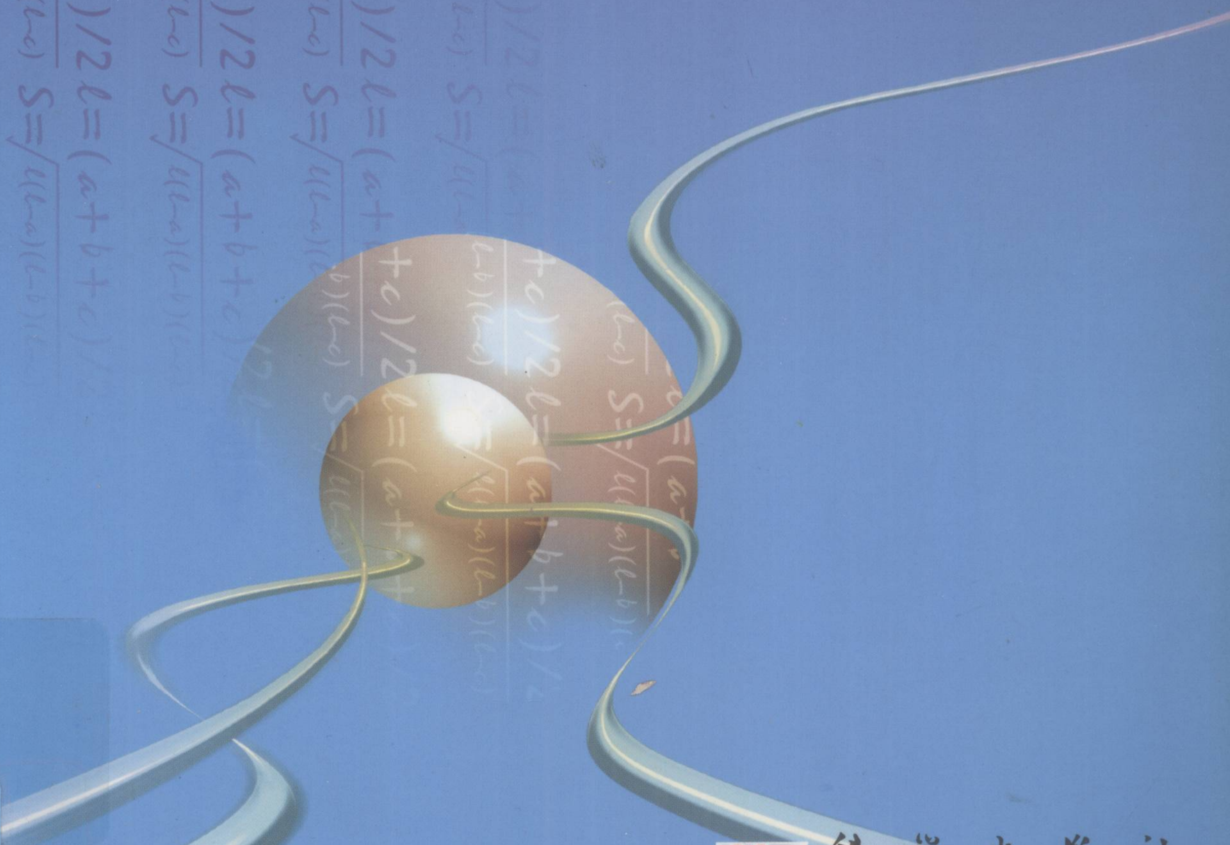
全国高校网络教育公共基础课统一考试用书

高等数学

全国高校网络教育考试委员会办公室　组编



科学出版社
www.sciencep.com

全国高校网络教育公共基础课统一考试用书

高等数学

全国高校网络教育考试委员会办公室　组编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是全国高校网络考试委员会办公室组织编写的现代远程教育全国统一考试用书. 使用对象为教育部批准的现代远程教育试点高校网络教育学院和中央广播电视大学"人才培养模式改革和开放教育试点"项目中自2004年3月1日(含3月1日)以后入学的本科学历教育的学生.

"高等数学(A)"考试大纲适用于数学类专业的高中起点本科学生;"高等数学(B)"考试大纲适用于除数学专业以外的其他理工类专业的高中起点本科学生. 其他非文、史、法、医、教育、艺术类专业的高中起点本科学生也可报考"高等数学(B)"科目.

本考试用书依据全国网络教育统考"高等数学考试大纲"的要求而编写,基本知识的深、广度依考试大纲而选定,基本例题依考试的难度与题型而编写. 书末附有考试大纲、题型示例和样卷.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/全国高校网络教育考试委员会办公室组编. —北京:科学出版社,2005.3
(全国高校网络教育公共基础课统一考试用书)
ISBN 7-03-014996-3

Ⅰ.高… Ⅱ.全… Ⅲ.高等数学-高等学校:网络教育-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第010088号

责任编辑: 刘宝莉 李鹏奇 / 责任校对: 包志虹
责任印制: 安春生 / 封面设计: 王壮波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年3月第 一 版 开本: 787×960 1/16
2006年1月第四次印刷 印张: 15
印数: 15 001—20 000 字数: 300 000
定价: 25.00元

前　　言

教育部批准的现代远程教育试点高校网络教育学院和中央广播电视大学“人才培养模式改革和开放教育试点”的学校，自 2004 年 3 月 1 日（含 3 月 1 日）以后入学的本科学历教育的学生，都应参加网络教育的部分公共基础课全国统一考试.

全国统一考试，旨在遵循网络教育应用型人才的培养目标，针对从业人员继续教育的特点，重在检查学生掌握基础知识的水平及应用能力，全面提高现代远程高等学历教育的教学质量.

高等数学课程是现代远程教育试点高校网络教育实行全国统一考试的公共基础课之一. 考试定位于基础水平检测性考试，水平线定在考试合格者应达到与成人高等教育本科相应高等数学课程要求的水平. 考试的目标是考查学生的高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和常用的技能，并以此检测学生分析问题、解决问题的能力.

这本辅导教材是为了帮助考生复习、备考而编写，因此称之为考试辅导教材. 本书依照考试大纲的要求而编写. 基本知识的选取深、广度依考试大纲而确定，基本例题的选取依考试题目的难度与题型而确定.

考试大纲分高等数学 A，高等数学 B 两类. 高等数学 A 大纲适用于数学类的高中起点本科生. 高等数学 B 大纲适用于除数学类以外的其他理工类专业的高中起点本科学生及非文、史、法、医、教育、艺术类的高中起点本科学生.

请考生注意：本辅导教材中注 * 的部分仅高等数学 A 大纲要求，本辅导教材中注 * * 的部分仅高等数学 B 大纲要求.

本书编写组

二〇〇四年十二月

目　　录

第 1 章　函数、极限、连续

1.1　函　　数

一、考试内容

函数的定义，函数的表示法，分段函数，反函数，复合函数，隐函数，* 由参数方程所确定的函数，函数的性质（有界性、奇偶性、周期性、单调性），基本初等函数，初等函数.

二、考试要求

1. 理解函数的概念. 掌握函数的表示法，会求函数的定义域.
2. 理解函数的有界性、奇偶性、周期性和单调性.
3. 理解分段函数、反函数、复合函数、隐函数和 * 由参数方程所确定的函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质和图像. 了解初等函数的概念.

*5. 会根据实际问题建立函数表达式.

三、基本知识

1. 函数的定义

设有两个变量 x 和 y，如果对于 x 所考虑范围内的每一个值，y 按一定规则对应着一个确定的值，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

2. 定义域

对于自变量 x 变化范围内的每一个值 x_0，函数 y 有一个确定的值 y_0 与之对应，我们称函数在点 x_0 处是有定义的，使函数有定义的点的全体（也就是 x 变化范围）称为函数的定义域.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$，当变量 x 在一个区域 D_f 内变化时，变量 y 在区域 R_f 内变化，如果对于变量 y 在区域 R_f 内任取一个值 y_0，变量 x 在区域 D_f 内有 x_0，使 $y_0=f(x_0)$，则变量 x 是变量 y 的函数，用 $x=\varphi(y)$ 表示，函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

4. 复合函数

两个函数的所谓复合，实际上就是中间变量介入自变量到因变量的变化过程. 设有如下两个函数 $f: y=f(u), u\in D_f, g: u=g(x), x\in D_g$.

若有 $R_g \subset D_f$，这样就可得复合函数 $y = f(g(x))$，$x \in D_g$.

由复合函数的定义可知，函数 f 和 g 能否构成复合函数 $f(g(x))$，关键在于第二个函数的值域 R_g 是否包含在第一个函数的定义域 D_f 中，故有时候复合函数的定义域要小一些.

5. 有界性

若存在两个数 A 和 B，对一切 $x \in D_f$ 恒有 $A \leqslant f(x) \leqslant B$，则称函数 $y = f(x)$ 在 D_f 内是有界函数，否则就称为无界函数.

6. 奇偶性

设有函数 $y = f(x)$，$x \in (-a,a)$，那么：

(1) 若对任何 $x \in (-a,a)$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称函数为 $(-a,a)$ 上的偶函数.

(2) 若对任何 $x \in (-a,a)$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称函数为 $(-a,a)$ 上的奇函数.

7. 周期性

设有函数 $y = f(x)$，$x \in (-\infty, +\infty)$，若存在 $\omega \neq 0$，对一切 $x \in (-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x+\omega) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，ω 为 $f(x)$ 的一个周期.

8. 单调性

设有函数 $y = f(x)$，$x \in D_f$，若对任意两点 $x_1, x_2 \in D_f$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D_f 内单调增加. 反之，若对任意两点 $x_1, x_2 \in D_f$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D_f 内单调减少.

9. 基本初等函数

基本初等函数是指：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

10. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和复合运算而得到的能用一个解析表达式表示的函数都叫初等函数.

四、例题分析

(一) 选择题

在每小题给出的 4 个选项中，只有一项符合题目要求，选出符合题目要求的选项.

例 1 函数 $f(x) = \dfrac{1}{\lg|x-5|}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$　　B. $(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$

C. $(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$　　D. $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

分析 对数的真数 $|x-5| > 0$，因此 $x \neq 5$.

分母 $\lg|x-5| \neq 0$，因此 $|x-5| \neq 1$，可解得 $x \neq 4$，$x \neq 6$. 故知 $f(x)$ 的定义域是 B.

例 2 函数 $y = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是(　　).

A. $(-1,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

分析　由于对数的真数 $(x+1)>0$,开平方根的表达式 $x-1\geqslant 0$,分母 $x-1\neq 0$,可得 $\begin{cases} x+1>0, \\ x-1>0, \end{cases}$ 解得 $x>1$. 故选 C.

例 3　设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<-1, \\ x^2-1, & x\geqslant -1, \end{cases}$ 则 $f(0)$ 等于(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

分析　因为 $0>-1$,当 $x\geqslant -1$ 时,$f(x)=x^2-1$. 因此 $f(0)=-1$,故选 A.

例 4　设 $f(x)=\sin x^2,\varphi(x)=x^2+1$,则 $f(\varphi(x))=$(　　).

A. $\sin(x^2+1)^2$　　B. $\sin^2(x^2+1)$　　C. $\sin(x^2+1)$　　D. $\sin^2 x^2+1$

分析　由函数关系式可知

$$f(\varphi(x))=\sin[\varphi(x)]^2=\sin[(x^2+1)]^2,$$

故应选 A.

例 5　设 $f(x-a)=x(x-a)$(a 为大于零的常数),则 $f(x)=$(　　).

A. $x(x-a)$　　B. $x(x+a)$　　C. $(x-a)(x+a)$　　D. $(x-a)^2$

分析　所给问题为函数符号运用问题.

令 $x-a=t$,则 $x=t+a$,因此

$$f(t)=f(x-a)=(t+a)t,$$

故

$$f(x)=x(x+a),$$

可知应选 B.

例 6　函数 $y=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$ $(a>0,a\neq 1)$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 既是偶函数又是奇函数

分析　因为

$$\begin{aligned} f(-x)&=\log_a(\sqrt{1+x^2}-x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)^{-1} \\ &=-\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x), \end{aligned}$$

故选 B.

例 7　函数 $y=|\sin 2x|$ 的周期是(　　).

A. 2π　　B. 4π　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

分析　因为

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)&=\left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right| \\ &=|\sin(\pi+2x)|=|\sin 2x|=f(x), \end{aligned}$$

故选 D.

例 8 函数 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 是定义域内的(　　).

A. 周期函数　　B. 单调函数　　C. 有界函数　　D. 无界函数

分析 由于 $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，可知应选 C.

例 9 函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x\,(a>0,a\neq 1)$ 的图形是(　　).

A. 关于原点对称　　B. 关于 X 轴对称

C. 关于 Y 轴对称　　D. 关于直线 $y=x$ 对称

分析 因为函数 $y=a^x$ 与函数 $y=\log_a x$ 是互为反函数. 可知它们的图形关于直线 $y=x$ 对称，故应选 D.

(二) 填空题

例 10 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，则 $f(x)=$ ____________.

分析 令 $u=x+1$，则 $x=u-1$，可得 $f(u)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3$，因此 $f(x)=x^2+x+3$.

例 11 设 $y=3^u$，$u=v^2$，$v=\tan x$，则 $y=f(x)=$ ____________.

分析 这是复合函数问题，只需依次复合可得：$y=3^u=3^{v^2}=3^{\tan^2 x}$.

例 12 函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}+\cos x$ 的定义域是____________.

分析 要使上述函数有意义，x 必须满足：$x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$. 即 $x\neq 0$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 1$. 所以 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,0)\cup(0,1]$.

例 13 函数 $f(x)=2^{x-1}-1$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ ____________.

分析 令 $y=2^{x-1}-1$，则 $x=\log_2(y+1)+1$，所以 $f^{-1}(x)=\log_2(x+1)+1$.

练习题 1.1

(一) 选择题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ 等于(　　).

A. 1　　B. -1　　C. $f(x)$　　D. $\frac{1}{f(x)}$

2. 函数 $y=\frac{e^x}{e^x+1}$ 的反函数是(　　).

A. $y=\frac{x}{1-x}$　　B. $y=\ln\frac{x}{1-x}$　　C. $y=\frac{1-x}{x}$　　D. $y=\ln\frac{1-x}{x}$

(二) 填空题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\log(1-x)}{1-|x|}$ 的定义域是____________.
2. 若 $f(2^x-1)=x+1$，则 $f(x)=$ ____________.
3. 若 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f(\varphi(x))=$ ____________.

练习题 1.1 参考解答

(一) 选择题

1. 因为 $|f(x)|=1$，可知 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=1$，从而知 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=1$，故选 A.

2. 由于 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$，可得 $\mathrm{e}^x y+y=\mathrm{e}^x$，$\mathrm{e}^x(1-y)=y$，$\mathrm{e}^x=\dfrac{y}{1-y}$，因此

$$x=\ln\frac{y}{1-y},$$

可知其反函数为 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$. 故选 B.

(二) 填空题

1. 要使上述函数有意义，x 必须满足：$1-|x|\neq 0$ 且 $1-x>0$. 即 $x\neq\pm 1$ 且 $x<1$. 所以 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)$.

2. 令 $y=2^x-1$，则 $x=\log_2(y+1)$，故 $f(y)=\log_2(y+1)+1$，$f(x)=\log_2(x+1)+1$.

3. $f(\varphi(x))=(\varphi(x))^2=(\mathrm{e}^x)^2=\mathrm{e}^{2x}$.

1.2　极　　限

一、考试内容

数列极限的定义和性质，函数极限的定义和性质，函数的左极限与右极限，无穷小和无穷大的概念及其关系，无穷小的性质和无穷小的比较，极限的四则运算法则，极限存在的两个准则（单调有界准则和夹逼准则），两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

二、考试要求

1. 理解数列极限和函数极限的概念（数学 A 包含极限定义中"$\varepsilon-N$"，"$\varepsilon-\delta$"等形式的

表述，数学 B 对表述不作要求）．

2. 会求数列的极限．会求函数的极限（含左极限、右极限）．了解函数在一点处极限存在的充分必要条件．

3. 掌握极限的性质和四则运算法则．

4. 理解无穷小和无穷大的概念．掌握无穷小的性质、无穷小与无穷大的关系．了解高阶、同阶、等价无穷小的概念．会用等价无穷小求极限．

5. 会利用极限存在的两个准则求极限．* 掌握利用两个重要极限求极限的方法（仅数学 A 要求）．

三、基本知识

1. 数列 $\{u_n\}$ 的极限定义

如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$ 成立（其中 A 为常数），则称 A 是数列 $\{u_n\}$ 当 n 趋向无限大的极限，或者说数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A \text{ 或 } u_n\to A.$$

如果数列极限不存在，就说数列是发散的．

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义

如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$．

记号 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，表示当 x 大于 x_0 而趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，叫右极限；记号 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，表示当 x 小于 x_0 而趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，叫左极限．

3. 无穷小量和无穷大量

所谓无穷小量，就是以零为极限的变量．

如果对于任意给定的正数 M，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$．

无穷小量和无穷大量之间，有如下关系：在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷小量且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量；反之，如果 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量．

4. 无穷小量的性质和无穷小量的阶的比较

两个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量．

有界变量与无穷小量之积仍为无穷小量．

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为自变量趋向同一值（或 ∞）时的无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=K$：

(1) 若 $0 < K < +\infty$,则称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$ 和 $g(x)$ 为同阶无穷小量;

(2) 若 $K = 1$,则称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$ 和 $g(x)$ 为等价无穷小量,记作 $f(x) \sim g(x)$;

(3) 若 $K = 0$,则称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量,记作 $f(x) = o(g(x))$;

(4) 若 $K = +\infty$,则称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小量.

对无穷大量,亦可类似定义.

5. 极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. 则有:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = cA$　(c 为常数);

(3) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)] \cdot [\lim\limits_{x \to x_0} g(x)] = A \cdot B$;

(4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$　$(B \neq 0)$.

6. 极限存在的两个准则

准则1　设在点 x_0 的某一邻域内不等于 x_0 的一切 x,有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,且成立 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$,则有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

准则2　单调有界数列必有极限.

7. 两个重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}\quad \left[\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\right].$$

8. 常见的等价无穷小量代换

在极限的运算中,常常可以在极限的乘除法运算中利用等价无穷小量代换,以简化运算. 常见的等价无穷小量代换有:

当 $x \to 0$ 时,$\sin x \sim x$,$\tan x \sim x$,$\arcsin x \sim x$,$\arctan x \sim x$,$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$,$\ln(1 + x) \sim x$,$\sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x$,$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

四、例题分析

(一) 选择题

在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,选出符合题目要求的选项.

例 1　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=(\quad)$.

A. e^2　　B. e　　C. $\sqrt{e}$　　D. ∞

分析　利用重要极限公式可得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=e^2,$$

故选 A.

例 2　$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=(\quad)$.

A. $e^{-\frac{1}{3}}$　　B. e^{-3}　　C. $e^{\frac{1}{3}}$　　D. e^3

分析　利用重要极限公式可得

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+(-3x))^{\frac{1}{-3x}}\}^{(-3)}=e^{-3},$$

故选 B.

例 3　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=(\quad)$.

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

分析　这类题目有两种解法.

解法一　利用重要极限公式与极限四则运算法则,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right)=1\cdot 2\cdot 1=2,$$

故选 D.

解法二　利用等价无穷小量代换.

当 $x\to 0$ 时,$\tan x\sim x$,因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2,$$

故选 D.

例 4　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{\sin 4x}=(\quad)$.

A. 0　　B. ∞　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

分析　利用等价无穷小量代换:当 $x\to 0$ 时,$\tan x\sim x$,$\sin x\sim x$,可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4},$$

可知选 C.

例 5　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ 等于(　　).

A. 0　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. 1　　D. 3

分析　利用等价无穷小量代换:当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3,$$

可知选 D.

如果本题利用重要极限公式也可解.

例 6　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$ 等于(　　).

A. ∞　　B. 2　　C. 0　　D. -2

分析　利用等价无穷小量代换:当 $x\to 0$ 时,$e^x-1\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}=-2,$$

可知选 D.

例 7　极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}$ 等于(　　).

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

分析　所给极限不是重要极限公式的类型,它是 $x\to\infty$!

虽然 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin 2x$ 不存在,但是 $|\sin 2x|\leqslant 1$ 为有界变量,当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量. 由"有界变量与无穷小量之积仍为无穷小量"的性质,可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin 2x=0,$$

可知应选 A.

例 8　当 $x\to\infty$ 时,$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$(　　).

A. 是无穷大量　　B. 是无穷小量　　C. 极限为 1　　D. 没有极限

分析　注意所给题目与例 7 的差异. 当 $x\to\infty$ 时,$\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量. 将原式变形可得

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

可知应选 C.

例 9 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)$ 与 x 比较是(　　).

A. 高阶无穷小量　　B. 等价无穷小量

C. 非等价的同阶无穷小量　　D. 低阶无穷小量

分析 由无穷小量阶的比较定义可知，只需考察

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

可知当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)$ 与 x 为等价无穷小量，故选 B.

例 10 设 x 和 y 分别是同一变化过程中的两个无穷大量，则 $x-y$ 是(　　).

A. 无穷大量　　B. 无穷小量　　C. 常数　　D. 不能确定

分析 注意无穷大量不具备无穷小量的运算性质：即两个无穷大量之和不一定为无穷大量. 同样两个无穷大量之差不一定为无穷小量. 例如：

(1) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=+\infty$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-|x|)=\lim_{x\to+\infty}|x|(|x|-1)=+\infty.$$

(2) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-\left(x^2+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0.$$

(3) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}[x^2-(x^2+1)]=-1.$$

可知应选 D.

(二) 填空题

例 11 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=$ ____________.

分析 由重要极限公式可得

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}(-6)}=e^{-6}$$

例 12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x=$ ____________.

分析 由重要极限公式可得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{-2x\left(-\frac{1}{2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

例 13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=$ ____________.

分析 由等价无穷小量代换：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$ 可得