β_3
α_1	1	2	3
α_2	4	5	6

在表 1—2 中,局中人(Ⅰ)自然选取策略 α_2,局中人(Ⅱ)自然选取 β_1. 这是因为对(Ⅰ)来说,选取策略 α_2 可至少赢得 4,否则至多赢得 1.

例 1.2.2 设局中人(Ⅰ)和(Ⅱ)的局势和赢得阵为表 1—3

表 1—3

Ⅰ \ Ⅱ	β_1	β_2	β_3
α_1	3	0	2
α_2	−4	−2	8
α_3	5	−3	−1

显然,表 1—3 的局势阵的最优策略方案是难以直接确定的。如何选择一种最优准则,找出好的策略方案呢?一种自然的想法,就是首先要考虑对方种种使我不利的情况,然后找出其中对我有利的一种策略方案;即从最坏方案中找出最好的一个,这就是如下定义 1.2.1.

定义 1.2.1 (最大最小原理)称

$$\max_i \min_j a_{ij} \tag{1.2.1}$$

所对应的 α_i^* 为局中人(Ⅰ)的最大最小纯策略.

定义 1.2.1 的意义是明显的。它说明对局中人(Ⅰ)选取 α_i^* 使得

$$\min_j(a_{i^*j}) = \max_i \min_j(a_{ij}) \triangleq v_1 \tag{1.2.2}$$

就是说,局中人(Ⅰ)至少赢得 v_1

定义 1.2.2 我们称

$$\max_j \min_i(-a_{ij}) \tag{1.2.3}$$

所对应 β_j^* 为(Ⅱ)的最小最大纯策略。

如果记

$$v_2 = \min_j \max_i(a_{ij}) \tag{1.2.4}$$

那末(1.2.3)式变成

$$\max_j \min_i(-a_{ij}) = -\min_j \max_i(a_{ij}) = -v_2 \tag{1.2.5}$$

由(1.2.4)和(1.2.5)看到，对于局中人(Ⅰ)选取 β_j^* 使得

$$\max_i a_{ij^*} = \min_j \max_i(a_{ij}) = v_2 \tag{1.2.6}$$

(1.2.3)和(1.2.6)说明局中人(Ⅰ)至多输给 v_2。

下面要证明 $v_1 \leqslant v_2$，今后称 v_1 为博奕下值，v_2 为博奕上值。

引理 1.2.1 设 $f(x,y)$ 是定义在两个实数集合 A 和 B 上的二元实函数，如果 $\max\limits_{x\in A} \min\limits_{y\in B} f(x,y)$ 和 $\min\limits_{y\in B} \max\limits_{x\in A} f(x,y)$ 都存在，那末

$$\max_{x\in A} \min_{y\in B} f(x,y) \leqslant \min_{y\in B} \max_{x\in A} f(x,y) \tag{1.2.7}$$

证明 对 $\forall x\in A, y\in B$

$$\min_{y\in B} f(x,y) \leqslant f(x,y) \leqslant \max_{x\in A} f(x,y) \tag{1.2.8}$$

由(1.2.8)马上推出(1.2.7)。

定理 1.2.1 对任意二人零和有限博奕 $G=\{S'_1, S'_2, A\}$ 有

$$v_1 = \max_i \min_j(a_{ij}) \leqslant \min_j \max_i(a_{ij}) = v_2$$

定义 1.2.3 如果 $v_1=v_2=v$，那末称博奕有值，简称 v 为纯策略值。

一般而言，有可能 $v_1<v_2$，它说明竞争的双方都很不理想，还有进一步“交战”的余地。例如，若 $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$，则 $v_1=4, v_2=5, v_1<v_2$。由此说明，博奕有值是有条件的。但是，博奕有值的条件是什么？

定义 1.2.4 定义在 $A\times B$ 上的二元函数 $f(x,y), x\in A, y\in B$，若有 $x^*\in A, y^*\in B$，使得对所有 $x\in A, y\in B$ 有

$$f(x,y^*) \leqslant f(x^*,y^*) \leqslant f(x^*,y) \tag{1.2.9}$$

则称 (x^*,y^*) 是 $f(x,y)$ 的鞍点(saddle point)。

引理 1.2.2 对二元函数 $f(x,y), x\in A, y\in B$，若

$$v_2 = \min_{y\in B} \max_{x\in A} f(x,y), v_1 = \max_{x\in A} \min_{y\in B} f(x,y)$$

存在，则 $v_1=v_2=v$ 的充要条件是 $f(x,y)$ 有鞍点 (x^*,y^*)，而且有 $v=f(x^*,y^*)$。

证明 “$\Leftarrow$”设 (x^*,y^*) 是鞍点，由定义 1.2.4

$$f(x,y^*) \leqslant f(x^*,y^*) \leqslant f(x^*,y) \tag{1.2.10}$$

从而有

$$\min_{y\in B}\max_{x\in A} f(x,y) \leqslant \max_{x\in A} f(x,y^*) \leqslant f(x^*,y^*) \leqslant \min_{y\in B} f(x^*,y) \leqslant \max_{y\in B}\min_{x\in A} f(x,y) \tag{1.2.11}$$

由(1.2.11)可知 $v_2 \leqslant v_1$，再由引理 1.2.1 推出 $v_1 = v_2$，

"⇒"取 $x^* \in A, y^* \in B$，使得

$$\min_{y\in B} f(x^*,y) = \max_{x\in A}\min_{y\in B} f(x,y) = v_1 \tag{1.2.12}$$

$$\max_{x\in A} f(x,y^*) = \min_{y\in B}\max_{x\in A} f(x,y) = v_2 \tag{1.2.13}$$

这时，由(1.2.12)和(1.2.13)马上推出

$$f(x,y^*) \leqslant f(x^*,y^*) \leqslant f(x^*,y).$$

由引理 1.2.2 马上推出

定理 1.2.2 博奕 $G=\{S_1,S_2,A\}$ 有值的充要条件是，存在 (α^*,β^*) 使得对 $\forall$ i,j 有

$$a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j} \tag{1.2.14}$$

定理 1.2.2 说明了有限(矩阵)博奕有值等价于其值 $a_{i^*j^*}$ 是对应于 A 中元素取行中最小，取列中最大的值，(i^*,j^*) 就是鞍点，从而给出一种直接解法。

例 1.2.3 考虑如下博奕

	β_1	β_2	β_3	β_4	$\min_j a_{ij}$
α_1	7	2	5	1	1
α_2	2	2	3	4	2
α_3	5	3	4	4	3
α_4	3	2	1	6	1
$\max_i a_{ij}$	7	3	5	6	3=v

显然，博奕有值 $v=3$，α_3 和 β_2 是最优纯策略。

§ 1.3 混合扩充——随机博奕

一、定义

对于纯策略的博奕，鞍点可以不存在，即使存在，可以不唯一。人们往往借凭一定经验，对竞争的对方有所了解，估计各种策略的可能性，从中找出一种最优方案，这就是策略的混合扩充或随机化处理。

设给定博奕 $G=\{S_1,S_2,A\}$，若定义 S_1,S_2 上的两个概率测度——先验分布，记为：

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l} x_i=X(\alpha_i)\geqslant 0, i=1,2\cdots,m;\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_i=1\end{array} \tag{1.3.1}$$

$$Y=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l} y_i=Y(\beta_i)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n;\\ \sum\limits_{i=1}^{n}y_i=1\end{array}$$

则称 X 和 Y 为 S_1 和 S_2 的混合策略或随机策略。设 S_1^*、S_2^* 分别为（Ⅰ）与（Ⅱ）的混合策略的全体，即

$$S_1^*=\{(x_1,\cdots,x_m):x_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{m}x_i=1\} \tag{1.3.2}$$

$$S_2^*=\{(y_1,\cdots,y_n):y_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n}y_i=1\}$$

则得到博奕 G 的混合扩充（或随机）博奕 $G^*=\{S_1^*,S_2^*,E(\cdot,\cdot)\}$ 其中 $E(\cdot,\cdot)$ 表示对 $X\in S^*,Y\in S_2^*$，（Ⅰ）的赢得函数，即

$$E(X,Y)=\sum_{ij}a_{ij}x_iy_j. \tag{1.3.3}$$

类似最优纯策略的定义，自然要在（Ⅰ）中选 $X^*\in S_1^*$ 使得对所有 $Y\in S_2^*$ 有

$$\min_{Y\in S_2^*}E(X^*,Y)=\max_{X\in S_1^*}\min_{Y\in S_2^*}E(X,Y)\equiv v_1^* \tag{1.3.4}$$

类似地，在（Ⅱ）中选 $Y^*\in S_2^*$ 使得

$$\max_{X\in S_2^*} E(X,Y^*) = \min_{Y\in S_2^*} \max_{X\in S_1^*} E(X,Y) \equiv v_2^* \tag{1.3.5}$$

定义 1.3.1 称由(1.3.4)和(1.3.5)所确定的 X^* 和 Y^* 分别为(Ⅰ)和(Ⅱ)的最优混合策略或最优随机策略，如果 $v_1^* = v_2^*$，那末称混合扩充博奕 G^* 有值。

定理 1.3.1 $v_1 \leqslant v_1^* \leqslant v_2^* \leqslant v_2$ (1.3.6)

证明 留作练习

二、基本定理(最小最大定理)

下面要证明博奕论的一个基本定理，即混合扩充的博奕必有值。为此，先做一些准备工作。

定义 1.3.2 设 R^m 为 m 维欧氏空间，称 $D\subset R^m$ 是 R^m 中的一个凸集. 如果对 $\forall x_1, x_2 \in D$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in D$ 成立。

定义 1.3.3 称 $P\subset R^m$ 是 R^m 中的一个超平面，如果对 R^m 中的某一个点 $(h_1,\cdots,h_m)\neq(0,\cdots,0)$ 实值 h，有

$$P = \{x = (x_1,\cdots,x_m) = \sum_{i=1}^{n} h_i x_i = h\} \tag{1.3.7}$$

m

引理 1.3.1(The Separating Hyperplane Theorem) 设 $D\subset R^m$，D 是一个非空且 $D\neq R^m$ 的闭凸集，又 $E\subset R^m$ 是另一半闭凸集，且 $E\cap D=\Phi$，E 和 D 中至少一个有界，则存在一个形如(1.3.7)的越平面 P 使得

$$\sum_{i=1}^{m} h_i x_i \begin{cases} > h, \text{对所有 } x = (x_1,\cdots,x_m) \in D \\ < h, \text{对所有 } x = (x_1,\cdots,x_m) \in E \end{cases} \tag{1.3.8}$$

证明 由于 D 与 E 是闭凸的，故存在 $d=(d_1,\cdots,d_m)\in D$ 和 $e=(e_1,\cdots,e_m)\in E$(当 $E=\Phi$ 时，可取 $(e_1,\cdots,e_m)$ 为 D 外任意一点)，使得距离

$$\rho(d,e) = \rho(D,E) = \inf_{\substack{x\in D\\ y\in E}} \rho(x,y) > 0$$

现取

$$h_i = d_i - e_i, i = 1,2,\cdots,m, \tag{1.3.9}$$

$$h = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(d_i + e_i)(d_i - e_i) \tag{1.3.10}$$

显然，$h=(h_1,\cdots,h_m)\neq 0=(0,\cdots,0)$. 下面要证：由(1.3.9)和(1.3.10)所确定的 $h_i(i=1,\cdots,m)$ 和 h 是所要求的。事实上，任取 D 中一点 $x=(x_1,\cdots,x_m)$，由 D 的凸性，可证对 $\forall\lambda, 0<\lambda\leqslant 1$ 有

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)d_1, \cdots, \lambda x_m + (1-\lambda)d_m) \in D$$

由于

$$\rho(e,d) = \inf_{\substack{x\in D\\ y\in E}} \rho(x,y)$$

故

$$\sum_{i=1}^{m}[\lambda x_i + (1-\lambda)d_i - e_i\lambda]^2 \geqslant \sum_{i=1}^{m}(d_i - e_i)^2$$

即

$$\lambda^2\sum_{i=1}^{m}(x_i - d_i)^2 + 2\lambda\sum_{i=1}^{m}(x_i - d_i)(d_i - e_i) \geqslant 0 \tag{1.3.11}$$

用 λ 除(1.3.11)并令 $\lambda \to 0$,得

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i - d_i)(d_i - e_i) \geqslant 0$$

于是

$$\sum_{i=1}^{m}h_i x_i = \sum_{i=1}^{m}(d_i - e_i)x_i \geqslant \sum_{i=1}^{m}(d_i - e_i)d_i \tag{1.3.12}$$

但另方面由于

$$\sum_{i=1}^{m}(d_i - e_i)^2 > 0 \tag{1.3.13}$$

故

$$\sum_{i=1}^{m}d_i(d_i - e_i) > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(d_i + e_i)(d_i - e_i) \tag{1.3.14}$$

因此,由(1.3.12)和(1.3.14)推出

$$\sum_{i=1}^{m}h_i x_i > h = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(d_i + e_i)(d_i - e_i) \tag{1.3.15}$$

类似地可证,对$\forall\ x=(x_1,\cdots,x_m)\in E$ 有

$$\sum_{i=1}^{m}h_i x_i < h$$

定理 1.3.2(The Minimax Theorey) 任何有限扩充博奕必有值。

证明 要证 $\exists\ (X^*,Y^*)$使得

$$v_1^* = \max_{X\in S_1^*}\ \min_{Y\in S_2^*} E(X、Y) = \min_{Y\in S_2^*}\ \max_{X\in S_1^*} E(X、Y) = v_2^*$$

由定义 1.3.1,$v_1^* \leqslant E(X^*、Y^*) \leqslant v_2^*$,故只须证明$v_1^* \geqslant v_2^*$. 为此,只须证明,对$\forall\ c_1 < v_2^*$一定有

$c_j < v_1^*$.

现在，任取实数 c，使得

$$c < \min_{Y} \max_{X} E(X、Y)$$

故对所有 $Y \in S_2^*$，均有

$$c < \max_{X} E(X、Y).$$

即对每一个 $Y \in S_2^*$，至少有一个 $X \in S_1^*$，使得

$$c < E(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \Big[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\Big],$$

从而，至少有一个 i，使得

$$c < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

再令

$$D = \{(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j) : (y_1, \cdots, y_n) \in S_2^*\}$$

且 D 中的每一点，至少有一个坐标大于 c，令

$$E = \{(x_1, \cdots, x_m) : x \in R^m, x_i \leqslant c, i = 1, \cdots, m\}$$

不难验标：D 是闭凸集，$D \neq \Phi$，$D \neq R_m$，同时 E 也是闭凸集，D 与 E 都是有界的，根据引理1.3.1，存在超平面

$$P = \{(z_1, \cdots, z_m) : h_1 z_1 + \cdots + h_m z_m = h\}$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m} h_i z_i = \begin{cases} > h, (z_1, \cdots, z_m) \in D, \\ < h, (z_1, \cdots, z_m) \in E. \end{cases}$$

但对$\forall\ \alpha > 0$，$(c-\alpha, c, \cdots, c) \in E$，从而

$$c \sum_{i=1}^{m} h_i - \alpha h_1 < h$$

因此，$h_1 > 0$，同样地，可以证明 $h_i \geqslant 0, i = 2, 3, \cdots, m$. 由于 $\sum_{i=1}^{m} h_i > 0$，这时可以构造