经济管理应用数学基础

（下　册）

蔡常丰　编著

广东高等教育出版社

序

随着我国社会主义“四化”建设的深入开展，经济管理的水平要求不断提高。从宏观范围讲，它对我国国民经济的计划、规模、部署有密切的关系；从微观范围讲，它对一个企业的降低成本、提高效益也将起着至关重要的作用。

当经济管理学中还没有应用数学工具时，它仅仅是一门描述性科学，还处于极不成熟的阶段。本世纪中叶以来，现代数学工具的运用，使它飞速发展，逐渐成为一门计量性科学。如何结合我国社会主义现代化建设的实际情况，运用这门科学为我国国民经济建设服务，是我国广大经济管理工作者的共同任务。

为了培养一支具有现代科学知识的经济管理干部队伍，首先需要开展科学教育，其中包括数学基础知识的教育。蔡常丰同志所编写的“经济管理应用数学基础”，系统地讲述了最基本的数学知识，并结合经济管理方面的许多实例加以阐述，是一本颇具特色和有较强针对性的教材。这种类型的教材，在国内还不多见，因此它对经济管理专业的学生和有关的科技工作者无疑将是很有用的。当然，作为基础教材，不可能包罗一切；但有了这个基础，再进一步学习提高就不难了。希望这本教材，能为培养我国社会主义建设需要的经济管理人才作出贡献，也为发展适合我国国情的经济管理理论和实践起到促进作用。

路见可

于武汉大学

1987年5月

前　言

为了提高企业的管理水平，增加经济效益，需要对经济现象给以精确的描述和分析、从而对经济活动进行预测和控制。这样，数学越来越成为分析、研究经济域中出现的各种基本概念、因素和问题的工具。因此、作为现代企业管理人员、不仅需要具有生产技术的知识、还必须具备有一定的数学知识。我国高等学校经济管理专业的教学计划都明确规定该专业的学生必须接受系统的数学训练。

目前国内出版的许多高等数学的教材或参考书，大都是针对理工科专业，不易为学习经济专业的学生所理解和掌握。编写和出版适合于经济管理专业的数学教材或参考书甚为迫切。蔡常丰同志近年来担任经济管理专业的教学，编写了《经济管理应用数学基础》。对于经济管理专业的学生或有关的人员，这是一本很好的入门书或参考书。它具有下列几个特点：

一、针对性强、作者既注意了数学内容的系统性，又注意结合经济管理专业的需要。概念和理论的叙述保持一定的严密性，但又不拘流于繁琐的数学论证；对许多概念、定理和方法，指出其经济背景，说明它们的经济意义。尤其作者收集了大量的经济管理的实例，这样就使从事经济管理的读者容易领会、掌握。

二、内容取材恰当、该书主要内容为解析几何、线性代数和微积分（包括级数和常微分方程），这些内容对于进一

步学习经济数学都是必不可少的知识。书中把解析几何和线性代数有机的融合起来，使抽象的代数概念有了直观的几何背景，使读者容易接受。倘作为教材，也可以节省学时。

三、每一章都配有相当数量的习题，这对读者掌握所学的内容是十分必要的。书后附有习题的解答，便于教学和读者自学。

四、语言通俗易懂。有些地方叙述用比较形象的口语。

正象任何教材一样，都必需接受时间和教学实践的考验，本书不足之处，相信作者是会欢迎使用者的批评指正的。

吴乐光于鮀浦山麓

一九八七年五月

目　　录

第六章　无 穷 级 数

定积分是某个函数“积分和”的极限，本章要讨论的无穷级数是一种与数列有密切联系的极限。用无穷级数可以表示许多非初等函数（例如$\int e^{-x^2}dx$等）；另外，无穷级数是近似计算的重要方法。因此，无穷级数在自然科学和经济科学中都有广泛的应用。

本章主要介绍数项级数与幂级数和傅立叶级数的一些基本性质以及它们的简单应用。

§41　数 项 级 数

基本概念

其实，无穷级数对我们来说并不陌生。例如$\frac{1}{3}=0.333\cdots=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$；还有§16提到的“1尺之棰，日取其半，万世不竭”的数学表达式：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$都含有无穷多个数相加，并且都具有明确的结果或趋势。可是，实际上是不可能真的把无穷多个数加起来的，究竟该如何理解无穷多个数“相加”？

我们先求前 n 项和 S_n，显然，随着 n 的增大，S_n 越来越接近于某个确定的数值，例如

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}\xrightarrow[(n\to\infty)]{}1$$

；另外，这两个式子都分别与某个数列有关。因此，我们可以设法引用数列的理论来处理无穷多项相加的问题。

定义41·1　设有一个数列$\{u_n\}$，则表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (41.1)$$

称为**无穷级数**，简称级数。u_n称为**通项**（或一般项）。

通项为常数的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$称为数项级数。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 只是形式上表示无穷多项相加之“和”，这与有限多项相加有本质的区别，有限多项相加总是有和的；而无穷多项相加 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 有没有“和”，取决于前 n 项和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 当 $n\to\infty$时有没有极限。

定义41·2　设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 前 n 项和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 构成的数

列$\{S_n\}$有极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S<+\infty$，则称$S$为级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$的和，并记$S=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$。这时称级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$收敛；如果$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，则称$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$发散。

例如

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots,\quad u_n=\frac{3}{10^n} \tag{41.2}$$

$$\text{因}\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{10^k}=3\cdot\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\to\frac{1}{3}$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}$收敛，$S=\frac{1}{3}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1 \tag{41.3}$$

级数收敛

$$\sum_{k=1}^{\infty}K=1+2+\cdots+n+\cdots,\quad u_n=n$$

$$S_n=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\infty \quad 级数发散$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

$$u_n=(-1)^{n-1}$$

$$S_n=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}\to\begin{cases}0 & n\text{ 为偶数}\\ 1 & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n不存在，\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\text{ 发散。}$$

（41.2）与（41.3）都是等比级数（或称几何级数）的特例，下面讨论一般的等比级数。

例41.1 讨论等比级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}ar^{n-1}(a,\ r\neq 0)$的敛散性。

解 当 $r\neq 1$ 时，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

若 $|r|<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}=\frac{a}{1-r}，\text{收敛；}$$

若 $|r|>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\infty$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}$ 发散；

当 $r=1$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{n}ar^{k-1}=na\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\infty$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}$ 发散；

当$r=-1$时，$\sum\limits_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n} a\cdot(-1)^{k-1}\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ a & n\text{为奇数}\end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty}S_n\text{不存在，}\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}\text{发散。}$$

所以，$|r|<1$ 时等比级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}=\dfrac{a}{1-r}$收敛；

$|r|\geqslant 1$ 时发散。

收敛的等比级数应用很广，可以解决许多实际问题。

例41·2 某实业财团向某大学捐赠学术基金。如果这个基金每年要付出200万元作为奖学金和师资培训费，银行存款利率为10%，每年复利计算。问i）要维持10年（10年后无结余），财团应捐赠多少基金？ii）如果要永远维持下去，财团应捐赠多少基金？

解 i）设要维持k年需赠的基金为S_k。

由$S_1(1+10\%)-200=0\Rightarrow S_1=200\times\dfrac{1}{1.1}$

$(S_2\times 1.1-200)\times 1.1-200=0\Rightarrow S_2=200\left(\dfrac{1}{1.1}+\dfrac{1}{1.1^2}\right)$

$[(S_3\times 1.1-200\times 1.1-200]\times 1.1-200=0\Rightarrow$

$$S_3=200\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.1^2}+\frac{1}{1.1^3}\right)$$

…

$$S_{10}=200\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.1^2}+\cdots+\frac{1}{1.1^{10}}\right)$$

$$=200\times\frac{1}{1.1}\times\frac{1-\dfrac{1}{1.1^{10}}}{1-\dfrac{1}{1.1}}$$

$$=200\div(0.1)\times\left(1-\frac{1}{1.1^{10}}\right)$$

$=2000-769.2=1230.8$（万元）

ii）因 $0<r=\dfrac{1}{1.1}<1$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a\cdot\left(\dfrac{1}{1.1}\right)^{k-1}$ 收敛。

故 $S=200\times\left(\dfrac{1}{1.1}+\dfrac{1}{1.1^2}+\cdots+\dfrac{1}{1.1^n}+\cdots\right)$

$$=200\times\frac{1}{1.1}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{1.1}}$$

$=200\div 0.1=2000$（万元）

若级数收敛，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k=S$，则$R_n=S-S_n$ 称为收敛级数的余项，若级数发散，则级数没有和，因而也没有余项。根据定义41·2直接验证，可得：

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k=S\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}(S-S_n)=0. \qquad (41.4)$$

级数收敛，

基本性质：

若级数收敛，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k=S$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$；而$u_n$

$=S_n-S_{n-1}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$。于是，我们有

定理41·1（级数收敛的必要条件）若级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

定理41.1 表明：若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{100\cdot n+1}$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{100\cdot n+1}=\dfrac{1}{100}\neq 0$，故该级数发散；但是由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 推不出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

例如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$称为调和级数。虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，但是调和级数是发散的。这是因为$S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，$S_{2n}=S_n+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$。

假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$收敛，其和为$S$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$；但是，$S_{2n}-S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)\geqslant\frac{1}{2}$，这与假设矛盾。

所以调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

定理41·2　增添或改变级数的有限个项所得到的级数与原级数同时敛散。

证　设对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$增添$a_1+a_2+\cdots+a_m$，（$m$ 为 某 个正整数），得$a_1+a_2+\cdots+a_m+\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$。记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$，

$\sigma_n=a_1+a_2+\cdots+a_m+\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$。显然

$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 同时存在或不存在，故新级数与原级数同时敛散。

去掉有限个项相当于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 中有限个项改变为 零。改 变有限个项的情况，可以类似证明。

根据级数收敛的定义以及数列极限运算法则可得级数运算定理

定理41·3　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，$c$ 为常数。则

1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n=c\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$；

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n$。

证 1）记$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，因为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，而$\sum_{k=1}^{n}cu_k=c\sum_{k=1}^{n}u_k$，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}cu_k=c\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k=cs。$$

2）可类似1）加以证明。

正项级数

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的每一项$u_n>0$，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数。

正项级数是一类重要的级数。关于正项级数的敛散性有如下判别法。

定理41·4 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$有界。

证 由$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S\Rightarrow S_n$有界；反之，若$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_n$有界，因为$S_{n-1}<S_{n-1}+u_n=S_n$，即$\{S_n\}$单调有界，根据极限存在准则Ⅱ知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，因而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。 #

有了这一定理，立即可得下述比较判别法。

注：本书中，“#”表示证明完毕。

定理41·5 （比较判别法）设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，常数$c>0$，$u_n\leqslant cv_n$ $(n=1, 2, \cdots)$。

i）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

ii）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散。

证 i）因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=S$。由此⇒

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}cv_n=cS$，$\Rightarrow \sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}cv_n\leqslant cS$。

而$u_n\leqslant cv_n$ $(n=1, 2, \cdots)$所以有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k\leqslant\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}cv_n\leqslant cS$$

即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和序列$\{S_n\}$有界。所以由定理41·4知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

ii）用反证法，假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，由i）可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛，这与已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散矛盾。所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散。 #

注意：比较判别法只适用于正项级数，实际上，比较判别法只要从某项开始有$u_n\leqslant cv_n$即可。

运用比较判别法时必须有比较的基础，常用的基础级数是等比级数与调和级数。

例41.3 判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$的敛散性。

解 $n!=1\cdot2\cdot3\cdots n\geqslant2^{n-1}$，$\Rightarrow\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$。

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$收敛。

例41.4 讨论p级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（$p$是常数）的敛散性。

解 当$p\leqslant1$时，$\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n^p}$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散；

当$p>1$时，由$f(x)=\frac{1}{x^{p-1}}$在$[n-1, n]$上有

$$f(n)-f(n-1)=f'(n-1+\theta)\text{即}\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}$$

$$=\frac{p-1}{(n-1+\theta)^p}>\frac{p-1}{n^p}\quad(n\geqslant2,\ 0<\theta<1)\text{，因而有}$$

$$\frac{1}{n^p}<\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right],$$

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}<1+\frac{1}{p-1}\left[\left(\frac{1}{1^{p-1}}\right.\right.$$