普通高等教育"十一五"规划教材
21世纪大学数学精品教材
海军院校重点教材

工程数学 上册

主 编 戴明强 刘子瑞
副主编 任耀峰 王胜兵 金裕红 熊 萍

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪大学数学精品教材
海军院校重点教材

工　程　数　学

（上　册）

主　编　戴明强　刘子瑞
副主编　任耀峰　王胜兵
　　　　金裕红　熊　萍

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书共6篇30章，分为上、下两册. 上册包括线性代数、概率论、数理统计等基本内容，下册包括复变函数、积分变换、数理方程等基本内容. 全书选材适当、结构合理，每章有小结、重要词汇中英文对照，在应用性较强的章节后还配有数学实验基础知识，便于教师教学和读者自学.

本书可作为高等学校本科工学、管理学等专业教材，也可作为教研工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学. 上/戴明强，刘子瑞主编. —北京：科学出版社，2009
21世纪大学数学精品教材
ISBN 978-7-03-025016-2

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①戴…②刘… Ⅲ. 工程数学-高等学校-教材 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第119821号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：梅 莹
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本：B5(720×1 000)
2009年8月第一次印刷 印张：25 1/2
印数：1—4 000 字数：505 000

定价：39.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

《工程数学》是继《高等数学》之后的又一门重要的基础课程，它包括线性代数、概率论、数理统计、复变函数、积分变换和数理方程等内容.

本教材曾于 1995 年在海军工程大学内部出版，在使用了 5 年后进行过一次改编. 本次编写根据时代发展对工科数学教学的变革要求在原教材的基础上进行了较大幅度的内容调整. 在编写过程中，我们吸收了国内外同类教材的优点，并结合多年教学实践的经验，注意了理论知识实际背景的介绍、学科发展历程的叙述和数学应用软件的简介，增强了实用性. 在内容取舍、例题选择、习题配备以及叙述方式上，注意反映教学的特点和要求. 在应用性较强的章节后配备了相应的数学软件知识和程序实例，为同步进行的数学实验打下基础，帮助读者更好地体会数学的工具作用. 重要的词汇给出了中英文对照，留下延伸阅读的接口. 每章后进行了简明扼要的小结，可以帮助读者理清基本内容纲要，并便于教学和自学.

本书努力打造鲜明的特色，体现如下：

1. 在整体框架方面，保证了基本概念、基本理论和基本方法的完整. 在具体内容取舍上，则结合教学实际，侧重于工程数学的基本方法，同时又兼顾了理论上的系统性和逻辑上的严谨性.

2. 概念、理论和方法的引入，注重说明它们的实际背景，体现实践、理论、再实践的认识论原则。精心组编的教学内容，由一层知识到另一层知识，力求体现事物的矛盾运动。读者用心读完这套教材，不仅可以学到相关知识和科学思维方式，也能得到严密的逻辑训练.

3. 讲基础联系前沿，讲近代不忘历史. 在介绍工程数学主体知识的同时，注意

选择结合点,用少量的笔墨介绍有关的科学发展的史实,或点缀一些发展前沿的成就,用以开拓读者视野,激发求知欲望。

4. 本书融入编者多年的教学实践经验,在基本知识内容编排上注重读者理解和掌握,在延伸知识编排上注重读者继续学习的需要.

本书的编写大纲由戴明强拟定,戴明强、刘子瑞任主编,任耀峰、王胜兵、金裕红、熊萍任副主编.全书共 6 篇 30 章,第 1 篇由戴明强编写,第 2 篇由任耀峰编写,第 3 篇由金裕红编写,第 4 篇由刘子瑞编写,第 5 篇由熊萍编写,第 6 篇由王胜兵编写.全书由戴明强、刘子瑞统稿。

本书为海军院校重点教材,它的出版得到了海军工程大学各级领导和机关的关心和支持.艾小川、瞿勇、孙慧玲、王玉琢、袁昊劼等老师在本书编写过程中提供了热情的帮助,在此表示衷心的感谢。本书编写参考了大量资料,对于书末所列参考书目的作者们也要表示由衷的敬意和真诚的感谢.

由于编者水平有限,不足之处在所难免,敬请批评指正.

编　者

2009 年 4 月

目　录

第一篇　线 性 代 数

第二篇　概　率　论

第三篇 数 理 统 计

第一篇 GONG CHENG SHU XUE

线性代数

线性代数基本上是讨论矩阵理论和与矩阵理论结合的有限维向量空间及其线性变换理论的一门学科.它的主要理论成熟于 19 世纪,而其第一块基石——二、三元线性方程组的解法,则早在 2000 年前即见于我国古代数学名著《九章算术》,这使我们引以为豪.

线性代数在数学、力学、物理学和技术科学中有着各种重要的应用,应用的广度和深度因这些学科的发展而不断加强.随着社会与科学的飞速发展,线性代数应用的领域也越来越广泛,如经济学、管理学、社会学、人口学、遗传学、生物学等.因此,线性代数现在还在各代数分支中占据首要地位.不仅如此,该学科体现的几何观念与代数方法之间的联系,从具体概念抽象出来的公理化方法,以及

严谨的逻辑论证和巧妙的归纳综合等，对于强化人们的数学训练，增益科学智能都是非常有用的.

时至今日，多种专业人员都需要学习线性代数还出于这样一个原因：随着科学技术的发展，不仅要研究两个变量之间的关系，更要进一步研究多个变量之间的关系.各种实际问题(不少是多元非线性的问题)大多数情况下可以线性化，而由于电子计算机科学的发展，线性化了的问题又可以计算出来.线性代数正是解决这些问题的有力工具.因此，线性代数是工科大学生应学习的工程数学课程的重要分支，它是工程数学的首要部分.

本篇主要讨论线性代数的基础部分.主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换等，其中矩阵的理论是贯穿始终的，它不仅是线性代数的理论基础，而且是微分方程、计算方法、离散数学等的计算工具，在其他的技术科学中也有重要的应用.

第1章 行 列 式

在生产实践和科学研究中，许多变量之间的关系可以直接地或近似地表示为线性函数及线性函数的集合，这是一个复杂的数学对象. 在线性代数中，线性方程组的理论是其重要的组成部分，而研究线性方程组需要行列式这一重要工具. 本章的主要内容就是从二阶、三阶行列式出发，重点介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法.

§1.1 线性方程组与行列式

二阶、三阶行列式与二元、三元线性方程组的公式解是中学代数里学习过的内容，本节引述它的目的是介绍行列式的来源，同时也是为引进 n 阶行列式的概念提供直观背景.

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用 a_{22} 乘式(1.1)的第一式，再减去 a_{12} 乘式(1.1)的第二式，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

同理，用 a_{11} 乘式(1.1)的第二式，用 a_{21} 乘式(1.1)的第一式，然后相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

故线性方程组(1.1)只要适合条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则其解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

这就是一般的二元线性方程组(1.1)解的公式.但式(1.2)不易记忆,应用时也不方便,因而引入新的符号(下面称之为行列式)来表示式(1.2),这就是行列式的起源.

令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

称之为**二阶行列式**(其实算出来就是一个数).它有两行、两列,其中横写的称为**行**,竖写的称为**列**.行列式中的数 a_{ij} 又称为行列式的**元素**. a_{ij} 的第一个附标 i 称为**行标**,表示它在第 i 行;第二个附标 j 称为**列标**,表示它在第 j 列.二阶行列式是这样两个项的代数和:一项是从左上角到右下角的对角线(称为**主对角线**)上两个元素的乘积,带正号;另一项是从右上角到左下角的对角线(称为**次对角线**)上两个元素的乘积,带负号.

于是,利用二阶行列式,当式(1.3)即方程组(1.1)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组(1.1)的唯一解式(1.2)可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1.4}$$

其中, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

注意到式(1.4)中两式的分母均为方程组(1.1)的系数行列式 D,而分子 D_1, D_2 分别为方程组(1.1)右边常数列替代所求未知数的系数列所得的行列式,这样,方程组(1.1)的解的公式就整齐易记了.

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

类似地,采用从三个未知数中消去两个的方法求解,可以得到,当

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

时,方程组(1.5)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}) \\ x_3 = \dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}) \end{cases} \tag{1.6}$$

同前面一样，为了便于记忆，引进三阶行列式的概念，令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.7}$$

它的 6 个项以及所带的符号可以由一个很简单的规则来说明，这就是所谓的三阶行列式的**对角线规则**(又称为沙流氏规则)：即(见图 1.1) 实线上元素所组成的乘积前加正号，虚线上的元素所组成的乘积前加负号.

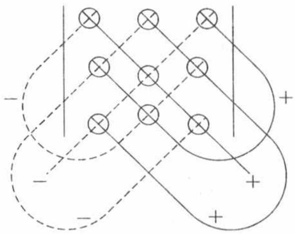

图 1.1 对角线法则示意图

于是，利用三阶行列式，当式(1.7) 即方程组(1.5) 的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(1.5) 的唯一解也能写成与式(1.4) 相仿的简单形式：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1.8}$$

其中，D_j ($j = 1, 2, 3$) 是把 D 的第 j 列 (x_j 的系数列) 依次换成常数项列 b_1，b_2，b_3 所得到的行列式.

注意到当二元线性方程组(1.1) 与三元线性方程组(1.5) 存在唯一解时(系数行列式不为零)，利用行列式，可把它们的解的表达式从形式上统一起来，而且明显地展示解与系数之间的关系. 这里自然会问：对于 n 个方程的 n 元线性方程组，它的解是否也同样可以用行列式来表示，而且形式上与二元、三元的情况类似呢？答案是肯定的. 这就首先需要将二阶、三阶的行列式概念推广到 n 阶.

§ 1.2 *n* 阶行列式的定义

为了能给出 n 阶行列式的定义，我们要先引入排列及其逆序数的概念.

1. 排列及其逆序数

由 1，2，…，n 组成的有序数组称为一个 **n 阶排列**. 例如，132 是一个 3 阶排列，45312 是一个 5 阶排列. 事实上，这里所说的 n 阶排列就是我们所熟悉的由 n 个不同元素组成的全排列. 可知，n 阶排列共有 $n!$ 个.

在 $n!$ 个 n 阶排列中，$123\cdots(n-1)n$ 是唯一的一个按自然数顺序排成的排列，称之为**标准排列**. 而在其他的排列中，总会出现较大的数排在较小的数前面的情形，为描述这种情形，下面引入逆序数的概念.

在一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于排在后面的数，则称它们构成了一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

例如，在排列 231 中，21，31 都构成逆序，而 23 是顺序，所以排列 231 的逆序数为 2. 一般地，设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数 1，2，…，n 的一个排列. 考虑元素 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$，若比 p_i 大且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i. 于是，全体元素的逆序数之和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

就是这个排列的逆序数.

例 1.1　求排列 415362 的逆序数.

解　在排列 415362 中，

4 排在首位，其逆序数 t_1 总为 0；

1 的前面比 1 大的数有一个(4)，故 $t_2=1$；

5 的前面比 5 大的数有 0 个，故 $t_3=0$；

3 的前面比 3 大的数有 2 个(4，5)，故 $t_4=2$；

6 的前面比 6 大的数有 0 个，故 $t_5=0$；

2 的前面比 2 大的数有 4 个(4，5，3，6)，故 $t_6=4$.

于是，这个排列的逆序数为

$$t=\sum_{i=1}^{6}t_i=0+1+0+2+0+4=7$$

在这里，我们关心的是一个排列的逆序数的奇偶性. 逆序数为奇数的排列，称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列，称为**偶排列**. 由此，排列 231 和排列 $123\cdots(n-1)n$ 是偶排列；而排列 415362 是奇排列.

例 1.2　指出所有 6 个 3 阶排列中，哪些是奇排列？哪些是偶排列？

解　排列 123，231，312 的逆序数分别为 0，2，2，故均为偶排列；排列 132，213，321 的逆序数分别为 1，1，3，故均为奇排列.

把一个排列中的某两个数的位置互换，而其余数的位置不变，就得到一个新的排列，这样的一个变换称为**对换**. 如果互换位置的两个数是相邻的，则称为**相邻对换**. 对换将影响排列的奇偶性. 例如，偶排列 2431 经 2 与 3 对换变成奇排列 3421. 我们可以得到如下一般性的结论.

定理 1.1　一次对换改变排列的奇偶性.

证　先证相邻对换情形.

设排列 $a_1\cdots a_l a\, b\, b_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变成排列 $a_1\cdots a_l b\, a\, b_1\cdots b_m$. 显然，$a_1$，$\cdots$，$a_l$，$b_1$，$\cdots$，$b_m$ 这些元素的逆序数经过对换后并不改变，可能改变的只有 a，b 两元素的逆序数：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以，排列经过一次相邻对换后，其逆序数将增加或减少 1，奇偶性因此改变.

再证一般对换情形.

设排列 $a_1\cdots a_l a\, b_1\cdots b_m b\, c_1\cdots c_n$，经 a 与 b 对换，变成排列 $a_1\cdots a_l b\, b_1\cdots b_m a\, c_1\cdots c_n$. 我们可以用相邻对换完成这个对换. 排列 $a_1\cdots a_l a\, b_1\cdots b_m b\, c_1\cdots c_n$，经元素 b 依次与前面相邻元素的 m 次相邻对换，变成排列 $a_1\cdots a_l a\, b\, b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再经元素 a 依次与后面相邻元素的 $(m+1)$ 次相邻对换，变成排列 $a_1\cdots a_l b\, b_1\cdots b_m a\, c_1\cdots c_n$. 可见，这个 a 与 b 的对换可以用 $(2m+1)$ 次相邻对换替代，而奇数次相邻对换最终会改变排列的奇偶性. 所以，经一次对换后，排列的奇偶性将改变.

推论 1 奇数次对换改变排列的奇偶性，偶数次对换不改变排列的奇偶性.

推论 2 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

2. n 阶行列式的定义

有了上述关于排列的预备知识，就可以给出 n 阶行列式的定义. 首先，研究二阶、三阶行列式的结构. 三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

容易看出：

(1) 上式右边的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此，上式右边的各项除正负号外，都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里行标排成标准排列 123；而列标排成 $p_1p_2p_3$，它是 1，2，3 的某个排列，这样的排列共有 $3!=6$ 个，对应的上式右边共有 6 项.

(2) 各项的正负号与列标的奇偶性相对应. 带正号的三项的列标排列为 123，231，312，均为偶排列；带负号的三项的列标排列为：132，213，321，均为奇排列. 可见，当行标排成标准排列时，各项所带的正负号可由列标排列的奇偶性确定.

于是，三阶行列式的定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中，t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1，2，3 的全体全排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

易知，二阶行列式有类似的结论：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2}$$

仿照二阶、三阶行列式的规律，可把行列式概念推广至一般的 n 阶情形.

定义 1.1 n^2 个数 a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成 n 行 n 列进行的一个运算，记为

$$D = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**. 它是一个算式，它的值等于所有的位于不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和，各项的代数符号由列标排列的奇偶性确定，即

$$\det(a_{ij}) = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1.9}$$

其中，t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum$ 是对所有的 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和. 行列式 $\det(a_{ij})$ 可简记为 $\Delta(a_{ij})$，数 a_{ij} 称为行列式的**第 i 行第 j 列元素**.

按此定义的二阶、三阶行列式与按对角线法则定义的二阶、三阶行列式显然是一致的. 当 $n = 1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$，注意不要与绝对值相混淆.

例 1.3 求下列对角行列式的值(未写出部分均为 0).

$$(1)\ D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}; \quad (2)\ D_2 = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

解 按定义，行列式各项是取自不同行不同列的元素的乘积，显然，两个对角行列式的有可能非零的项均只有一项. 于是

$$(1)\ D_1 = (-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$(2)\ D_2 = (-1)^t a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例 1.4 求下列上三角行列式的值.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$