汽车可靠性数据分析应用实例

崔高勤 编

长春汽车研究所

1985.9

前　　言

汽车可靠性工程的研究，随着汽车工业的迅速发展，越来越被人们所重视。这是由于市场和用户要求得到性能指标先进，可靠性高，经济实用的产品。可靠性是产品的一个重要质量指标；在全面质量管理中，可靠性管理已成为质量保证体系的一个重要内容。近年来，可靠性技术在机械行业中逐渐被应用，但从应用的深度和广度上还远远满足不了客观的需要。为了更好地推广应用可靠性理论，促进机械产品的可靠性管理，提高产品可靠性质量，特编写这本《汽车可靠性数据分析应用实例》，供从事可靠性设计、分析、试验、检查、维修服务人员和科研、专业教学人员的参考。

这本《汽车可靠性数据分析应用实例》册子的内容，主要以汽车零部件寿命统计分析为例，介绍可靠性数据统计分析方法。为了节省工程技术人员的宝贵时间，提高工作效率，编者特编制了《特殊的中位秩表》供读者使用。如对读者有益，不胜安慰。

由于编者水平所限，错误之处难免，希望读者批评指正。

编者　崔高勤

1985年8月15日

目　　录

一、概率论的基本概念

1．写出下列随机试验的样本空间。

（1）甲乙二人下棋一局，观察棋赛的结果。

（2）测量一汽车通过给定点的速度。

（3）记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数。

（4）在一批半轴中任意抽取两根，测试它们在10万次定时截尾试验时，失效结果。

（5）记录某台CA—15汽车从长春到北京的最高车速与最低车速。

〔解〕：（1）$S_1=\{e_0, e_1, e_2\}$

其中 e_0——表示和棋，e_1——表示甲胜，e_2——表示乙胜。

（2）$S_2=\{v \mid v \geqslant$ 最小稳定车速 $V'\}$。

（3）$S_3=\{0, 1, 2\cdots\cdots\}$。

（4）$S_4=\{AB, \overline{A}B, A\overline{B}, \overline{A}\overline{B}\}$

其中A，B分别表示两根半轴经10万次寿命试验均未失效；$\overline{A}$，$\overline{B}$分别表示两根半轴经10万次寿命试验已失效。

（5）$S_5=\{(v_1; v_2) \mid v_{min} \leqslant v_1 < v_2 \leqslant v_{max}\}$

其中v_1表示最低车速，v_2表示最高车速，v_{min}表示该车的最小稳定车速，v_{max}表示该车的最大车速。

2．设A，B，C为三事件，用A，B，C的运算关系表示下列事件。

（1）A，B，C中至少有一个发生。

（2）A，B，C都发生。

（3）A，B，C都不发生。

（4）A发生，B与C不发生。

（5）A与B都发生，而C不发生。

〔解〕：（1）$A \cup B \cup C$。

（2）ABC。

（3）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$。

（4）$A\overline{B}\,\overline{C}$。

（5）$AB\overline{C}$。

3．已知在10个转向指示器中，有二个是次品，在其中取二次，每次随机地取一个，作不放回抽样，求下列事件的概率。

（1）二个都是正品。

（2）二个都是次品。

（3）一个是正品，一个是次品。

（4）第二次取出的是次品。

（5）第二次取出的是正品。

〔解〕：设以A_i（$i=1$，2）表示事件"第i次取出的是正品"，已知是不放回抽样，所以

（1）$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$

（2）$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$

（3）$P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)$

$=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2\mid\overline{A}_1)$

$=\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$

（4）$P(\overline{A}_2)=P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)$

$=\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{45}+\frac{1}{45}=\frac{1}{5}$

（5）$P(A_2)=P(A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)$

$=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2\mid\overline{A}_1)$

$=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{28}{45}+\frac{8}{45}=\frac{4}{5}$

4．某光学仪器厂制造的透镜，在第一次落下时打破的概率为1/2，第二次落下时打破的概率为3/10，第三次落下时打破的概率为9/10，如果透镜落下三次，它打破的概率是多少？

〔解法1〕：设以A_i（$i=1,2,3$）表示事件"透镜在第i次落下时打破"，以A表示事件"透镜落下三次打破"。按题意：$A=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$，而$A_1$，$\overline{A}_1A_2$，$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$是互不相容的，故有

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

而已知$P(A_1)=1/2$，$P(A_2\mid\overline{A}_1)=3/10$，$P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=9/10$，即有

$$P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$$

$$\begin{aligned}P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)&=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=[1-P(A_1)][1-P(A_2\mid\overline{A}_1)]P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\end{aligned}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{9}{10}=\frac{63}{200}$$

$$\therefore P(A)=\frac{1}{2}+\frac{3}{20}+\frac{63}{200}=\frac{193}{200}$$

〔解法2〕：仍用解法1的记号。因为

$\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，故有

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$=1-P(\overline{A}_1)\ P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\ P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3}{10}\right)\left(1-\frac{9}{10}\right)=\frac{193}{200}$$

5．其工厂中，机器B_1，B_2，B_3分别生产产品总数的25%，35%和40%。它们生产的产品中分别有5%，4%，2%的次品，将这些产品混在一起，今随机地取一只产品，发现是次品。问这一次品是由机器B_1，B_2，B_3生产的概率分别是多少？

〔解〕：设以H_i（$i=1,2,3$）表示事件“取到的一只产品是由机器B_i生产的”，以A表示事件“取到的一只是次品”，则有

$P(H_1)=0.25$,　　$P(H_2)=0.35$,　　$P(H_3)=0.40$

$P(A|H_1)=0.05$,　　$P(A|H_2)=0.04$,　　$P(A|H_3)=0.02$

$$\therefore P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|H_i)P(H_i)=0.0345$$

再由贝叶斯公式得

$$P(H_1|A)=P(H_1)P(A|H_1)/P(A)=\frac{25}{69}$$

这就是这一次品是由机器B_1生产的概率，同法可得它由机器B_2，B_3生产的概率分别为

$\frac{28}{69}$及$\frac{16}{69}$。

6．系统B是由A_1，A_2，A_3构成的。它们的可靠度分别为$R_1=0.91$，$R_2=0.96$，$R_3=0.99$。

另外，已知A_1，A_2，A_3发生故障的条件下，B发生故障的条件概率分别为：$P(B|A_1)=0.2$，$P(B|A_2)=0.05$，$P(B|A_3)=0.01$。当B偶然发生故障时，认为A_1，A_2，A_3中是哪个发生了故障比较妥当呢？

〔解〕：根据贝叶斯公式

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

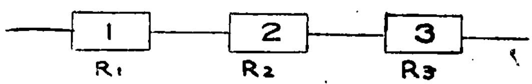
将各个值代入，计算得

$$P(A_1|B)=0.895$$
$$P(A_2|B)=0.0955$$
$$P(A_3|B)=0.005$$

因此，可知由于A_1的故障，系统B发生故障的概率最大。

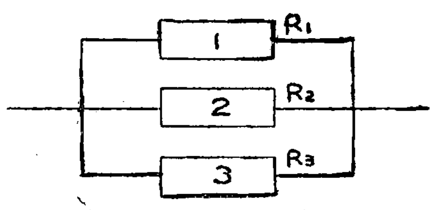
7．对于零件，它能正常工作的概率P称做这个零件的可靠度。由零件组成的整机或系统，它能正常工作的概率P称做整机或系统的可靠度。设有3个部件按着下面两种不同联接方式构成两个系统。且各个部件能否正常是相互独立的。求每个系统的可靠度。

系统Ⅰ （串联情况）



（图1）

系统Ⅱ （并联情况）



（图2）

〔解〕 先讨论系统Ⅰ

设A_i（$i=1,2,3$）为事件“第i个部件能正常工作”；A为事件“整个串联系统能正常工作”。

由于整个串联系统能正常工作等价于三个部件都正常工作，所以$A=A_1A_2A_3$，又由于A_1，A_2，A_3相互独立，故有

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$
$$=R_1\cdot R_2\cdot R_3$$

对于系统Ⅱ，我们令

A_i为事件“第i个部件能正常工作”；A为事件“整个并联系统能正常工作”。

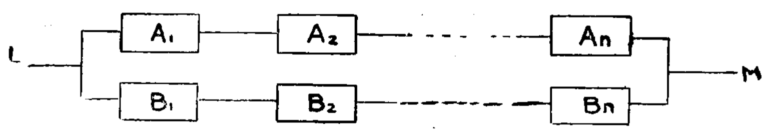
由于这并联系统能正常工作等价于这三个部件中至少有一个能正常工作，所以

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

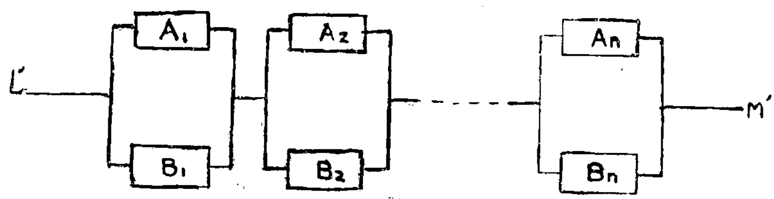
因为 $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；又因为$A_1$，$A_2$，$A_3$相互独立，所以$\overline{A}_1$，$\overline{A}_2$，$\overline{A}_3$也相互独立，故

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$$
$$= 1 - (1-R_1)(1-R_2)(1-R_3)$$

8．设构成系统的每个元件的可靠度均为 r $(0<r<1)$。且各元件能否正常工作是相互独立的。设以 $2n$ 个元件按照下面两种不同联接方式构成二个系统，试求它们的可靠度。并比较二个系统的可靠性。



（图3）



（图4）

〔解〕：讨论系统Ⅰ $(L-M)$

设系统可靠工作为 $\{C_1\}$，则

$$\{C_1\} = A_1A_2\cdots\cdots A_n \cup B_1B_2\cdots\cdots B_n$$

$$\therefore P\{C_1\} = P(A_1A_2\cdots\cdots A_n \cup B_1B_2\cdots\cdots B_n)$$
$$= P(A_1A_2\cdots\cdots A_n) + P(B_1B_2\cdots\cdots B_n)$$
$$- P(A_1A_2\cdots A_nB_1B_2\cdots B_n)$$
$$= P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) + P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_n)$$
$$- P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_n)$$
$$= r^n + r^n - r^{2n}$$
$$= r^n(2 - r^n)$$

讨论系统Ⅱ（L′－M′）

设系统Ⅱ可靠工作为｛$C_{Ⅱ}$｝则

$\{C_{Ⅱ}\} = (A_1 \cup B_1)\ (A_2 \cup B_2) \cdots\cdots (A_n \cup B_n)$

$$\begin{aligned}\therefore P\{C_{Ⅱ}\} &= P(A_1 \cup B_1)\ P(A_2 \cup B_2) \cdots\cdots P(A_n \cup B_n) \\ &= [P(A_1)+P(B_1)-P(A_1B_1)]\ [P(A_2)+ \\ &\quad +P(B_2)-P(A_2B_2)] \cdots\cdots [P(A_n)+P(B_n)-P(A_nB_n)] \\ &= (2r-r^2)\ (2r-r^2) \cdots\cdots (2r-r^2) \\ &= (2r-r^2)^n \\ &= r^n(2-r)^n\end{aligned}$$

对系统Ⅰ及系统Ⅱ进行分析比较。

（1）系统Ⅰ：$P(C_Ⅰ) = r^n(2-r^n)$

其中r^n正是一个串联系统的可靠度。可见$P(C_Ⅰ) > r^n$，∵$2-r^n>1$，∴增加一个串联系统与其并联，能使整个系统的可靠度增加。

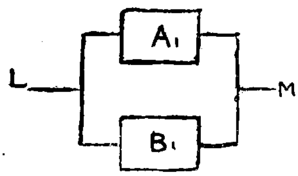
（2）系统Ⅱ：$P(C_Ⅱ) = r^n(2-r)^n$

显然，$P(C_Ⅱ) > r^n$，因此，用附件元件的方法也同样能增加系统的可靠度。

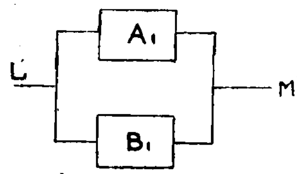
（3）比较系统Ⅰ同系统Ⅱ的可靠性

当$n=1$时，$P(C_Ⅰ) = P(C_Ⅱ)$。

这说明系统Ⅰ同系统Ⅱ可靠性一样，这是显然的。见图5及图6。



（图5）

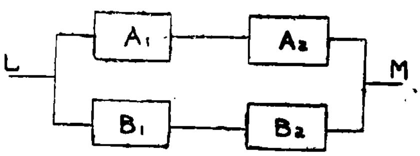


（图6）

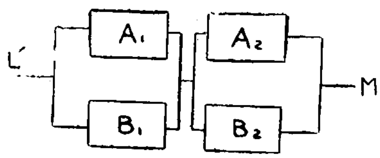
当$n>1$的任意正整数时，又如何呢？

用数学归纳法证明系统Ⅱ比系统Ⅰ更为可靠。

当$n=2$时，有图7及图8。



（图7）



（图8）

比较 $P(C_{\rm I})=r^2(2-r^2)$ 及 $P(C_{\rm II})=r^2(2-r)^2$
可见，只要比较 $2-r^2$ 及 $(2-r)^2$ 谁大谁小就可以了。

$$\begin{aligned}(2-r)^2&=4-4r+r^2\\&=(2-r^2)+2-4r+2r^2\\&=(2-r^2)+2(1-2r+r^2)\\&=(2-r^2)+2(1-r)^2>(2-r^2)\end{aligned}$$

$\therefore P(C_{\rm II})>P(C_{\rm I})$

假设　对于 $n-1$ 有上面结论，即

$r^{n-1}(2-r)^{n-1}>r^{n-1}(2-r^{n-1})$ 成立

证明对于 n 有 $P(C_{\rm II})>P(C_{\rm I})$ 即证明下式成立

$r^n(2-r)^n>r^n(2-r^n)$

只要证明

$(2-r)^n>2-r^n$ 就可以了。

证明：$(2-r)^n=(2-r)^{n-1}\cdot(2-r)>(2-r^{n-1})(2-r)$
（这是根据 $n-1$ 时成立的结论）

$$\begin{aligned}&=4-2r^{n-1}-2r+r^n\\&=(2-r^n)+(2-2r-2r^{n-1}+2r^n)\\&=(2-r^n)+2(1-r)(1-r^{n-1})>2-r^n\end{aligned}$$

$\because\ 1-r>0,\ 1-r^{n-1}>0$

$\therefore\ (2-r)^n>2-r^n$

$\therefore\ r^n(2-r)^n>r^n(2-r^n)$

$\therefore P(C_{\rm II})>P(C_{\rm I})$

这说明元件按系统Ⅱ方式组成要比按系统Ⅰ方式组成，可靠度要高。

二、随机变量及其分布

1．指出下列随机试验E中，哪些量是随机变量。

（1）在刹车试验E_1中，测定刹车距离。

（2）在原地转向力测定试验E_2中，测定原地最大转向力。

（3）在动力性试验E_3中，测定最大车速。

（4）在传动轴寿命试验E_4中，测定传动轴的寿命。

（5）在刹车试验E_5中，测定刹车特性。

〔解〕：

（1）E_1中，刹车距离S为随机变量。

（2）E_2中，原地最大转向力P_{max}为随机变量。

（3）E_3中，最大车速v_{max}为随机变量。

（4）在E_4中，传动轴寿命N为随机变量。

（5）在E_5中，刹车距离S为随机变量。

2．写出指数分布的密度函数、分布函数，并求出r.v X的数学期望及方差。

〔解〕：

（1）指数分布的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}\qquad (\lambda>0)$$

（2）其分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

（3）r.v X的数学期望

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=\lambda\int_0^{+\infty}x e^{-\lambda x}dx=\lambda\cdot\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}$$

（4）r.v X的方差D(X)

$$D(X)=\eta^2[\Gamma(1+\frac{2}{\beta})-\Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})]$$

对于指数分布$\beta=1$，$\frac{1}{\eta}=\lambda$　　$\therefore \eta=\frac{1}{\lambda}$

$$\therefore \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}[\Gamma(2+1)-\Gamma^2(1+1)]$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}[2!-(1!)^2]=\frac{1}{\lambda^2}$$

或

$$D(X)=\lambda\int_0^{+\infty}x^2e^{-\lambda x}dx-\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sqrt{D(X)}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}$$

3．设随机变量x的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

求　$P\{X\leqslant 2\}$，$P\{X>3\}$.

〔解〕　$P(X\leqslant 2)=F(2)=1-e^{-2}=0.8647$

$P\{X>3\}=1-P\{X\leqslant 3\}=1-F(3)$

$=1-(1-e^{-3})=0.04979$

4．试求服从正态分布N（μ，σ^2）的r.υ X的数学期望及方差。

〔解〕　求 r.υ X的数学期望E(X)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot dx$$

令　$\frac{x-\mu}{\sigma}=t$　　　$dx=\sigma\cdot dt$

$$\therefore \quad E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma te^{-\frac{t^2}{2}}\cdot dt+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot dt\right.$$

（奇函数对称区间积分为0）

$$=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=\mu$$

∴ $E(X)=\mu$

求r.v X的方差D(X)：

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot dx$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$ $x=\sigma t+\mu$ $dx=\sigma dt$ 代入上式得

$$D(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu-\mu)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma dt$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=\sigma^2$$

∴ $D(X)=\sigma^2$ r.v X的标准差（均方差）$\sqrt{D(X)}=\sigma$

5. r.v X服从正态分布N（μ，σ^2），求

（1）P（$\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma$）。

（2）P（$\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma$）。

（3）P（$\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma$）。

〔解〕：

（1）$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=\Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)$

$=\Phi(1)-\Phi(-1)=0.6826$

（2）$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=\Phi\left(\frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma}\right)$

$=\Phi(2)-\Phi(-2)=0.9544$

（3）$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=\Phi\left(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma}\right)$

$=\Phi(3)-\Phi(-3)=0.9974$

6. 设X服从N（0，1），借助于标准正态分布的分布函数表计算：

（1） $P\{x<2.45\}$；

（2） $P\{x<-1.25\}$；

（3） $P\{|x|<1.56\}$。

〔解〕：

（1） $P\{x<2.45\}=0.9929$

（2） $P\{x<-1.25\}=0.1056$

（3） $P\{|x|<1.56\}=P\{-1.56<X\leqslant1.56\}$

$=\Phi(1.56)-\Phi(-1.56)$

$=0.9406-0.0594=0.8812$

7．已知从某批半轴中任取一根作寿命试验时，其寿命N服从N（20，8^2）．

（1）计算取得的这根半轴的寿命不低于17的概率；

（2）如果生产的半轴要求以95%的概率保证寿命不低于15，问生产的这批半轴是否符合这个要求．

〔解〕：（1）$P(N\geqslant 17)=1-P(N\leqslant 17)=1-\Phi(\frac{17-20}{8})=1-\Phi(-0.375)=0.648$

（2）$P(N\geqslant 15)=1-P(N<15)=1-\Phi(\frac{15-20}{8})$

$=1-\Phi(-0.625)=0.7357$

即从这批半轴中任取一根以概率95%（大于95%）保证寿命不低于15是不可能的。

8．试求服从对数正态分布的r．υT的数学期望E〔τ〕及方差D〔τ〕。

〔解〕（1）求对数正态分布的r．υT的数学期望E〔τ〕

$$E[\tau]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\tau\frac{1}{\tau}e^{-\frac{(\ln\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(\ln\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot d\tau$$

令 $\frac{\ln\tau-\mu}{\sigma}=u \qquad du=\frac{1}{\sigma\tau}d\tau$

∴ $d\tau=\sigma\tau du \qquad \tau=e^{\sigma u+\mu}$ 代入上式得

$$E(\tau)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma e^{\sigma u+\mu}\cdot du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}e^{\sigma u+\mu}\cdot du$$

$$=\frac{e^{\mu}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{\sigma u-\frac{u^2}{2}}\cdot du$$

$$=\frac{e^{\mu}e^{\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-[\frac{u^2}{2}-\sigma u+\frac{\sigma^2}{2}]}\cdot du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{[u-\sigma]^2}{2}}\cdot du$$

令 $u-\sigma=y \qquad du=dy$

∴ $E(\tau)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot dy=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ #

∴ $E(\tau)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ #

求方差 $D(\tau)$

运用公式：

$$D(\tau)=E(\tau^2)-(E(\tau))^2$$

二阶矩：

$$E(\tau^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\tau^2\,\frac{1}{\tau}\,e^{-\frac{(\ln\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\tau\, e^{-\frac{(\ln\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot d\tau$$

$$\underline{\underline{\text{令}\ \frac{\ln\tau-\mu}{\sigma}=u}}\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{\mu+\sigma u}\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,\sigma.\,e^{\mu+\sigma u}\cdot du$$

$$=e^{2\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{2\sigma u}\,e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot du$$

$$=e^{2\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-(\frac{u^2}{2}-2\sigma u)}\cdot du$$

$$=e^{2\mu}e^{2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2-4\sigma u+4\sigma^2}{2}}\cdot du$$

$$=e^{2(\mu+\sigma^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(u-2\sigma)^2}{2}}\cdot du$$

$$\underline{\underline{\text{令}\ u-2\sigma=y}}\ e^{-2(\mu+\sigma^2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=e^{+2(\mu+\sigma^2)}$$

∴ $E(\tau^2)=e^{2(\mu+\sigma^2)}$ #

其方差 $D(\tau)$ 为

$$D(\tau)=E(\tau^2)-(E(\tau))^2$$

$$=e^{2(\mu+\sigma^2)}-\left[e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right]^2$$

$$=e^{2(\mu+\sigma^2)}-e^{2\mu+\sigma^2}$$

$$=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$$

$\therefore \quad D(\tau)=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$ #

9. 试求服从二参数（β，η）威布尔分布的r.υX的数学期望及方差。

〔解〕：（1）求X的数学期望E〔X〕

$$E(X)=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\beta\cdot\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}}dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

令 $\quad \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}=t$，则 $\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}dx=dt$

$$\therefore \quad dx=\frac{\eta}{\beta}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}}dt=\frac{\eta}{\beta}\cdot\frac{1}{t\cdot\left(\frac{x}{\eta}\right)^{-1}}dt$$

$$=\frac{\eta}{\beta}\cdot\frac{\left(\frac{x}{\eta}\right)^{1}}{t}dt \qquad \because \frac{x}{\eta}=t^{\frac{1}{\beta}}$$

$\therefore \quad dx=\frac{\eta}{\beta}\cdot\frac{t^{\frac{1}{\beta}}}{t}\cdot dt$ 　代入（2）式得：

$$E(X)=\int_0^{+\infty}\beta\cdot t\cdot e^{-t}\cdot\frac{\eta}{\beta}\cdot\frac{t^{\frac{1}{\beta}}}{t}\cdot dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\eta\cdot t^{\frac{1}{\beta}}e^{-t}dt$$

$$=\eta\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{\beta}}e^{-t}dt$$

其中 $\int_{0}^{+\infty} t^{\frac{1}{\beta}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$　　Γ函数

注：Γ一函数是由特定形式的积分所定义的函数。

$$\Gamma(Z) = \int_{0}^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du$$

右边称为第二类欧拉积分。

上述 $\int_{0}^{+\infty} t^{\frac{1}{\beta}} e^{-t} dt = \int_{0}^{+\infty} t^{(\frac{1}{\beta}+1)-1} e^{-t} dt = \Gamma(\frac{1}{\beta}+1)$ #

计算D〔X〕

$$E〔X^2〕= \int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}} dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \beta\eta\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta+1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}} dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \beta\cdot\eta\cdot t\cdot t^{\frac{1}{\beta}} e^{-t} \cdot \frac{\eta}{\beta} \cdot \frac{t}{t}^{\frac{1}{\beta}} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \eta^2 \cdot t^{\frac{2}{\beta}} e^{-t} dt$$

$$= \eta^2 \int_{0}^{+\infty} t^{(\frac{2}{\beta}+1)-1} e^{-t} dt$$

$$= \eta^2 \Gamma(\frac{2}{\beta}+1)$$

∴　$D(X) = E〔X^2〕-〔E(X)〕^2$

$$= \eta^2\Gamma(\frac{2}{\beta}+1) - 〔\eta\Gamma(\frac{1}{\beta}+1)〕^2$$

$$= \eta^2〔\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})〕$$

计算标准差 $\sqrt{D(X)} = \sigma$