2000年考研必备

最新版

数学

全真模拟试题详解

主编 清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 李正元
中国人民大学 袁荫棠

- 全新优化设计模拟试题
- 全面涵盖2000考纲考点
- 逐一规范详解所有试题
- 归纳总结解题方法技巧
- 专家点评考生常犯错误
- 权威预测2000命题动态

国家行政学院出版社

2000年考研必备

数学全真模拟试题详解

主　编　清　华　大　学　李永乐
　　　　北　京　大　学　李正元
　　　　中国人民大学　袁荫棠

执笔人　(以姓氏笔画为序)
　　　　清　华　大　学　刘庆华
　　　　北　京　大　学　刘西垣
　　　　北　京　大　学　李正元
　　　　清　华　大　学　李永乐
　　　　中国人民大学　严　颖
　　　　中国人民大学　袁荫棠
　　　　天津财经学院　鹿立江
　　　　东北财经大学　龚兆仁

国家行政学院出版社

京新登字 323 号

图书在版编目（CIP）数据

数学全真模拟试题详解/李永乐等主编. －北京：国家行政学院出版社. 1999.8
(2000 年考研必备)
ISBN 7-80140-070-4

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-试题　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 33883 号

2000 年考研必备
数学全真模拟试题详解
李永乐　李正元　袁荫棠　主编
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区厂洼街 11 号
邮政编码：100089
发行部电话：68929037　68929098
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787×1092　1/16 开本　19.5 印张　480 千字
1999 年 8 月第 1 版　1999 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—5000 册
ISBN 7-80140-070-4/O·5　　定价：25.00 元

前　言

本书是《2000 年考研数学复习全书》的姊妹篇。为了使考研同学更好地提高数学水平，检查第一阶段对数学基本概念、公式、定理及运算法则的复习效果，查漏补缺，提高应战能力，积累临场经验，作者深入研究了近年来考研命题规律及特点，分析了历年考研试题的考点分布及难易程度，并结合作者多年来数学阅卷以及全国各大城市"考研班"辅导的经验，编写了这本高质量、高水平实战训练题集——《2000 年考研数学全真模拟试题详解》。

本书特点：

1. 每题均全新优化设计，且试题内容涵盖新大纲所有考查知识点

数学考研试卷一至试卷四共有 81 道题，其中填空题与选择题 40 道题，计算题与证明题 41 道题，但这四套试卷中约有 14 道题是重复的。为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些有针对性、高质量的题型训练，考试中多一份把握，我们特优化设计或改编了 20 套共 405 道全真模拟试题，这 20 套共 405 道题完全不同，没有重复题，也没有陈题；在内容设计上，每道题均涉及两个知识点以上，有些综合题甚至涉及到 3 个考点，每套题均涵盖新大纲所有考查知识点。通过这 20 套全新优化设计的高质量、高水平试题训练，我们相信您的数学的分析问题、解决问题的能力将会上一个新台阶。

2. 注重归纳总结，力求一题多解

我们在设计这 20 套试题时，无论是填空题、选择题，还是计算题与证明题，每道题都设有①分析——该题的解题步骤和解题思路、方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据最新考试大纲为 2000 年考研读者全新优化设计的一本高质量、高水平训练题集，本书中的试题难度略高于 1999 年考研试题，计算题与证明题体现了考试重点、难点内容，填空题与选择题着重考查考生对基本概念、定理的理解和运用，适用于第二阶段复习训练之用。

2. 本书包括卷一至卷四共20套题，同学可从卷二、卷四的题目入手，然后做卷三，最后做卷一(考生可根据考试大纲略去你这一类试卷所不考查的题目)。

3. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析和解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们以高质量、高水平严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

祝愿同学复习顺利，考试成功，心想事成!

李永乐

1999年7月于清华园

目　录

数学(一)　　模拟试题(Ⅰ)

一、　填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.)

(1)　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^2\sin x}=$ ________.

(2)　设 $F(x)=\int_0^x\left(\int_0^{y^2}\dfrac{\sin t}{t^2+1}dt\right)dy$,则 $F''(x)=$ ________.

(3)　$y''+y=\sin x$ 的通解为 $y=$ ________.

(4)　A 是3阶可逆矩阵,如 A^{-1} 的特征值是1、2、3,则 $|A|$ 的代数余子式 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$ ________.

(5)　进行两次重复独立试验,假设"至少成功一次"的概率是"至少失败一次"概率的两倍,则试验两次,成功次数的期望为________.

二、　选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$,则下列命题中错误的是

(A)　若 $f(x)$ 是偶函数,则 $F(x)$ 必是奇函数.

(B)　若 $f(x)$ 是奇函数,则 $F(x)$ 必是偶函数.

(C)　若 $f(x)$ 以 T 为周期且是偶函数,则 $F(x)$ 以 T 为周期且是奇函数.

(D)　若 $f(x)$ 以 T 为周期且是奇函数,则 $F(x)$ 以 T 为周期且是偶函数.　【　】

(2)　设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{|x|} & ,x\neq0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$,　则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

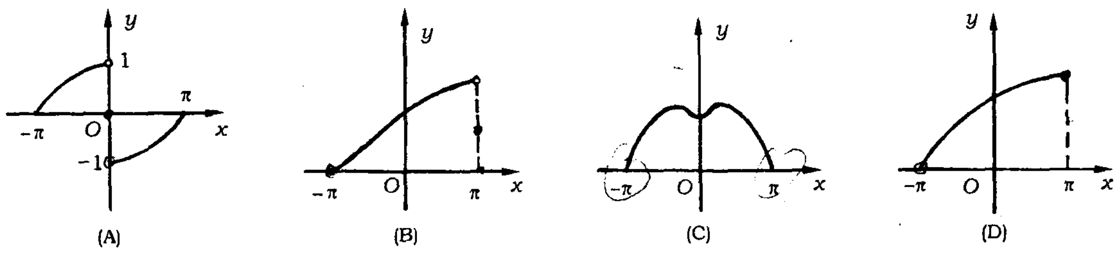
(A)　不连续.　　(B)　连续但不可导.

(C)　可导但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续.　　(D)　可导且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.　【　】

(3)　设 $f(x)$ 以 2π 周期,$f(x)$ 有富氏级数　$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$

则下列函数 $y=f(x)$ 的图形中哪一种可保证 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可展成富氏级数,即成立等式

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin x,\quad x\in[-\pi,\pi].$$　【　】



(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$，则三个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

两两相交或三条平行直线的充要条件是

(A) 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1$，秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$.

(B) 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任两个均线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 【 】

(5) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{8}, & x=-1\\ ax+b, & -1<x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

又已知 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，则

(A) $a=\frac{5}{16}, b=\frac{7}{16}$. (B) $a=\frac{7}{16}, b=\frac{9}{16}$.

(C) $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$. (D) $a=\frac{3}{8}, b=\frac{3}{8}$. 【 】

三、(本题满分 5 分)

设 $\Gamma: x=x(t), y=y(t)\ (\alpha<t<\beta)$ 是区域 D 内的光滑曲线 即 $x(t), y(t)$ 在 (α,β) 有连续的导数且 $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$, $f(x,y)$ 在 D 内有连续的偏导数. 若 $P_0\in\Gamma$ 是 $f(x,y)$ 在 Γ 上的极值点，求证：$f(x,y)$ 在点 P_0 沿 Γ 的切线方向的方向导数为零.

四、(本题满分 5 分)

求曲线积分

$$I=\int_{\overset{\frown}{OA}} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$$

其中 $\overset{\frown}{OA}: y=\sin x, O(0,0), A(\pi,0)$. $\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$

五、(本题满分 6 分)

设平面 π 是椭球面 $x^2+\frac{1}{2}y^2+z^2=\frac{5}{2}$ 的切平面，它平行于直线 $L_1: x=t, y=1+2t, z=-2+2t$ 及两平面交线 $L_2: \begin{cases}x-2y+4z-8=0\\2x+y-2z+4=0\end{cases}$ (*)

(1) 求平面 π 的方程； $2x+y-z=5$

(2) 求直线 L_1 到平面 π 的距离. $\frac{10}{3}$

六、（本题满分 6 分）

设 Oxy 平面第一象限中有曲线 $\Gamma: y = y(x)$，过点 $A(0,\sqrt{2}-1)$，$y'(x) > 0$. $M(x,y)$ 为 Γ 上任意一点，满足：弧段 $\overset{\frown}{AM}$ 的长度与点 M 处 Γ 的切线在 x 轴上的截距之差为 $\sqrt{2}-1$，求此曲线.

七、（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 二阶可导且 $f(0)=1, f'(0)\leqslant 1, f''(x) < f(x)\ (x>0)$. 求证：

$$f(x) < e^x \quad (x > 0).$$

八、（本题满分 7 分）

设 Ω 由曲面 $S: z = x^2+y^2 \quad (0\leqslant z\leqslant 2)$ 与平面 $z=2$ 围成.

(1) 设 $f(z)$ 连续，试将三重积分 $I = \iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}V$ 表成定积分；

(2) 求曲面积分 $J = \iint\limits_{S^+} \frac{1}{b^2}xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{1}{c^2}yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{1}{a^2}zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

其中 S^+ 为上半椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (0\leqslant z\leqslant c)$ 的上侧.

九、（本题满分 7 分）

设 $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(1) 在区间 $(-1,1)$ 内将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数；

(2) 求 $f^{(n)}(0)$.

十、（本题满分 8 分）

已知 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&b\end{bmatrix}$ 的特征向量，求 a,b 之值，并求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$.

十一、（本题满分 6 分）

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 3 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值. 证明：

(1) $\lambda_i \neq -1\ (i=1,2,3)$

(2) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}, \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{BC}$ 同时为对角矩阵.

十二、（本题满分 8 分）

设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,4)$，Y 服从参数 $\lambda = 0.5$ 的指数分布. $\mathrm{COV}(X,Y) = -1$. 令 $Z = X - aY$. 已知 $\mathrm{COV}(X,Z) = \mathrm{COV}(Y,Z)$. 确定 a 的值，并求 X 与 Z 的协差阵的逆矩阵.

十三、（本题满分 6 分）

设总体 $X \sim N(\mu, 5^2)$，在 $\alpha = 0.05$ 的水平上检验

$$H_0: \mu = 0 \qquad H_1: \mu \neq 0$$

如果所选取的拒绝域 $R = \{|\overline{X}| \geqslant 1.96\}$，问样本容量 n 应取多大.

数学(一)　模拟试题(Ⅰ)答案及详解

一、(1)【答】$\frac{1}{3}$.

【解法一】这是$\frac{0}{0}$型,可连续用洛必达法则.为简化计算先进行等价无穷小因子替换.于是

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(x+1)}{x^3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x+e^x\cos x-1-2x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2}{6x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}(e^x\cos x-e^x\sin x)=\frac{1}{3}.$$

【解法二】若熟悉泰勒公式,可用泰勒公式求解.

$$e^x\sin x-x(1+x)$$

$$=(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))-x(1+x)$$

$$=x+x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-x(1+x)=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

因此,$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

【评注】在用洛必达法则求$\frac{0}{0}$型极限时,要注意用等价无穷小因子替换.

(2)【答】$\dfrac{2x\sin x^2}{x^4+1}$.

【分析】这是用两次变限积分表示的函数

$$F(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$$

其中$f(y)$又是变限积分

$$f(y)=\int_0^{y^2}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

因此要连续用两次变限积分求导公式.

【解】由变限积分求导公式得

$$F'(x)=\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t,\quad F''(x)=\frac{\sin x^2}{1+x^4}\cdot 2x$$

【评注】设$F(x)=\int_a^x(\int_b^{\varphi(y)}g(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}y$,其中$g(t)$连续,$\varphi(y)$可导,则

$$F(x)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y,\quad f(y)=\int_b^{\varphi(y)}g(t)\mathrm{d}t$$

于是

$$F'(x)=f(x)=\int_b^{\varphi(x)}g(t)\mathrm{d}t,\quad F''(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x).$$

(3) **【答】** $c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$.

【分析】 这是二阶常系数线性非齐次方程,关键是按非齐次项的类型确定特解的类型.

【解】 先求相应的齐次方程的通解:由于其特征方程为 $\lambda^2+1=0,\lambda=\pm i$,所以通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

再求非齐次方程的一个特解:由于非齐次项是三角函数 $\sin\beta x,\beta=1$. $\beta i=i$ 是特征根,所以有形如 $y^*(x)=x(A\cos x+B\sin x)$ 的特解.

$$y^{*\prime}=A\cos x+B\sin x+x(B\cos x-A\sin x)$$
$$y^{*\prime\prime}=2B\cos x-2A\sin x-x(A\cos x+B\sin x)$$

代入原方程得

$$y^{*\prime\prime}+y^*=2B\cos x-2A\sin x=\sin x$$

比较两端的系数得

$$A=-\frac{1}{2},B=0$$

即特解为 $y^*=-\frac{1}{2}x\cos x$.

因此,原方程的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$.

(4) **【答】** 1.

【分析】 根据 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 特征值的关系,知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$,又由行列式的值等于特征值的乘积得 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{6}$.那么伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$,由于特征值的和等于对角线上元素之和.而 $\boldsymbol{A}^*$ 的对角线上元素之和为

$$A_{11}+A_{22}+A_{33}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1.$$

【评注】 1° 本题主要考查 ① $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*$ 特征值之间的关系;② 特征多项式的性质 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\quad\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$;③ 伴随矩阵定义.

2° 要熟悉 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*,k\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^2+k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{E}\cdots$ 等矩阵特征值,特征向量之间的联系.有些题目如能灵活运用特征多项式的性质是简捷的.对某些代数余子式的求和技巧参看《数学复习全书》中线性代数【例 1.3】与【例 1.19】.

(5) **【答】** $2(\sqrt{3}-1)$.

【分析】 根据二重伯努利试验概型,至少成功一次的概率为 $1-q^2$.至少失败一次的概率是 $1-p^2$.其中 p 为一次试验的成功率,$q=1-p$.依题意

$$1-q^2=2(1-p^2)$$
$$1-(1-p)^2=2(1-p^2)$$
$$p^2+2p-2=0$$
$$p=\frac{-2+2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}-1\ (\text{负值舍去})$$

二项分布期望值为 np，因此应填 $2(\sqrt{3}-1)$.

【评注】 本题考查二项分布的概念，用对立事件（或完备事件组）的性质处理诸多事件中至少发生一个的概率往往可以起到事半功倍的作用.

二、 (1) 【答】 C.

【分析】 想一想变限积分 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的性质以及对称区间上奇偶函数积分 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 的性质便可知(A),(B),(D) 均正确，而(C) 是错误的. 或直接举例说明(C) 是错误的.

【解】 例如 $f(x)\equiv 1$ 是以 T 为周期的偶函数，但 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x$ 不是周期函数，因此(C) 是错误的.

【评注】 应掌握变限积分 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的如下性质（其中 $f(x)$ 是连续函数）：

1° 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为偶函数（$f(x)$ 的全体原函数 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+c$ 均为偶函数）.

2° 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为奇函数（$f(x)$ 的全体原函数 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+c$ 中，除 $c=0$ 即 $F(x)$ 外，均不是奇函数）.

3° 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的，则 $F(x)$ 也是以 T 为周期的充要条件是：

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = 0$$

当 $f(x)$ 以 T 为周期且是奇函数时，

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{周期函数的积分性质}} 0$$

因此， $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 以 T 为周期.

(2) 【答】 D.

【分析】 先考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否可导. 若不可导，再考察在 $x=0$ 处是否连续. 若可导，则进一步求 $f'(x)$，考察 $f'(x)$ 在 $x=0$ 是否连续.

【解】 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{\pi}{2}$.

$x\neq 0$ 时

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan\frac{1}{|x|} + x\frac{1}{1+(\frac{1}{|x|})^2}(\frac{1}{|x|})' \\ &= \arctan\frac{1}{|x|} + x\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{-sgnx}{x^2} \\ &= \arctan\frac{1}{|x|} - \frac{x}{1+x^2}sgnx \end{aligned}$$

其中 $sgnx = \begin{cases} 1 & ,x>0. \\ -1 & ,x<0. \end{cases}$

因此，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\dfrac{\pi}{2}=f'(0)$ 即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(3) 【答】 C.

【分析】 从函数图形看到，这几个函数在$[-\pi,\pi]$上均满足：1° 连续或只有有限个第一类间断点；2° 只有有限个极值点. 由收敛性定理，$x \in [-\pi,\pi]$时，则有

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$= \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{若 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点} \\ \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)], & \text{若 } x = \pm\pi \end{cases}$$

现在就看哪一函数满足：当$x \in [-\pi,\pi]$时上式右端为$f(x)$.

对于(A)，$\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)] = 0 \neq f(0)$；

对于(B)，(C)，(D)，当$x \in (-\pi,\pi)$时，$f(x)$均连续，上式右端均为$f(x)$；

但只有(C)，$x = \pm\pi$时，才有

$$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)] = f(\pm\pi).$$

因此选(C).

(4) 【答】 C.

【分析】 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 1$表示三个平面的法向量共线，此时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4) = 2$，则表明它们互相平行，且至多有两个平面重合，故(A)不合题意.

当三个平面两两相交成三条平行直线时，这三个平面的法向量是共面的且互不平行，因而法向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，但任两个线性无关，从而$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 2$即三个平面没有公共交点，方程组是无解的，所以增广矩阵的秩要大于系数矩阵的秩，因此$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4) = 3$. 反之，当$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 2$时，不能保证$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中任意两个向量是线性无关的. 例如两个平面平行且第三个平面与之相交时，仍有$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 2$，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4) = 3$. 可见(B)只是必要条件.

类同(B)的分析，(D)也只是必要条件. 注意：线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$无解等同于$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.(D)同样不能排除两个平面平行且第三个平面与之相交的情形.

任意两个法向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关等同于任两个平面均不平行，三个法向量又要共面，故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 2$. 这时，三个平面既可能两两相交成三条平行直线，亦可能三个平面交于一条直线，$\boldsymbol{\alpha}_4$不能被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出的条件是不可少的.

【评注】 1° 本题主要考查：① 线性相关的几何意义；② 向量组的秩与线性相关，方程组有解与线性表出之间的相互联系；③ 空间三个平面的位置关系.

2° 本题综合运用了线性代数与空间解析几何两个知识点，是代数与几何相结合的综合题.

(5) 【答】 A.

【分析】 由于分布函数$F(x)$是右连续函数. 因此有$F(-1+0) = F(-1)$. 即

$$-a + b = \frac{1}{8} \tag{1}$$

由于$F(1) = P\{X \leqslant 1\} = P\{X < 1\} + P\{X = 1\}$，且$P\{X < 1\} = F(1-0) = a + b$. 因此可得方程

$$a + b + \frac{1}{4} = 1 \tag{2}$$

解由(1),(2)组成的关于 a,b 的二元一次方程组可得 $a = 5/16, b = 7/16$. 因此应选择(A).

【评注】 本题考查的是分布函数的性质. 虽然连续型随机变量的分布函数处处连续, 即对任何实数 $F(x)$, 有 $F(x-0) = F(x) = F(x+0)$, 且 $P\{X = x\} = 0$. 但是如果随机变量 X 取某个值的概率不为零时, 则该随机变量就不是连续型的. 不能认为对任何实数 x, $F(x)$ 均连续. 本题中的随机变量既不是连续型也不是离散型, 因此若认为 $F(1) = F(1-0) = 1$ 或 $F(-1) = F(-1-0) = 0$ 均是错误的. 选项(B),(C),(D)均是由上述错误导致的结果, 正确的应该是应用下面有关结论:

$$F(x+0) = F(x);$$
$$P\{X < 0\} = F(x-0);$$
$$F(x) = P\{X < x\} + P\{X = x\}.$$

三、 **【分析与证明】** 当 $(x,y) \in \Gamma$ 时, $f(x,y)$ 变成 t 的一元函数 $f(x(t),y(t))$. 记 P_0 点对应的参数为 t_0, 即 P_0 为 $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$. P_0 是 $f(x,y)$ 在 Γ 的极值点, 即 t_0 是 $f(x(t),y(t))$ 的极值点. 于是, 由一元函数极值点的必要条件得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t),y(t))\Big|_{t=t_0} = 0. \tag{1}$$

$f(x(t),y(t))$ 是二元函数 $f(x,y)$ 与一元函数 $x = x(t), y = y(t)$ 的复合, 由复合函数求导法得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t),y(t)) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} y'(t) \tag{2}$$

其中 $x = x(t), y = y(t)$. 注意曲线 Γ 在 P_0 点处的切向量是 $(x'(t),y'(t))$, 单位切向量是

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}}(x'(t_0),y'(t_0)) = (\cos\alpha, \cos\beta)$$

因此, $t = t_0$ 时由(1),(2)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t),y(t))\Big|_{t=t_0} = \left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta\right] \cdot \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)} = 0$$

由于 $\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)} \neq 0$ 及方向导数的计算公式得

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta = 0.$$

四、 **【分析】** 把曲线积分分解成两部分, 其中一个积分的被积表达式易求原函数, 另一积分可直接化成定积分或添加辅助线后用格林公式来计算.

【解法一】 $I = \int_{\overset{\frown}{OA}} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - \mathrm{e}^x \cos y \mathrm{d}x + \mathrm{e}^x \sin y \mathrm{d}y - \int_{\overset{\frown}{OA}} -\mathrm{e}^x y \mathrm{d}y = I_1 + I_2$

$$I_1 = \int_{\overset{\frown}{OA}} \mathrm{d}\mathrm{e}^x - \cos y \mathrm{d}\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \mathrm{d}\cos y = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \cos y)\Big|_{(0,0)}^{(\pi,0)} = 0$$

$$I_2 = \int_0^\pi -\mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}\sin x = -\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x \cos x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin 2x \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x \mathrm{d}\mathrm{e}^x = \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2x \mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos 2x \mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$= \mathrm{e}^x \cos 2x\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin 2x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^\pi - 1 - 4I_2.$$

$\Rightarrow \quad 5I_2 = \mathrm{e}^{\pi} - 1 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1).$

因此 $I = I_1 + I_2 = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1).$

【解法二】 添加辅助线$\overline{AO}: y = 0\ (x \in [\pi, 0])$. $\overparen{OA}$ 与$\overline{AO}$ 围成区域D,令

$$P = \mathrm{e}^{x}(1 - \cos y), \quad Q = -\mathrm{e}^{x}(y - \sin y)$$

则由格林公式得

$$\int_{\overparen{OA}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{\overline{AO}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\overparen{OA}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{\overline{OA}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \iint_D [-\mathrm{e}^{x}(y - \sin y) - \mathrm{e}^{x}\sin y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0 + \iint_D \mathrm{e}^{x} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{e}^{x}y\mathrm{d}y$$

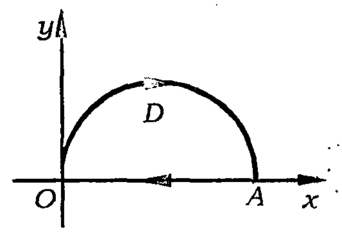
$$= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x}\sin 2x\mathrm{d}x \xlongequal{\text{同【解法一】}} \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1).$$

【评注】 在用格林公式时,若不注意就会犯以下错误:

$$\int_{\overparen{OA}\cup\overline{AO}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \xlongequal{\times} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里$\overparen{OA}$ 到$\overline{AO}$ 是顺时针方向,不是 D 的边界的正向,因此右端二重积分前要添一个负号.



五、(1) **【分析】** 本题是确定椭球面上的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$,使得 P_0 点处的切平面 π 的法向量$\boldsymbol{n}$ 与L_1 的方向向量 $\boldsymbol{l}_1$ 及 L_2 的方向向量 $\boldsymbol{l}_2$ 垂直,即 $\boldsymbol{n}$ 与$\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2$ 平行,还要求直线 L_1 与 L_2 不在平面 π 上.

【解】 椭球面上任意点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面 π 的法向量$\boldsymbol{n} = (2x_0, y_0, 2z_0)$. L_1 的方向向量 $\boldsymbol{l}_1 = (1,2,2)$,由(*)得 (此处“ * ”见题目)

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5(2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

$\boldsymbol{l}_2 = (0,2,1)$ 为 L_2 的方向向量.

$$\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

由 $\boldsymbol{n}$ 与$\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2$ 平行得 $\boldsymbol{n} = \lambda(\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2)$,$\lambda$ 为某实数,即$(2x_0, y_0, 2z_0) = \lambda(-2, -1, 2)$,

即 $\qquad x_0 = -\lambda, \quad y_0 = -\lambda, \quad z_0 = \lambda.$

将它代入椭球面方程得

$$(-\lambda)^2 + \frac{1}{2}(-\lambda)^2 + \lambda^2 = \frac{5}{2} \text{ 即 } \quad \lambda^2 = 1.$$

解得 $\lambda = \pm 1$,因此得

$$(x_0, y_0, z_0) = \pm(1, 1, -1)$$

过这两点的切平面方程分别为

$$2(x-1)+(y-1)-2(z+1)=0,\quad 2(x+1)+(y+1)-2(z-1)=0$$

即 $2x+y-2z-5=0,\quad 2x+y-2z+5=0.$

L_1 落在平面 $2x+y-2z-5=0$ 上,因为

$$2t+(1+2t)-2(-2+2t)-5=0.$$

易知 L_2 不在平面 $2x+y-2z+5=0$ 上,因此求得平面 π 的方程为

$$2x+y-2z+5=0.$$

(2) **【分析】** 因 L_1 与平面 π 平行,直线 L_1 上任意点与平面 π 等距.

【解】 由点到平面的距离公式知,L_1 上任意点 $(t,1+2t,-2+2t)$ 到平面 $\pi:2x+y-2z+5=0$ 的距离是

$$d=\frac{|2t+(1+2t)-2(-2+2t)+5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{3}.$$

【评注】 解这题时可能犯的错误是:求出 $\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=(-2,-1,2)$ 及 $\boldsymbol{n}=\pm(2x_0,y_0,2z_0)$ 后,直接令 $\pm(2x_0,y_0,2z_0)=(-2,-1,2)$ 得 $(x_0,y_0,z_0)=\pm(1,1,-1)$ 结论虽对(巧合!),但方法是错的,因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,不一定有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,只能是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,然后再由条件定出参数 λ.

六、 **【分析与求解】** 先求出 Γ 在点 $M(x,y)$ 处的切线方程

$$Y-y(x)=y'(x)(X-x)$$

其中 (X,Y) 是切线上点的坐标,在切线方程中令 $Y=0$,得 x 轴上的截距

$$X=x-\frac{y(x)}{y'(x)}.$$

又弧段 $\overset{\frown}{AM}$ 的长度为 $\int_0^x\sqrt{1+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.按题意得

$$\int_0^x\sqrt{1+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t-\left(x-\frac{y}{y'}\right)=\sqrt{2}-1 \qquad (1)$$

这是积分、微分方程,两边对 x 求导,就可转化为二阶微分方程:

$$\sqrt{1+y'^2}=1-\frac{y'^2-yy''}{y'^2}$$

即 $$y'^2\sqrt{1+y'^2}=yy''$$

又由条件及(1)式得

$$y(0)=\sqrt{2}-1,\quad y'(0)=1.$$

因此得初值问题

$$\begin{cases}y'^2\sqrt{1+y'^2}=yy''\\ y(0)=\sqrt{2}-1,\quad y'(0)=1\end{cases} \qquad (2)$$

问题(1)与(2)是等价的.

下面求解(2).这是不显含自变量 x 的二阶方程,作变换 $p=y'$ 得

$$p^2\sqrt{1+p^2}=yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

(因为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$).分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p\sqrt{1+p^2}}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$$