

數
通
漫
談

阮

二

新 青 年 叢 書

數 學 漫 談

俞 子 夷 等 著

國 民 出 版 社 印 行

69273

(第一輯) 新青年叢書

青年修養

國文講話

各科學習法

青年與寫作

世界各國側影

西南與西北

歷史小品

數學漫談

植物學講話

科學小品

楊緯菴等著

陳友琴著

王季思等著
實價十二元

陳友琴等著
實價十八元

汪遠涵著
實價九元

王燕浪著

碩真等著
實價七元

俞子夷等著
實價八元

楊次善著

邵西鎬等著

國民出版社印行

新青年叢書 數學漫談

全一冊 實價國幣八元

編著者 俞子夷等

發行者 國民出版社

印刷者 東南日報印刷廠

發行所 國民出版社發行所

經售處 全國各大書局及文化服務社

中華民國三十一年十一月初版

數學漫談

目次

- 一、雜談數學……………魯士(一)
- 二、科學的女王……………左嚴(四)
- 三、智慧的果實……………左嚴(九)
- 四、科學與數學……………俞子夷(一四)
- 五、爲什麼我念數學……………長方(一八)
- 六、從○談起……………何必名(二二)
- 七、從「十一」談起……………何風(二六)
- 八、從「九」談起……………何風(三〇)
- 九、從算盤談起……………何風(三四)

一〇、談輪轉數	何風(三八)
一六、遊戲算題	何風(四三)
二二、幻方	冶新(四九)
六、	同心谷(二二)
正、	其式(一八)
四、	俞士夷(一四)
三、	式(一四)
二、	式(一四)
一、	魯士(一)

目

六

數學雜談

魯 士

大凡一般學生只要拿起了米突尺三角版圓規同演算簿，他就覺得頭昏腦痛，不是厭惡抽象，便是抄襲解答來敷衍塞責，因此一般學生（尤其是中學生）的數學程度，是普遍的低下，其中的原因當然很多，但分析來說，大致可以分爲三點，第一點就是數學完全是數同圖形的一種抽象科學，不像其他的各種科學包含着許多有趣味的實際材料而來得引人發生興味，第二是我們所研究的數學，不能拿來解決我們日常生活中所發生的各項問題，第三是我們將來到社會去，用得到數學的地方是極少而又極少，因爲數學本身就有這三點使人不能發生研究的興趣，所以造成了今日這種不景氣的現象，一般學生都以爲化了這許多的時間，來學習這樣乾燥無味而不切實際的學問，不過是枉費心機的一回事，還是不學來得乾脆，所以現今我國數學能有成就的真是鳳毛麟角，他們只知道數學對於我們無用，而忽略了研究數學的目的同功用，因此一錯再錯以致不可收拾的地步，所以今日作者提出這個問題意思也是在糾正以前的錯誤。

一、訓練思維能力

我們在做每一個數學題目的時候，首先發生的就是感覺疑難，接着就把數學題目仔細觀察，究竟此題應該歸於何類來判別這個疑難，再思考解決此題的方法，這樣慢慢的得到一個假設，進一步再用我們已知的方法同學識來觀察試驗以證明這個假設是對或非，這樣才可以得到一個不致錯誤的結果，如此一次二次同多次累積下來的經驗，就可以使我們的思路周密詳盡正確而不會錯誤，這種有系統有組織的思維能力，不僅可以應用在探討學問的上面，就將來處事應變也是常常要用到的呢，

所以說訓練思維能力是研究數學最大的目的同功用。同的上面，就說來訓練思維能力，第一、培植正確觀念。在一部數學裏面，絕對不允許我們隨便錯誤一個數字，變改一個符號，調換一個方向，假若我們做數學題目的時候，錯了一個數字，改了一個符號，換了一個方向，牠所得到的結果，或將與我們所要求的結果有天壤之別，古語說得好，「差之厘毫失之千里」，確實是不錯呵！所以研究數學可以養成我們不苟且的態度，以培植我們正確的觀念，因此，一加一就是二，二乘二就是四，決不會有第二種解答，這種不苟且的態度同正確的觀念，正是我們今日求學治事的必具條件。

第二、養成忍耐的精神。在演算數學題目的時候，常要遇到很困難的問題，甚至你演算一二天，草稿紙用了一二堆，都還得不到你所需要的結果，並且這種情形在演算數學問題的時候是非常的普通，假如你怕麻煩就此中止了，那麼這個問題也許會使你永遠得不到一個正確的結果，反過來說，你若真有忍耐的精神不怕麻煩，仍舊繼續演算推求下去，結果它終會使有一天達到你理想的目的，所以研究數學能使我們養成忍耐不怕繁的精神，同樣這種忍耐不怕繁的精神，也是我們今日求學處事所需要的呵！

第三、養成遠大的眼光同高尚的人格。數學本身乃是一種至清高的學問，牠完全是在數字同圖形上的探討，決絲毫不涉及他種不相干的問題，它的對象大可以大至無窮大，小也就可以小至無窮小，所以它能够使你沒有勢利眼同世俗眼的發生，倘若你說你勢力大地位高，但它可以比你還大還高，或者你說你勢力小地位低，但它同樣可以比你還小還低，因此富強不致被誘惑屈服，貧賤不致被歧視欺凌，所以說研究數學可以養成不與世俗苟同的遠大眼光，和潔白高尚的人格。

五、發明新的理論同新的方法。現在我們所學習的數學定理同法則等，都無非是從前學者研究心得的堆積，假如我們也能够悉心研究努力探討，自然也能够得到許多的心得，在這許多的心得當中，當然

有新的理論同新的方法存在，假如我們發明了一兩個新的定理或法則，那不是對數學的本身有極大的貢獻嗎？

六、研究各種科學的基本工具 我們不研究科學則已，倘若要想發達科學，那就非加緊研究數學不可，因為所有一切的科學，若果是脫離了數學，就好像人們沒有靈魂一般，可以說絲毫沒有一點意義，因此可以明白，無論是物理化學或其他一切的科學，都必須要拿數學來做它們的基礎，所以我們將來倘若要研究科學，那就非要在數學上上下一番苦工不可。由此更可以見到數學的實際的重要同功用了。

從上面的討論，我們可以確切明瞭數學不論是在處理事物，探討學問，修養品德，及研究科學上，都佔着重要的一環，泰西科學家牛頓更說得好「宇宙是用數學寫成，不懂得數學便不認識宇宙」，數學的重要又得一有力之證實。尤其是在抗戰建國大業未告完成的今日，火藥武器種種的發明，社會政治各項的建設，更有賴於我們數學的研究，自今而後，切望我們學生對於數學要悉心研究加倍努力，這樣不問你將來是學什麼或是做什麼，它對於你都是有很大的裨益！

論數學的重要

科學的女王

左 嚴

論數學的重要

被譽爲「數學之王」的高斯（Gauss），曾經說過這麼一句話：「數學是科學的女王」。他的意思是說，數學在各種科學中，有着特別崇高的地位，她莊嚴綺麗，君臨一切，其他各種科學都非崇奉她臣服她不可，就正像羣僚百官對他們的女王一樣。

這實在是非常確切的說法。我們只要看現代科學的趨勢，就會感到牠的合理。因爲無論那一種學問，牠所應用的數學愈多，則被認爲愈科學；換一句話說，那就是只有臣服數學，崇奉數學的學問，才能取得被稱爲科學的資格。從這一點看來，數學在科學中，真可謂是居高臨下，睥睨一切的了。

然而「數學是科學的女王」這句話，事實上還只不過是真理的一面而已。我們若從另一個觀點來看，那麼又可以說「數學是科學的公僕。」因爲她不但有崇高的地位和特殊的身份，而且更有爲一切科學服務的精神，爲一切學術效力的功用。現在的一切科學，事實上都非以數學爲工具，把數學當基礎不可；不然的話，牠本身是否可以稱爲科學，簡直是可以被懷疑的。懷德海（A. N. Whitehead）說，「一切科學的日臻完善，牠所有的觀念也就隨着日漸數學化。」這就正說明了這一點。

關於天文學、物理學、化學這些自然科學的需要數學作爲基礎，這是一般人都能够深切認識的了。就天文學方面來說，一切天體的運行，都根據幾個簡單的數學公式；而各種天文現象的預測，也無不以數學作爲唯一的工具。天文學界若沒有數學的幫助，那麼如海王星冥王星的發現就決沒有這樣容易，水

星運行的怪謎也將無法解釋，甚至一切行星的運轉也得不到一個簡單而清晰的規律，就物理學而言，一切聲、光、熱、磁、電等物理現象，大多都可以歸納到力學的範圍，而力學事實上却是完全數學化的科學，早就被認為是應用數學的一種。因此，這就不啻說，整個物理學的基礎根本就建築在數學上面，牠和數學的關係自然可想而知了。牛頓爲了解決物理學上的問題的需要，在數學方面發明了微積分；現代物理學的分支中，又有所謂「數學物理」的一門：所有這些事實，都具體地說明了數學是物理學的靈魂。至於化學，依照近世科學的觀點來說，牠和物理學根本就分不了家，所以理論化學的研究，沒有數學就絕不可能。就是一般化學現象的初步探討，也同樣不能缺少數學的幫助；例如各種物質化合量的分析，必需以初等代數來處理；化合物分子結構的研究，又是幾何圖形的應用。這是初學化學的人都可以認識的。

至於二十世紀的許多新發現的科學理論，像相對論，量子論，波力學之類，對於數學的關係就更加密切，許多高深而專門的數學，都必須被廣泛地運用——其實，我們若更正確一點說，那就還不止是一運用而已，有時簡直是先有了許多高深而專門的數學的研求，這才誘導了這些新科學的產生，完成了這些新科學的理論的。事實上數學和這些新科學是肩並着肩地在向着廣大深遠的前途前進着，兩者進展的程度是一致的，進展的方向是平行的，沒有數學方面的發展，那麼這些揭破宇宙的祕密而顯示人類的偉大的新科學，其產生和進步都將成爲不可能了。

就是生物學，地質學這些研究對象較爲具體的自然科學，數學也同樣是不可缺少的工具。例如生物生長遺傳等定律的說明，應用地質學中各種的推算，在在都非賴數學的幫助不可。

以上是就理論科學來說，至於應用科學方面，數學的重要更是明顯的事實。無論是電機工程、土木

工程、機械工程、水利工程、以及化工、航空、鑛冶等工業，其中都包含着無數的數學公式，應用到不少的數學計算。每一個工程師在工作時身邊總帶着他的計算尺，這就正是工程離不了數學的具體說明。農、醫這兩種應用科學，雖然不像工程一樣一刻也離不開數學，然而和數學的關係也仍然可說是相當的密切，譬如應用數學中的統計分析就是這兩種應用科學必須利賴的工具。

現在我們正處於反侵略的世界大戰中，一般人的眼光都集中於軍事學方面。數學之於軍事學，可有些什麼貢獻呢？關於這一點，熟悉現代戰爭的人都會注意到：砲兵是非有數學的訓練不可的，機械化部隊自然更不必說。而閃電戰之有賴於數學，更是不難想像的事。有一個新聞記者在報導德軍進攻波蘭的情形時曾說，德軍襲擊的一切計劃，早就完全表現在一張充滿數字的表上了。這些數字的獲得，不用說是非運用數學不可的。

在社會科學方面，數學也被廣泛地應用着。作為一切社會科學的基礎的統計學，牠本身就是應用數學的一支，而經濟學、論理學、心理學、以至會計學、保險學等之需要直接運用數學，更是顯而易見的事。數學在社會科學中，應用範圍雖然比自然科學較小，需要程度雖然比自然科學稍遜，然而我們說數學對於社會科學直接間接地有着密切的關聯和重要的貢獻，這却是不容懷疑的事實。能够作各種數學計算而應用便捷，結果正確的計算機，在自然科學研究者倒沒有多大重要，而對於致力社會科學的人却每每不能缺少牠的幫助，這就正是一個有力的證明。

從上面這些簡單的分析中，我們已經不難看到數學對於一切科學的重要；而且我們還可以明瞭，她的被視為科學的女王正是理所當然的事，而牠之所以成為女王，不單是由於她歷史的悠久或性質的崇高，而更由於她之作爲各種科學的公僕，爲各種科學忠實服務，因而奠定了一切科學的堅固基礎。

然而我們說數學的重要，若只看到她對於科學的一面，這還是大大不夠的。在今天，數學事實上不但是一切科學的基礎，同時就是在哲學、藝術等領域中，也漸漸地佔據了相當的地位，在哲學方面，現代著名的哲學家羅素有所謂「數理哲學」的研究，顧名思義，數理哲學（Mathematical philosophy）就正像數學物理（Mathematical physics）之為數學與物理的綜合一般，是數學與哲學二者聯繫着的學問。在藝術方面，學圖畫的人需要透視學和投影幾何的知識，學建築的人也要有立體幾何和解析幾何的基礎，而音樂中音的振幅和振數等之研究，也須用數學來處理。這就是說，這個科學女王的權威，現在已經是從自然科學社會科學漸漸擴張到哲學藝術的領地上去了。單從這一點來看，數學在一切學術文化上的重要性實在不是任何其他科學所能比擬的。

這裏，我們還有一點不可忽略，這就是數學對於學術的重要，這事實本身是隨着時代在進展着的。數學從原始的時期開始，就已經表現了她的功能而很被重視了，然而那範圍不過限於土地測量、賦稅分配諸方面；到了歐幾里德時代，這才使數學成為訓練思想的學問。之後，由於客觀事實的需求，經過許多數學家的努力，數學這一門的學問就不斷地進展、擴張、深入，而她的重要性也就一天天地擴大了範圍、加深了程度，正如上面所說。然而，「後之視今，亦猶今之視昔」，現在數學和別的科學比較起來雖然已經可說是最完善的了，但我們相信此後仍然將有良足的進展，而她的重要性也仍然將擴大加深下去，現在所看到的，決不是她的止境。我們就是預料將來數學將會滲入每一個學術部門，而更發揮出我們現在所想像不到的重要性，這也是完全可能的。

那麼，你們也許會感到驚奇：為什麼數學會放出如此輝煌的光芒的呢？這原因的本質到底是什麼呢？關於這一點，詳細的情形我們以後還有機會可以談到，就總的方面來看，那麼我們可以簡單地說，這

是因爲大自然的本質是「數學的」的緣故。三百年前的著名科學家伽利略說，「自然的偉大書籍係用數學的語言所寫成」。現代的著名科學哲學家秦斯也說，「這仿偉大的宇宙建築師（按即指大自然）作者」，就他的創造物本身來證明，正好像一個純粹的數學家。」既然大自然本身就是一個數學家，他的書籍又用數學的語言寫成，那麼我們人類所有一切產生於大自然，從屬於大自然的學術文化，又怎能不歸結到數學，附隸於數學呢？既然一切歸結到數學，附隸於數學，那麼數學之被崇奉、被臣服、被運用、被重視，終於成爲科學的女王、科學的公僕，甚至一切學術中最光輝的巨星，這當然不是偶然的事了。

（此處以下文字因原稿模糊，已無法辨識，僅能依稀看出一些詞句，如「數學」、「科學」、「學術」等。）

智慧的果實

左嚴

我們已經知道數學在學術上的重要性了。（註一）但是我們一提到學術，就好像是進了「象牙之塔」，對於「十字街頭」的人們，似乎就很少關係。

有一個朋友在看了「科學的女王」之後，對我說：「是的，你說數學是科學的女王，是一切學術的基礎，這當然是不錯的；可是這些全是科學家學者的事，對於我們這些不想做或想做而做不成科學家學者的，數學又有什麼重要呢？」這其實是一種相當普遍的意見。

記得好幾年前，有一個青年朋友，剛從高中畢業，想去投考大學的數學系。可是他父親不同意說：「數學有什麼用呢？」他回答道：「數學重要得很呢，天文學呀，物理學呀，許多許多科學全部用到牠呵。」於是他父親立刻反駁他：「你是爲了牠對天文學物理學等科學有用才去讀牠的麼？既然如此，那你爲什麼不直接去考天文系物理系呢？」

這一類的例子，說明了一個事實：若我們光是說數學在學術上的地位怎樣崇高，怎麼重要，這只能使一般人敬而遠之，而不能真正明瞭牠，親近牠；把牠當作自己的工具，從牠裏面到切實的益處。因此我們現在實在有直接闡明數學在實用上的重要價值之必要。

其實數學在實用上的重要是顯而易見的。因爲事實上數學的產生就起源於實際的需要。在原始時代，爲了交換物品，爲了分配獵獲物，人們就創造了算術。埃及的尼羅河每年一次的泛濫，模糊了原有的岸，爲了重新劃定界線，古埃及人又創造了幾何學。所以算術和幾何，開始的時候可說是爲了獵人、

商人、農夫們的實用而發展起來的。

從歷史上看是如此，再從目前的事實來觀察，也同樣可以得到這個結論。無論那一種職業，總離不開初步的數學知識；缺乏數學的基礎能力的人，結果只能做一個白痴，決不能辦理什麼事務，更不要說成就什麼事業。世界各國的小學，都從初年級起就有算術這一科，而且還把它作為重要學科之一，原因就在於此。而這個事實，也就是數學很有實用的充分說明。

不過說到這裏，讀者也許會說：「初步的數學自然必要，但是只要會數會算，也就够了，所以平常人學數學，只要學到初步的算術之類為止，在社會上就足够應用。那些更高深的數學，對於人生，除了成為學者或專家之外，却是沒有什麼關係的。」

其實這是大大的誤解。就是用功利主義的眼光來看，大部分的數學都是很有實用價值的。從功利的立場出發，工業和商業當然是最重要的了。可是商工業的存在和發展，都非依賴數學的幫助不可。商業的需要數學，並不是為了算賬，而是比這複雜百倍的複利計算、投資數學。至於工業，也並不是說用牠來計算工資，事實上是不靠數學的設計，機器工業根本就不能成立。

在這裏，我們不妨舉一個例。譬如我們在市場上看到的罐頭食品，那些罐頭就需要用數學的計算來設計，而所用的數學，最方便就是微積分。因為一定容積的罐頭，可以因其形式不同而浪費或節省其材料；在某些條件（如圓柱形、美觀等）之下，如何可使錫片用得最少而容積最大，這就需要用微積分學的知識來計算了。微積分學一般說來已經屬於高等數學的範圍，要到大學理工科才念到，可是這麼簡單的工商業，却就非應用牠不可。

我們再進一步來看，就是在平日生活上，也需要比較高深的數學之幫助。譬如在逃避空襲的時候，

一個人若能理解或然率（代數學中一部分支）而加以運用，那麼他對於敵機轟炸就不會無意義的拚命害怕。因為應用或然率的理論，不難知道炸彈落在他的頭上的可能性是怎樣的小，大可不必作不必要的恐慌。假使他的身邊落下一個炸彈，他只要能够運用他的數學頭腦，那就可不致如常人一樣的驚惶失措，抱頭亂竄；他可以伏在地下，滾入剛被炸彈炸成的窟窿中，把它當作安身的所在。因為他運用他的數學知識和數學的頭腦，就知道亂跑亂奔比止靜時的危險性更大，而同一地點同時被炸兩次的機會可以說是幾乎不會有的。

一個人若能應用他的數學知識，在許多有關經濟的事件上比較上不容易吃虧。譬如說，他對於購買獎券，不會像有些人那樣存着愚蠢想頭，因為他知道他那份應有「預期」（註二），因此也就不會因為幾次得不到獎金而失望。

記得以前曾聽見人說，前些年香港有一個外籍數學教授，用數學方法來研究打牌（也是用的或然率論），居然每戰必勝，弄得以後連教授也不做，專靠賭博來過優裕的生活。

好了，好了，說說數學的實用，真是說得每況愈下了。還是趕快帶住吧。我們既不想得獎發財，更不想打牌致富，而且就是得以發財致富，如此的方法也是最要不得的，這對於數學絕不能算是什麼光榮。不過，我們舉出這例子却充分地說明了數學的實用，真是一言難盡，即使以最功利的看法，牠也是人生所必需的東西。無論初步的或高深的，全都一樣。

現在，我們再回過頭來，辦爽功利的看法，把眼光放大些！這樣來觀察數學，那麼我們又可注意到，數學實在是幫助我們思想的最有效的武器。

有人稱數學為「科學的科學」，這是很很有道理的。因為牠是最完整最縝密的科學。同時牠又包含了一

一套思想方法，實際上牠本身就不是邏輯學。我們儘可不讀邏輯，只要學過數學，運用數學的方法，就可以使我們的思想言語合於邏輯而沒有毛病。

無論那一門數學，我們都不能把牠當作只是呆板的公式和麻煩的演算之集合，因為這些絕不是牠的重要部分；最值得我們注意的，就是牠怎樣從已知條件的前提得到應有結果的結論這個步驟。從「前提」到「結論」，這裏面需要正確合理的思想過程和推理方法，一點也不能含糊，一毫也沒法徼倖。解決一個數學問題如此，進一步作某種數學研究也是如此。就因為這樣的緣故，數學在訓練我們的頭腦上、在訓練我們的思想，佔着極其重要的地位。

說到這裏，我又記起一個實例。這是一個高中的國文教員告訴我的。他說有一個同學，國文的成績原來是非常壞的，可是過了一個暑假，他的國文卻突然有了驚人的進步，文理由不通而變得清順了，結構山零亂而變得完整了。這使得這位教師很驚奇。後來問那個學生，學生自己也覺得奇怪，他說：「我在這個暑假裏沒有學習什麼國文，只不過補習了一個半月的數學，以前我的數學成績非常壞，現在却好得多了，非但上課都能理解，而且覺得很有興味了。同時作文也自覺有些進步，尤其在構思方面。不知道這是不是數學有了進步的關係？」這位教師對我敘述了這一件事後，自己下了一個結論，說數學的學習，在訓練思想和表達思想上非常重要。而且他還說，他以後對於國文程度較差的學生，要他好好地學習數學就是教育方法的一種。

這個實例，對於數學在訓練頭腦方面的實用，很清楚地給予說明了。

至於數學在這一方面有着如此重要的作用，其基本的原因何在，就要追溯到牠是科學方法的代表這一個特點。數學是科學方法最優良的模範，因此也就可說是使我們得以享用無窮的人類智慧的果實。