第三分册

初中数学奥林匹克选讲

中数学奥林匹克选讲
数学奥林匹克选讲
学奥林匹克选讲
奥林匹克选讲
林匹克选讲
匹克选讲
克选讲
选讲

主　编　郑维行
副主编　陆文钊　桑　淦　[illegible]

南京
州　大　学　出

初中数学奥林匹克选讲

（第三分册）

主编　郑维行

副主编　陆文钊　秦淦　马传渔

苏州大学出版社

1995 年

(苏)新登字第 015 号

初中数学奥林匹克选讲(第三分册)
主编　郑维行
苏州大学出版社出版发行
江苏省新华书店经销
丹阳新华印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 6.875　字数 154 千
1995 年 1 月第 1 版　1995 年 6 月第 2 次印刷
印数 10001—15000
ISBN 7-81037-122-3/G·42　　定价 5.10 元

序　言

受中国数学会的委托，江苏省数学会将主办1995年全国初中数学联赛。为了迎接这次大赛并作好准备，我们从去年10月份起即策划组织编写一套初中数学奥林匹克选讲，共分三个分册52讲。许多专家欣然应邀参加编写。初稿完成后，在分组审阅的基础上，于今年7月7日至10日在南京定稿会上定稿，前后历时9个月。这套系列教程力求做到选材切合大纲，解题正确简明，行文通畅，富有新意。每讲由训练与思考，范例与分析，阅读与练习，解答与提示四部分组成。每讲开始交代一下基本思想与应用途径。各部分选择相当多数量的例题，通过例题说明技巧，由浅入深，详细分析，有的例题十分典型，可收到举一反三之效。为了加强自我训练，每讲安排一定数量的练习。在需要时，读者可参考有关解答与提示。

我们希望这套书的出版，适合日益活跃发展的数学竞赛活动的需要。各地奥校、数学辅导班、培训班可采用它作为试用教材或参考书。有兴趣的同学也可用作课外读物。为了使本书及时出版，除了编审者们不辞辛劳，挥汗校阅加工之外，苏州大学出版社全力以赴，给予了特别的关注。在此我们谨表示衷心感谢。由于时间仓促，书中错误或不妥之处在所难免，希望广大读者与专家们不吝指正为感。

编　者

1994年7月9日于南京

目　　录

第一讲　选择题的解法……………………………………………… 1
第二讲　初等数论 ………………………………………………… 13
第三讲　新概念命题剖析 ………………………………………… 25
第四讲　从特殊性看问题（一）——特殊探求法 ……………… 35
第五讲　从特殊性看问题（二）——简单极端原理 …………… 48
第六讲　从特殊性看问题（三）——定性分析与定值问题 … 60
第七讲　整体思想解法 …………………………………………… 72
第八讲　枚举与分类 ……………………………………………… 91
第九讲　抽屉原理与涂色问题………………………………… 107
第十讲　数形结合……………………………………………… 124
第十一讲　类比（一） ……………………………………… 140
第十二讲　类比（二） ……………………………………… 156
第十三讲　包含排除原理…………………………………… 169
第十四讲　覆盖问题………………………………………… 185
第十五讲　竞赛题选讲……………………………………… 197

第一讲　选择题的解法

一、训练与思考

选择题是各种考试和竞赛中的常见题型，研究它的解法很有必要．请你思考下列问题：

问题 1　如果$-1<a<0$，那么在a，a^3，$\sqrt[3]{a}$，$\frac{1}{a}$中，一定是（　　）

(A) a最小，a^3最大　　(B) $\sqrt[3]{a}$最小，a最大

(C) $\frac{1}{a}$最小，a最大　　(D) $\frac{1}{a}$最小，a^3最大

问题 2　已知方程$(a+1)x^2+(|a+2|-|a-10|)x+a=5$有两个不同的实数根，则$a$可以是（　　）

(A) 11　(B) 10　(C) 9　(D) 5

我们可以把选择题当解答题做，对问题 1，我们根据a的取值范围，按定义来比较它们的大小．对问题 2，我们考虑到判别式$\Delta>0$，列出关于a的不等式，然后解得a可能取的值．大家不妨按上述思路去做一下，要经过一番推理和计算才能得到结果．

其实，选择题的结构与解答题不同．它由题干和选择支两部分组成．题目中不但有已知（题干），而且有结论（选择支），就单选题而言，我们还知道，有且只有一个选择支是正确的，因此，我们要充分利用题干和选择支中提供的信息．做选择题时，我们不是着眼于“解”，而是着眼于正确、迅速地“选”．

如问题 1，我们可以设$a=-\frac{1}{8}$，则$a^3=-\frac{1}{8^3}$，$\sqrt[3]{a}=-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{a}=-8$。显然$\frac{1}{a}$最小，a^3最大，故选 (D)．

又如问题 2，我们可以把选择支中的 a 值代入到原方程中去，看哪一个 a 值可使得方程有两个不相等的实根，为了尽可能减少代入的次数，可选择有特殊性的 a 值先代入，如 $a=5$ 使得方程的常数项为 0，代入结果，恰为所求.

大家不难看到，后一种解法充分利用了选择题结构的特点和所提供的信息，避免了许多繁琐的计算和推理，使得解法简捷、正确，这一讲就给大家介绍几种解选择题的常用方法.

二、范例与分析

1 特殊值法

例 1 若 $abc=1$，则 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$ 的值是 ( )

(A) 1　(B) 0　(C) -1　(D) -2

分析 根据题设条件，设 $a=b=c=1$，把它们代入原式中，容易得到原式 $=1$，可以确定选 (A).

例 2 若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2ax_0+b)^2$ 的关系是 ( )

(A) $\Delta>M$　(B) $\Delta=M$

(C) $\Delta<M$　(D) 不确定

分析 我们从最简单的情形考虑，不妨设方程为 $x=0$，即 $a=1$，$b=0$，$c=0$，$x_0=0$，把它们分别代入 Δ 和 M，得 $\Delta=M=0$，故选 (B).

通过解问题 1 和例 1、例 2，我们可以体会到，在解决含有字母的代数式问题时，用符合题设条件的特殊值代替字母，然后进行计算和推理，是正确、快速地找到结论的有效方法. 这种做法的根据是，对于一般情形下成立的结论，在符合一般情形的特殊条件下一定成立.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=2$，设 P 为

BC 边上任意一点，则（　　）

(A) $PA^2<PB\cdot PC$　　(B) $PA^2=PB\cdot PC$

(C) $PA^2>PB\cdot PC$　　(D) $PA^2\leqslant PB\cdot PC$

分析　因为 P 为 BC 边上任一点，所以可以把它定在 BC 的中点，则 $PB\cdot PC=1$，因为 $PA>AB-PA=2\sqrt{2}-1>1$，所以 $PA^2>PB\cdot PC$，故选（C）.

例 4　在锐角$\triangle ABC$中，$AC=1$，$AB=c$，$\angle A=60°$，$\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=1$ 则（　　）

(A) $\frac{1}{2}<c<2$　　(B) $0<c\leqslant\frac{1}{2}$

(C) $c>2$　　(D) $c=2$

分析　取$\triangle ABC$ 为正三角形，显然符合全部题设条件，则 $c=1$，故应选（A）

由此可见，在解决几何问题时，如用“特殊值”法，一般是用特殊图形代替一般图形；用特殊位置的点来代替一般位置的点.

2　排除法

例 5　不等式 $1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}<x$ 的解集是（　　）

(A) $x<16$　　(B) $x>16$

(C) $x<1$　　(D) $x>-\frac{1}{16}$

分析　我们通过对选择支的分析，选择 $x=-1$，把它代入原不等式，显然成立. 这说明 $x=-1$ 属于原不等式的解集，从而排除 (B) 或 (D)，再用 $x=2$ 代入原式，显然成立，便可排除（C），故选（A）

因为单选题的结果是存在且唯一的，所以可以用排除错误选择支的方法，找到正确的选择支，常用于解决不易直接判断的问题.

运用排除法时，我们要通过对条件和选择支的分析找到正确、简便、可靠的筛选方法. 如本题选取 $x=-1$ 代入，就是因为通过

一次检验可排除二个选择支.

另外，排除法常常和特殊值法结合起来使用. 有时需要取二次特殊值才能达到排除所有错误选择支的目的.

3 验证法

前面讲问题 2 时，用的就是验证法，它充分利用选择题已给出结论的特点，通过对结论的一一验证，找到正确的答案. 我们往往用排除法先排除一部分选择支，只对余下的选择支进行验证；也可以通过判断选准“突破口”，先对可能成立的选择支进行验证. 这样做减少了工作量，起到事半功倍的效果.

4 图解法

例 6 方程 $|x^2-1|=\frac{1}{10}\left(x+\frac{9}{10}\right)$ 的解的个数是 ( )

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

分析 我们设 $y=|x^2-1|$ 和 $y=\frac{1}{10}\left(x+\frac{9}{10}\right)$，在同一直角坐标系中，画出这两个函数的图象，看它们有几个交点，即得出结果. 如在图 1—1 中，可看出有两个交点，故应选 (C).

图解法常把方程和不等式的问题转化为同一直角坐标系中两个函数图象之间的关系问题来处理.

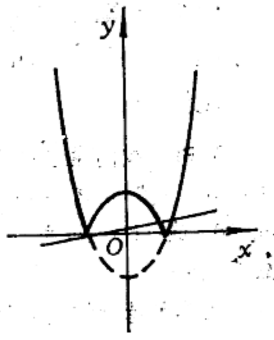

图 1—1

5 直接法

例 7 已知关于 x 的二次方程 $2x^2+ax-2a+1=0$ 的两个实根的平方和为 $7\frac{1}{4}$，则 a 的值为 ( )

(A) -11 或 3 (B) -11

(C) 3 (D) 5

分析 设方程的两根为 x_1 和 x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{a}{2}$，$x_1x_2=$

$\frac{-2a+1}{2}$，∵$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$，∴依题意得方程$a^2+8a-33=0$，解之得$a_1=3$，$a_2=-11$，似乎应选（A），经检验，当$a=-11$时，判别式$\Delta<0$，故应舍去，故应选（C）.

例8　如图1－2中，直角梯形ABCD中，AB＝7，AD＝2，BC＝3，如果边AB上的点P使得以P、A、D为顶点的三角形和以P、B、C为顶点的三角形相似，那么这样的点P的个数是（　　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

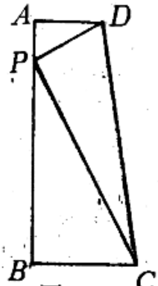

图1－2

分析　根据题设条件，三角形相似应考虑两种情况.

当$\triangle PAD\backsim\triangle PBC$时，设$AP=x$，则$PB=7-x$，$\frac{x}{7-x}=\frac{2}{3}$，解之得$x=\frac{14}{5}$，当$\triangle PAD\backsim\triangle CBP$时，则$\frac{x}{3}=\frac{2}{7-x}$，解之得$x_1=1$，$x_2=6$

因此，满足题设条件的点有3个，应选（C）.

选择题的选支中常有诱误支，例7中的选择支A就是诱误支，如不注意判别式$\Delta>0$这个隐蔽条件，就会误选（A），例8中的（A）、（B）也是诱误支，如未注意到题目中以P、A、D为顶点的三角形与以P、B、C为顶点的三角形相似未限制顶点的对应关系这一点，就会片面考虑一种相似关系而被诱误．因此，解选择题时，必须正确运用概念，善于发现隐敝条件，养成从多角度看问题的习惯，才能防止诱误.

以上介绍了解选择题的几种方法，实际解题时，往往是多种方法综合运用，才能收到较好的效果.

三、阅读与练习

1. 典型题解

题 1 方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$（k 为实数）有两个实根 α、β，且 $0<\alpha<1$，$1<\beta<2$，那么 k 的取值范围是（ ）

(A) $3<k<4$

(B) $-2<k<-1$

(C) $3<k<4$ 或 $-2<k<-1$

(D) 无解

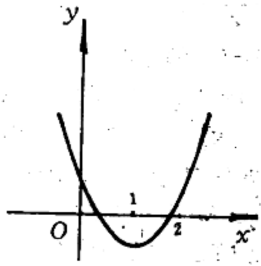

图 1—3

解一 本题用直接法解

设 $f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k+2$ $\because 0<\alpha<1$，$1<\beta<2$ $\therefore f(x)$的图象与 x 轴的交点一个在 0 和 1 之间，另一个在 1 和 2 之间．因此，当 $x=0$ 时，$f(x)$的函数值 $f(0)>0$；当 $x=1$ 时，$f(x)$的函数值 $f(1)<0$；当 $x=2$ 时，$f(2)>0$，由此得不等式组

$$\begin{cases} k^2-k-2>0 \\ k^2-2k-8<0 \\ k^2-3k>0 \end{cases}$$

解之得 $3<k<4$ 或 $-2<k<-1$

再考虑判别式 $\Delta=[-(k+13)]^2-4\times7\times(k^2-k-2)>0$，解之得 $1-\frac{2}{3}\sqrt{21}<k<1+\frac{2}{3}\sqrt{21}$，上述 k 的取值范围满足判别式 $\Delta>0$ 的条件，故应选（C）.

解二 本题用特殊值法解，$\because 0<\alpha<1$ $\therefore$ 设 $\alpha=\frac{1}{2}$代入原方程，化简后得到关于 k 的方程，$4k^2-6k-27=0$，

解之得 $k=\frac{3\pm3\sqrt{13}}{4}$，容易判断 $3<\frac{3+3\sqrt{13}}{4}<4$，$-2<\frac{3-3\sqrt{13}}{4}<-1$，故应选（C）.

由此可以看到，用直接法解题着眼于“解”、用特殊值法解题

着眼于“选”.

题 2 在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120°$，P是$\triangle ABC$内一点，则 （　　）

(A) $PA+PB+PC<AB+AC$　　(B) $PA+PB+PC>AB+AC$

(C) $PA+PB+PC=AB+AC$　　(D) $PA+PB+PC\leqslant AB+AC$.

解 首先我们把$\triangle ABC$特殊化，用等腰$\triangle ABC$代替一般的钝角三角形，保持$\angle BAC=120°$不变，然后把P点的位置特殊化，把BC的中点当作P点，显然$\angle ABP=\angle ACP=30°$，$AP\perp BC$，设$AB=AC=1$，则$AP=\frac{1}{2}$，$BP=$

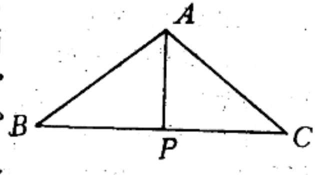

图 1—4

$PC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可以得到$PA+PB+PC=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+\frac{1}{2}$，$AB+AC=2$. 显然$PA+PB+PC>AB+AC$，故选 (B).

题 3 直角$\triangle ABC$中，两条直角边的和为 1，斜边上的高为h，则斜边长应是（　　）

(A) $-h\pm\sqrt{h^2+1}$　　(B) $-h+\sqrt{h^2+1^2}$

(C) $-h-\sqrt{h^2+1^2}$　　(D) $\frac{1}{h}$

解 斜边长应是正值，由此可排除 (A) 和 (C)，再用特殊值法求解，我们先用等腰直角$\triangle ABC$来代替一般直角三角形，设直角边$a=b=\frac{1}{2}$，则$c=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由$ab=hc$，可解得

$$h=\frac{ab}{c}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$，把上述数值代到选择支中去，则$-h+$

$\sqrt{h^2+1}=-\frac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4})^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}=c$，因此斜边长为$-h+$

$\sqrt{h^2+1^2}$，故选（B）.

题4 若 a、b、c 均不为 0，且 $a+b+c=0$，

则 $\left|\frac{|a|}{b+c}+\frac{|b|}{a+c}+\frac{|c|}{a+b}\right|$ 的值为（　　）

（A）-1　（B）0　（C）1　（D）3

解 根据题设条件，我们设 $a=2$，$b=c=-1$，把它们代入原式可求得原式的值为 1，故选（C）.

本题如用直接法解，要分为 a、b、c 两正一负或两负一正两种情况分析，大家不妨一试，解题过程要复杂得多.

题5 等腰三角形一个底角的平分线把三角形周长分为 63 和 36 两部分，则腰长一定是（　　）

（A）26.4　（B）33　（C）38.5　（D）以上答案都不对

解 如图△ABC 中，$AB=AC$，CD 是∠C 的平分线，若（A）正确，即 $AB=26.4$，则 $BC=46.2$，$AD=9.6$，$DC=16.8$，容易求得 $\frac{AD}{DC}=\frac{4}{7}$，$\frac{AB}{BC}=\frac{4}{7}$，根据三角形内角平分线性质定理，验证了（A）是正确的，我们注意到题目中"一定是"这个关键词，验证工作不能到此结束．显然，用同样的方法可验证（C）也是正确的，因此，（A）和（C）都是片面的结论，都是诱误支，正确的结果是（D）.

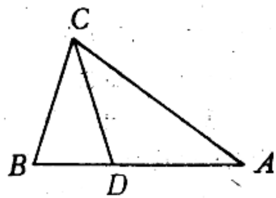

图 1－5

2. 练习题

（1）如果 $0<m<10$，并且 $m\leqslant x\leqslant 10$，

那么代数式 $|x-m|+|x-10|+|x-m-10|$ 化简后得到的最后结果是（　　）

（A）-10　　　（B）10

（C）$x-20$　　　（D）$20-x$

(2) 若 $\log_a b$ 的尾数是 0，且 $\log_a \frac{1}{b} > \log_a \sqrt{b} > \log_b a^2$，那么下列四个结论中，正确结论的个数是（　　）

① $\frac{1}{b} > \sqrt{b} > a^2$　　② $\log_a b + \log_b a = 0$

③ $0 < a < b < 1$　　④ $ab - 1 = 0$

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

(3) 四个互不相等的正数 a、b、c、d 中，a 最大，d 最小，且 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$，则 $a+d$ 与 $b+c$ 的大小关系是（　　）

(A) $a+d < b+c$　　(B) $a+d > b+c$

(C) $a+d = b+c$　　(D) 不确定的

(4) 设 $M = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$，其中 a、b 为相邻整数，$c = a \cdot b$，则 M（　　）

(A) 必为偶数　　(B) 必为奇数

(C) 为无理数　　(D) 可能为奇数，也可能为偶数

(5) 已知实数 a、b、c 满足 $a+b+c=0$，$abc=8$，那么 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的值是（　　）

(A) 正数　　(B) 零

(C) 负数　　(D) 正负不能确定

(6) 在半径为 1 的圆中有一内接多边形，若它的边长皆大于 1 且小于 $\sqrt{2}$，则这个多边形的边数必为（　　）

(A) 7　(B) 6　(C) 5　(D) 4

(7) 在 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 上，分别取 AD、BE、CF，使 $AD = \frac{1}{4}AB$，$BE = \frac{1}{4}BC$，$CF = \frac{1}{4}AC$，则 $\triangle DEF$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的（　　）

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{3}{8}$　(C) $\frac{5}{8}$　(D) $\frac{7}{16}$

(8) n 为正整数，302 被 $n(n+1)$ 除所得商数 q 与余数 r 都是正值，则 r 的最大值和最小值的和是（　　）

(A) 148　(B) 247　(C) 93　(D) 122

(9) 若方程 $\sqrt{x-p}=x$ 有两个不相等的实根，则实数 p 的取值范围是（　　）

(A) $p\leqslant 0$　(B) $p<\frac{1}{4}$　(C) $0\leqslant p<\frac{1}{4}$　(D) $P\geqslant\frac{1}{4}$

(10) 设锐角$\triangle ABC$ 的三条高 AD、BE、CF 相交于 H，若 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，则 $AH\cdot AD+BH\cdot BE+CH\cdot CF$ 的值是（　　）

(A) $\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$

(B) $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

(C) $\frac{2}{3}(ab+bc+ca)$

(D) $\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$

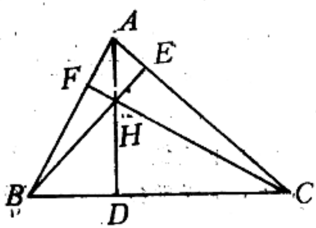

图 1－6

四、提示与解答

(1) 可取特殊值代入，(D).

(2) 分析已知条件，可取 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$，把它们代入到①～④中去，只有④成立，故选 (A).

(3) 可取 $a=1$，$b=2$，$c=4$，$d=8$，则 $a+d=9$，$b+c=6$，故 $a+d>b+c$，应选 (B).

(4) 先取 $a=1$，$b=2$，则 $c=2$，可求得 $M=3$，由此可排除 (A) 和 (C)，又因为 a、b 是相邻整数，不妨设 a 是奇数，b 是偶数，则 c 是偶数，所以 $a^2+b^2+c^2$ 是奇数，即 M 不可能是偶数，排除 (D)，应选 (B).

(5) 可取特殊值 $a=-2$，$b=1-\sqrt{5}$，$c=1+\sqrt{5}$ 代入原式得

负数，故选 (C).

(6) 通过对已知条件的分析，我们可以发现边数 6 和 4 与已知的边长条件 1、$\sqrt{2}$ 有某种联系，且便于计算，故可从此入手，若边数为 6，则至少有一边长不大于 1，且随着边数增加，边长减小，故排除 (A) 和 (B)，若边数为 4，则至少有一边长不小于 $\sqrt{2}$，因此排除 (D)，正确答案为 (C).

(7) 通过对图形的观察，可先计算出 $\triangle BDE$、$\triangle ECF$、$\triangle ADF$ 的面积与 $\triangle ABC$ 面积的比值，设 $\triangle ABC$ 的面积为 1，减去它们就得到结果，而这三个小三角形的"地位"是等同的，只要求出一块，其余二块即同理可得.

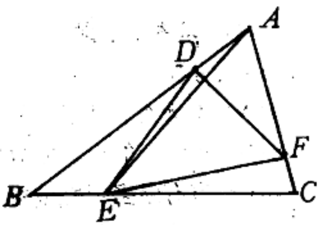

图 1-7

连结 AE，$\because BE=\frac{1}{4}BC$，显然 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，在 $\triangle ABE$ 中，$AD=\frac{1}{4}AB$，又能得到 $S_{\triangle BDE}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABE}$，$\therefore S_{\triangle BDE}=\frac{3}{16}S_{\triangle ABC}$，$\therefore S_{\triangle DEF}=\frac{7}{16}S_{\triangle ABC}$，故选 (D).

(8) $\because$ 302 和 $n(n+1)$ 都是偶数，$\therefore r$ 是偶数，故可排除 (B) 和 (C)，由除数只能取 6、12、20、30、42、56、72、90、110、132、156、182、210、240、272 这些值计算相应的余数，最小正值为 2，最大正值为 146，故选 (A).

(9) 先取 $p=-1$，代入化简得 $x^2-x-1=0$，解之，代入原方程只有一个根，故排除 (A) 和 (B). 再取 $p=1$ 代入原方程，化简得 $x^2-x+1=0$ 无实数解，故排除 (D)，应选 (C).

(10) 可由 H、D、C、E 四点共圆入手推导得到 $AD\cdot AH=AC\cdot AE=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$，正确答案为 (B).

第二讲　初等数论

一、训练与思考

1. 基本训练题

(1) 方程 $x^2+1994=y^2$

(A) 有无穷多组整数解

(B) 有唯一的一组整数解

(C) 有有限多组整数解（不少于两组）

(D) 没有整数解

(2) 下面命题："如果 N 是一个正奇数，它的各位数字之和是 4，且各位数字没有一个是零，那么 N 是质数"的反例的个数共有

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

(94 年美国第 45 届中学生数学竞赛试题)

(3) 使得 $n^2-19n+91$ 为完全平方数的自然数 n 共有______个

(4) 记 $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}}(p)$ 为 p 进制数，其中 a_k（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）在 p 个数码 0、1、2、…（$p-2$）、（$p-1$）中取值，且 $a_n\neq0$，各位上数值满 p 则向相邻的左边一位进 1，若 $4_{(p)}\times13_{(p)}=100_{(p)}$，则 $p=$______.

2. 解法与思考

(1) 1994 是偶数，若方程 $x^2+1994=y^2$ 中 x、y 为整数，则 x^2、y^2 的奇偶性相同，即 x、y 同奇同偶，由此 $y-x$、$y+x$ 均为偶数，由方程可得 $y^2-x^2=(y+x)(y-x)=1994$，$(y+x)(y-x)$ 是 4 的倍数，但 $1994=2\times997$ 不是 4 的倍数，矛盾，所以方程无整数解，