高中数学

高考命题规律研究

总主编　王玉标

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

上海交通大学出版社

高考命题规律研究

高 中 数 学

主　编　孙学昌　张自重
副主编　杨　环　丁善勇　周广健
编　委　周宗雅　张元桂　刘先胜
丁　锋　王振华　葛大圣
叶家振　王　静　杨承海

上海交通大学出版社

内容提要

本书依据国家教委颁布的最新教学大纲，按人民教育出版社最新教材的内容编写。书中按最新高考考点和教学顺序分4篇13章。每章分命题规律、试题精析、应试指南和应试练习四部分。书后附高考模拟试题和各章应试练习全部参考答案或简明解答。

本书将高考命题跟教与学密切联系、科学结合，旨在给规律、教方法、传技巧，使学生跳出“题海”。读者使用本书，可以紧紧抓住考点、突破难点、强化热点，提高学习的针对性、自觉性和有效性，取得“事半功倍”的学习效果。本书既适用于毕业班学生作复习使用，又适用于非毕业班学生作同步辅导和练习，亦可供教师作为提高素质教育的教学参考书。

高考命题规律研究

（高中数学、高中化学、高中物理、高中语文、高中英语）

上海交通大学出版社出版、发行

上海市番禺路877号　邮政编码200030

全国新华书店经销

立信会计常熟市印刷联营厂・印刷

开本：850×1168(毫米) 1/32　总印张：54.125　总字数：2037000

版次：1997年12月　第1版　印次：1997年12月　第1次

印数：1—8000

ISBN7-313-01949-1/G・178　　定价(套)：60.80元

前　言

为了迎接一年一度的高考，许多教师和学生使用"题海战术"对待。不少考生出了考场发出感慨：平时做了一万道题，考试时考的却是第一万零一道题！我们认为，"题海战术"不可取。如何既能少做题，又能有足够的应试能力而在高考中取得优秀成绩？这是不少师生一直在探求的问题。为此，我们在全国范围内组织了一批具有丰富教学经验的特级、高级和知名的骨干教师，密切结合当前的教学实际和升学考试实际，对全国和上海、"三南"（湖南、云南、海南）等地历年高考试卷、试题进行了量化统计和深入的研究，找出了高考命题指导思想、规律和导向。现将研究成果荟集成册，编著成《高考命题规律研究》正式出版发行，奉献给广大教师和同学们。期望本书能成为读者跳出题海，走向成功之路，打开重点大学之门的金钥匙。

本书包括数学、物理、化学、语文和英语等五科。各科均依据国家教委颁布的最新教学大纲，并按人民教育出版社最新教材的内容编写。各科均按高考考点分章，一般分为三部分：1. 与现行教材必修课和选修课各章对应设若干章。2. 按知识块或专题设若干章。3. 高考模拟试题选若干份。每章重点专题单独设一考点（节），每章（节）分以下四项编写：Ⅰ. 命题规律：将历年高考试卷进行整理、分类、归纳和量化统计分析，揭示出本考点的命题规律、题型特点，指出本考点在高考中的地位和重要性，并对本考点今后的命题方向和可能性进行了预测。Ⅱ. 试题精析：精选本考点有代表性的典型高考试题（均注明出处）进行精析。给出通用的解题方法或解题技巧，打开思路，启迪思维，培养学生举一反三，触类旁通，运用所学知识由已知推未知的能力。Ⅲ. 应试指南：对本考点的知识进行科学系统地归纳，指出应试关键和必备知识，对本考点的重、难点进行深入浅出的剖析和点拨，分析容易出错的地方，指出应注意的问题，注意揭示本质和规律，引导

学生深入思考，注意对学生进行学法指导。Ⅳ. 应试练习：为巩固、强化所学知识，精编适量练习供读者自我检验，练习一般按现行高考要求编成试卷形式。这些练习题多选自历年高考试卷和近年各地高考模拟试卷，并注明出处，题目立意新颖，构思巧妙，具有一定的灵活性和典型性，并对今后的高考命题方向进行了预测。

本书将高考命题跟教与学密切联系，科学结合。重在给规律、教方法、传技巧，可以使读者紧紧抓住考点，突破难点，强化热点，提高学习的针对性、自觉性和有效性，取得"事半功倍"的学习效果。为方便使用，本书编排顺序与现行教学顺序对应，并注意前一章不出现后面章节知识，以保证适合非毕业班学生使用，所以本书既适用于毕业班学生作复习使用，又适用于非毕业班学生作同步辅导和练习，亦可供教师作提高素质教育的教学参考书。

本册为高中数学，与现行教材内容和顺序相对应，全书分 4 篇 13 章，书后附高考模拟试题 3 套和各章应试练习全部参考答案和简明解答。

本书由孙学昌和张自重主编，杨环、丁善勇、周广健为副主编。参加编写工作的人员有：杨环（第一、二章）、张自重（第四、七、十一章）、周宗雅（第五章）、张元柱（第五章）、刘先胜（第六章）、丁善勇（第八章）、丁锋（第八章）、王振华（第九章）、葛大圣（第十章）、叶家振（第十三章）、周广健（第三、十二章）、杨承海（第三、十二章）、王静（第十二章）、孙学昌（附录一）。全书由孙学昌统一整理、修改和定稿。

限于作者水平，加之时间紧迫，本书难免有不足及疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

主 编

目　录

第一篇　代数(上)

第一章　幂函数、指数函数、对数函数

Ⅰ．命题规律

本章内容在《考试说明》中共列出了13个知识点，这也是《教学大纲》中规定的教学内容，在最新修订的高中教材中增加了原属初中的5个知识点：

(1) $|ax+b|<c$(或$|ax+b|>c,c>0$)型不等式。

(2)一元二次不等式及其解法。

(3)分数指数幂与根式。

(4)对数，积、商、幂、方根的对数，常用对数。

(5)利用对数进行计算。

这5个知识点除(5)(选学内容)外，今后必将列入《考试说明》中。虽然它们也是现在高考的范围，但因为它们原属初中的内容，故没有列入现行的《考试说明》中。因此，我们现在仍然按原13个知识点作为本章的考试内容进行分析、研究。

一、1991～1997年高考试题(理科)量化统计

1. 知识点、分数、题数统计(见表1.1)

表1.1

年度	1991	1992	1993	1994	1992新	1993新	1994新	1995	1996	1997
考查本章知识点数	8	9	10	9	10	9	9	8	8	7
试题中本章知识点所占比例(%)	9.6	10.7	11.4	9.9	11.8	10.1	10	8.8	8.8	8.2
试题中本章分数所占比例(%)	15.8	16.6	15	13.3	13.3	15.3	16	13.3	18.6	19.2
涉及本章知识的题数	6	8	9	5	5	7	7	6	8	5

2. 知识点考查频率(见表2.2)

表 2.2

知识点	集合	子集 交集 并集 补集	映射	函数(记号 定义域 值域)	幂函数	函数的单调性	函数的奇偶性	反函数
考查频率	0.106	0.081		0.267	0.027	0.081	0.06	0.054

知识点	互为反函数的函数图像间的关系	指数函数	对数函数	换底公式	简单指数方程和对数方程
考查频率	0.034	0.081	0.141	0.034	0.034

二、规律分析

从上面两个统计表中可以看出：

(1)每年的试题对本章的知识点的考查数目基本上是稳定的，约在 9 个左右，约占本章知识点的 70%，与目前试题对《考试说明》所列知识点的覆盖率 70%。恰好是一致的。

(2)对于本章的 13 个知识点，考查频率最高的是函数(包括函数的概念、记号、定义域、值域(最值))，其次是对数函数、集合、子集、交集、并集、补集，函数的单调性，指数函数，函数的奇偶性和反函数，它们也正是本章内容中的重点。因此，在以后的命题中，这几个知识点仍将是考查的重点，当然，这并不意味着对其他内容不进行考查，对其余的几个知识点我们还是要按照《教学大纲》和《考试说明》的要求去进行复习。映射的概念，这些年全国试题一直没有涉及，只有 1989 年的广东试题中有一道选择题，而且《教学大纲》和《考试说明》的要求也比较低，但它和集合一样，是近代数学中的一个重要的概念，我们要适当地给予注意。

(3)本章内容在每年的试题中所占的分数比例约为 15%，在目前的高考命题中，各部分(代数、三角、立几、解几)的分数比例与教学时数比例基本上一致，本章的教学时数约占整个教学时数的 15%，因此，本章的内容在试题中的分数比例维持在 15%左右是适当的。另外，由于本章的地位明显高于代数中的不少章节，因此，在以后的命题中，可能会出现本章的分数比例高于 15%的情况。1996 年的试题中，本章的分数就达到了 18%的比例。现行高中教材本章增加了 5 个知识点，同时，本章又是初等数学与高等数学的衔接部分，因此，本章的地位就更加重要。

(4)每年的试题中，涉及本章知识的题数在 6 个左右，而知识点数约为 9 个，加上重复的知识点，因此，在以考查本章知识为主的试题里，有关本章的知识点一般都在二个以上，如 1996 年(25)题，若把重复的算在内，共考查了本章的 7 个知识点。

在每年的试题中，有关本章知识的有容易题，有中等题，也经常出现难题。如1996 年全国(25)题、1995 年全国(25)题、1994 年上海(25)题、1993 年全国(29)题等，这些题通常是考查函数与不等式、数列、方程、复数、解析几何等知识综合运用的能力，有的试题，还经常以考查数学思想方法为目的。本章几乎涉及到中学教学里所有的思想方法，如数、形结合思想，函数与方程的思想，分类讨论的思想，化归思想等。近年还出现了加强对数学语言和实际应用能力考查的趋向，如1994 年全国(20)题，1996 年全国(23)题，1995 年全国(24)题等，对此应给予足够重视。

Ⅱ. 试题解析

例 1.1 (1995 全国)已知 I 为全集，集合 $M,N\subset I$，若 $M\cap N=N$，则……………………………………………………………………………… (C)

(A)$\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　(B)$M\subseteq\overline{N}$

(C)$\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　(D)$M\supseteq\overline{N}$

解析　$\because M\cap N=N$，而 $M\cap N\subseteq M$

$\therefore N\subseteq M$　$\therefore \overline{N}\supseteq\overline{M}$ 故选(C)。

或根据题意作文氏图(图 1.1)，从图中可以看出 $\overline{M}\subseteq\overline{N}$。

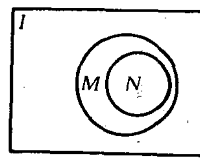


图 1.1

评注　有关集合之间关系(子集、交集、并集、补集)的问题，一方面要能正确理解、运用有关概念和性质，另一方面要能适当地运用文氏图和数轴、坐标系，很多结论可以从图形中直观地看出来。

例 1.2 (1996 全国)已知全集 $I=N$，集合 $A=\{x\,|\,x=2n,n\in N\}$，$B=\{x\,|\,x=4n,n\in N\}$，则 ……………………………………………………………… (C)

(A)$I=A\cup B$　　(B)$I=\overline{A}\cup B$　　(C)$I=A\cup\overline{B}$　　(D)$I=\overline{A}\cup\overline{B}$

解析　本题如上所述可以根据有关性质来解答，显然有 $B\subset A$，那么 $I=B\cup\overline{B}=A\cup\overline{B}$。故选(C)。也可以从文氏图中得到结论。

例 1.3　(1990 全国)设全集 $I=\{(x,y)\,|\,x,y\in R\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$N=\{(x,y)\,|\,y\neq x+1\}$，那么 $\overline{M\cup N}$(或 $\overline{M}\cap\overline{N}$)等于……………………………………………………………………………… (　)

(A)$\varnothing$　　(B)$\{(2,3)\}$　　(C)$(2,3)$　　(D)$\{(x,y)\,|\,y=x+1\}$

解析　$M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=\{(x,y)\,|\,y=x+1,x\neq 2\}\right.$即 M 为直角坐标系中

直线 $y=x+1$ 上除点(2,3)外的所有点的集合，而 N 为直角坐标系中直线 $y=x+1$ 外所有点的集合，所以 $M\cup N=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R$ 除去$(2,3)\}$，因此 $\overline{M\cup N}=\{(2,3)\}$，即选(B)。

评注　不能选(C)，因为集合与集合的运算结果应是集合。

例 1.4　(1989 广东)设 A 是直角坐标平面上所有点组成的集合，如果由 A 到 A 的映射，使像集合的元素 $(y-1,x+2)$ 和原像集合的元素 (x,y) 对应，那么像点 $(3,-4)$ 的原像点是……………………………………………………………（D）

(A)$(-5,5)$　(B)$(4,-6)$　(C)$(2,-2)$　(D)$(-6,4)$

解析　这里的映射是 $f:(x,y)\to(y-1,x+2)$，欲求 $(3,-4)$ 的原像 (x,y)，可令 $y-1=3,x+2=-4$，由此可得 $x=-6,y=4$，即所求原像是点 $(-6,4)$，选(D)。

评注　集合和映射是现代数学的两个基本概念，要能用集合与映射的观点进一步理解函数的概念，要了解映射的概念以及像、原像的概念。

例 1.5　(1989 全国)与函数 $y=x$ 有相同图像的一个函数是 ………（D）

(A)$y=\sqrt{x^2}$　　(B)$y=\dfrac{x^2}{x}$

(C)$y=a^{\log_a x}$ 其中 $a>0,a\neq1$　　(D)$y=\log_a a^x$，其中 $a>0,a\neq1$

解析　与函数 $y=x$ 有相同图像即与 $y=x$ 是同一函数，依次考察各个函数：$y=\sqrt{x^2}$ 的值域为 $y\geqslant0$，与 $y=x$ 的值域 R 不同，排除(A)；$y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $x\neq0$ 与 $y=x$ 的定义域 R 不同，排除(B)；$y=a^{\log_a x}$ 的定义域为 $x>0$；与 $y=x$ 的定义域不同，排除(C)，故选(D)。事实上，$y=\log_a a^x$ 的定义域和值域都是 R，又 $y=\log_a a^x=x$。所以它与 $y=x$ 为同一函数。

评注　根据函数定义，两函数为同一函数则它们的定义域、值域、对应法则都相同，反之，亦然；如果两函数的定义域、值域和对应法则 3 个要素中有一个不同，则必为不同函数。

例 1.6　(1985 广东)如果 $f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x}{1-x^2}$，则 $f(x)=$________。

解析　因为 $f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x}{1-x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}$，所以 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$。又因为 $\dfrac{1}{x}\neq0$，所以 $f(x)$ 定义域是 $x\neq0$。即 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}(x\neq0)$。也可先令 $\dfrac{1}{x}=t$，则

应考虑t的定义域

$x=\frac{1}{t}(t\neq0)$，所以 $f(t)=\dfrac{\frac{1}{t}}{1-(\frac{1}{t})^2}=\frac{t}{t^2-1}(t\neq0)$。$f(x)=\frac{x}{x^2-1}(x\neq0)$。

评注　解这类问题常用的两种方法即配凑法和换元法，这里需要对函数的记号能正确理解。

例 1.7　(1990 上海)函数 $y=\frac{\sqrt{x+4}}{x+2}$ 的定义域是________。

解析　解不等式组 $\begin{cases}x+4\geqslant0\\x+2\neq0\end{cases}$ 得 $x\geqslant-4$ 且 $x\neq-2$。所以函数定义域是 $[-4,-2)\cup(-2,+\infty)$。

评注　求函数定义域即求自变量的取值范围，对解析式表示的函数，只要使解析式有意义，通常是通过解不等式(组)来得到定义域。

例 1.8　(1985 全国)设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求 $f(x^2)$ 的定义域。

解析　因为 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，所以在 $f(x)$ 中 $0\leqslant x\leqslant1$，

所以在 $f(x^2)$ 中必须 $0\leqslant x^2\leqslant1$，$f(x^2)$ 才有意义，由 $0\leqslant x^2\leqslant1$ 得 $-1\leqslant x\leqslant1$，

因此 $f(x^2)$ 的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant1$ 即 $[-1,1]$。

评注　已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域，可由 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 求得。

例 1.9　(1989 广东)函数 $y=\sqrt{x^2-49}$ 的值域是________。利用双曲线

解析　$y=\sqrt{x^2-49}$ 的定义域是 $x\geqslant7$ 或 $x\leqslant-7$。对定义域内的 x，x^2-49 为任意非负数，$\sqrt{x^2-49}$ 也是任意非负数，所以，函数的值域是 $\{y|y\geqslant0\}$。

评注　对有些函数，可以根据定义域和对应法则(解析式)观察、分析得出其值域。

例 1.10　(1987 广东)函数 $y=\frac{2x}{1+x^2}(x\in R)$ 的值域是________。

解析　解法一：函数定义域是 R。(1)当 $x=0$ 时 $y=0$。所以 0 是函数值；(2)当 $y\neq0$ 时，由 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 得 $yx^2-2x+y=0$，因为 x 为任意实数，所以 $\Delta=(-2)^2-4y^2\geqslant0$，由此得 $y^2\leqslant1$，$-1\leqslant y\leqslant1(y\neq0)$。综合(1)(2)可知函数值域是 $[-1,1]$。

解法二：(1)当 $x\neq0$ 时，$y=\frac{2x}{1+x^2}=\dfrac{2}{\frac{1}{x}+x}$。因为 $x+\frac{1}{x}\geqslant2(x>0)$ 或 $x+\frac{1}{x}\leqslant-2(x<0)$。所以 $0<\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}<0$，所以 $0<y\leqslant1$ 或 -1

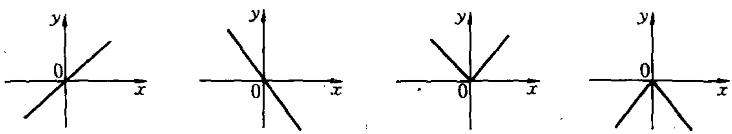
$\leqslant y<0$。(2)当 $x=0$ 时，$y=0$。综合(1)(2)可得函数值域是$[-1,1]$。

评注　(1)对形如 $y=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}(x\in R)$的函数可运用判别式求值域，这是方程思想的运用。

(2)如果和(或积)是定值的情形，可运用不等式求值域，但要注意：①应符合不等式成立的条件；②能否取等号。

例 1.11　(1985 全国副题)函数 $y=-\sqrt{x^2}$ 的图像是 ……………… (D)

解析　因为 $y=-\sqrt{x^2}=-|x|=\begin{cases}-x & (x\geqslant 0)\\ x & (x<0)\end{cases}$ 所以函数图像为(D)，或这样分析：因为 $y=-\sqrt{x^2}\leqslant 0$。所以函数值均为非正数，即函数图像全部在 x 轴下方，故选(D)。

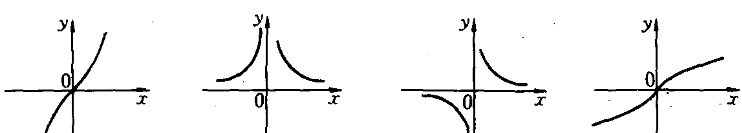


(A)　(B)　(C)　(D)

图 1.2

评注　函数 $y=f(x)(x\in A)$的图像即直角坐标系内的点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in A\}$。即函数图像上的点 $M(a,b)$的横坐标 a 是自变量取的值，纵坐标 b 为相应的函数值即 $b=f(a)$，反之，若点(a,b)满足 $b=f(a)$，则(a,b)在 $y=f(x)$ 的图像上。

例 1.12　(1992 全国)下列函数图像中表示函数 $y=x^{-\frac{1}{3}}$的是 ……… (C)



(A)　(B)　(C)　(D)

图 1.3

解析　函数 $y=x^{-\frac{1}{3}}$的定义域是 $x\neq 0$，所以可以排除(A)，(D)，又 $y=x^{-\frac{1}{3}}$ 为奇函数，所以图像关于原点对称，故选(C)。

评注　作幂函数 $y=x^n$ 图像(简图)的一般方法是：(1)确定函数的定义域；(2)判断函数的奇偶性；(3)根据 n 的大小作出函数在第一象限的简图；(4)根据奇偶性，定义域作出函数在其他部分的简图。

例 1.13　(1993 全国)$F(x)=(1+\dfrac{2}{2^x-1})f(x)(x\neq 0)$是偶函数，且 $f(x)$不

恒等于零，则 $f(x)$ …………………………………………………………（ ）

(A)是奇函数　　(B)是偶函数

(C)可能是奇函数也可能是偶函数　　(D)不是奇函数，也不是偶函数

解析 因为 $F(x)$ 是偶函数，所以 $F(-x)=F(x)$。又 $f(x)=\dfrac{F(x)}{1+\dfrac{2}{2^x-1}}=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}F(x)$，所以 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}F(-x)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}F(x)=-\dfrac{2^x-1}{2^x+1}F(x)=-f(x)$，又因为 $f(x)$ 不恒等于零，所以 $f(x)$ 是奇函数，故选(A)。

评注　在判断函数奇偶性时，(1)首先要看其定义域是否关于原点对称，否则，它既不是奇函数，也不是偶函数；(2)对 $f(-x)$ 要进行恒等变形，使之能看出与 $f(x)$ 的关系（等于 $f(x)$ 或等于 $-f(x)$ 或都相等或都不等）。

例 1.14　(1988 广东)设 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$，那么当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=$ ……………………（ ）

(A)$-x(1+\sqrt[3]{x})$　　(B)$x(1+\sqrt[3]{x})$

(C)$-x(1-\sqrt[3]{x})$　　(D)$x(1-\sqrt[3]{x})$

解析　若 $x\in(-\infty,0)$，则 $-x\in(0,+\infty)$，所以此时 $f(-x)=-x(1+\sqrt[3]{-x})=-x(1-\sqrt[3]{x})$，而 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$ 故当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $f(x)=-f(-x)=x(1-\sqrt[3]{x})$，选(D)。

例 1.15　(1987 全国)在区间 $(-\infty,0)$ 上为增函数的是………………（ ）

(A)$y=-\log_{1/2}(-x)$　　(B)$y=\dfrac{x}{1-x}$

(C)$y=-(x+1)^2$　　(D)$y=1+x^2$

解析　随着 x 的增大（减小），$-x$ 减小（增大）从而使 $\log_{1/2}(-x)$ 增大（减小），即使 $y=-\log_{1/2}(-x)$ 减小，所以 $y=-\log_{1/2}(-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，排除(A)。

$y=\dfrac{x}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x}$　因为 $x\in(-\infty,0)$，所以 $1-x>0$。又因为 $1-x$ 是减函数，所以在 $(-\infty,0)$ 上，$\dfrac{1}{1-x}$ 是增函数，故 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，选(B)。

$y=-(x+1)^2$ 和 $y=1+x^2$ 都是二次函数，易知它们在 $(-\infty,0)$ 上都是减函数。

评注　函数的单调性的讨论，通常的方法有(1)根据单调性的定义；(2)根据一些已知函数的单调性讨论复合函数的单调性，即像上述的(A)和(B)两个函数

的讨论；(3)根据函数的图像得出单调性。对上面的几个函数，我们可以先作出图像，然后从图像中看出在$(-\infty,0)$上是增函数的函数是哪一个。

例 1.16 （1991“三南”地区）已知函数$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数。

解析 根据增函数的定义来进行分析，设x_1,x_2为任意实数，且$x_1<x_2$，欲证函数为增函数，只要证明$f(x_1)<f(x_2)$。为此进行差比较，$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}-\dfrac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}=\dfrac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1})(2^{x_2}+1)}$。因为$2^x$是增函数，所以$2^{x_1}<2^{x_2}$。又$2^{x_1}>0$，$2^{x_2}>0$，因此$\dfrac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}<0$，即$f(x_1)-f(x_2)<0$，$f(x_1)<f(x_2)$。故函数是增函数可以得到论证。

评注 根据单调性（增减性）的定义讨论函数的单调性（增减性），思路是明显的，其中的关键是比较$f(x_1)$和$f(x_2)$的大小，通常是差比较。(还有商比较)

例 1.17 （1991 全国）如果奇函数$f(x)$在区间$[3,7]$上是增函数且最小值为5，那么$f(x)$在$[-7,-3]$上是 ………………………………………… (B)

(A)增函数且最小值为-5　　(B)增函数且最大值为-5

(C)减函数且最小值为-5　　(D)减函数且最大值为-5

解析 因为$f(x)$是奇函数，所以在关于原点对称的两个区间上$f(x)$的单调性相同。因为$f(x)$在$[3,7]$上是增函数，所以$f(x)$在$[-7,-3]$上也是增函数。因为$f(3)=5$，所以$f(-3)=-f(3)=-5$是$f(x)$在$[-7,-3]$上的最大值，选(B)。

评注 (1)可以根据单调性的定义证明：奇函数在关于原点对称的两个区间上有相同的单调性；偶函数在关于原点对称的两个区间上单调性相反。对此，根据增减函数的图像特征及奇函数的图像特征也可以直观地从图像中看出来（图1.4和图1.5）。

(2)若函数$f(x)$在闭区间上是增函数（减函数），则$f(x)$在$[a,b]$上的值域为$[f(a),f(b)]$（$[f(b),f(a)]$）。

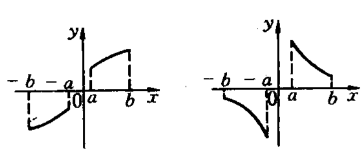


图 1.4

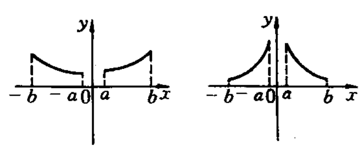


图 1.5

$y\geq 1$

例 1.18 （1988 广东）函数$y=\sqrt{x-2}+1(x\geq 2)$的反函数是$y=$(　　)

(看清原函数之值域)

(A)$2-(x-1)^2\quad(x\geqslant2)$　　(B)$2+(x-1)^2(x\geqslant2)$

(C)$2-(x-1)^2\quad(x\geqslant1)$　　(D)$2+(x-1)^2(x\geqslant1)$

解析　由 $y=\sqrt{x-2}+1$ 得 $(y-1)^2=x-2$，$x=2+(y-1)^2$。所以反函数的解析式是 $y=2+(x-1)^2$，又因为原函数的定义域是 $x\geqslant2$，所以原函数的值域是 $y\geqslant1$，所以反函数的定义域是 $x\geqslant1$，故所求反函数是 $y=2+(x-1)^2(x\geqslant1)$，选(D)。

评注　求函数 $y=f(x)$ 的反函数时，在求得反函数的解析式 $y=f^{-1}(x)$ 后，不能立即就下结论，还必须再求出原函数的值域 C，并以 C 作为反函数的定义域。

例 1.19　(1994 全国)设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant0)$ 则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是 ……………………………………………………………………（　）

解析　可以先求出 $y=f(x)=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant0)$ 的反函数，$y=f^{-1}(x)=-\sqrt{1-(1-x)^2}(0\leqslant x\leqslant1)$，然后再讨论其图像：由 $y=-\sqrt{1-(1-x)^2}$ 可得 $(x-1)^2+y^2=1$，所以 $y=f^{-1}(x)$ 的图像为圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上 $0\leqslant x\leqslant1$，$-1\leqslant y\leqslant0$ 的一段，故选(B)。也可以先作出 $y=f(x)$ 的图像，然后根据互为反函数的函数图像间的关系(关于直线 $y=x$ 对称)得到 $y=f^{-1}(x)$ 的图像。

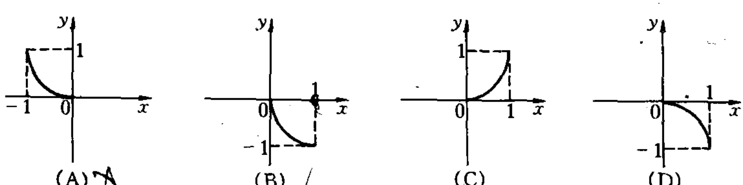


图 1.6

评注　互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称。反之，如果两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称，那么，这两个函数互为反函数。证明互为反函数的函数图像关于直线 $y=x$ 对称的方法也是我们证明两个图形关于某条直线(或某点)对称时常用的方法，同时，这里还有一个常用的结论：点 (a,b) 关于直线 $y=x$ 的对称点是 (b,a)。

例 1.20　(1990 广东)如果直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=3x-b$ 关于 $y=x$ 对称，那么……………………………………………………………………（　）

(A)$a=\frac{1}{3},b=6$　　(B)$a=\frac{1}{3},b=-6$

(C)$a=3,b=-2$　　(D)$a=3,b=6$

解析 显然，$y=ax+2$ 与 $y=3x-b$ 互为反函数，求出 $y=3x-b$ 的反函数：因为 $y=3x-b$，所以 $x=\frac{x-b}{3}$，所以 $y=3x-b$ 的反函数是 $y=\frac{1}{3}x+\frac{b}{3}$，由 $y=ax+2$ 与 $y=\frac{1}{3}x+\frac{b}{3}$ 是同一函数可得 $a=\frac{1}{3}$，$b=6$，故选(A)。

例 1.21 (1983 全国副题)已知 $y=f(x)$ 在它的定义域内是增函数。

(1)证明 $y=f^{-1}(x)$ 在其定义域内也是增函数。

(2)若 $f(x)=f^{-1}(x)$，证明 $f(x)\equiv x$。

解析 (1)设 $y=f(x)$ 的定义域是 A，值域是 C，则 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是 C，值域是 A。

在 C 内任取 $x_1, x_2, x_1<x_2$，记 $y_1=f^{-1}(x_1)$，$y_2=f^{-1}(x_2)$，则 $y_1\in A$，$y_2\in A$ 且 $x_1=f(y_1)$，$x_2=f(y_2)$。因为 $y=f(x)$ 在 A 上是增函数，所以由 $x_1<x_2$ 即 $f(y_1)<f(y_2)$，可得 $y_1<y_2$，即 $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$，因此 $y=f^{-1}(x)$ 在 C 内是增函数。

(2)因为 $f(x)=f^{-1}(x)$，在 $y=f(x)$ 的定义域内任取一点 $x=a$，设 $f(x)=b$，则 $a=f^{-1}(b)=f(b)$，若 $f(x)>a$ 则 $b>a$，由于 $f(x)$ 是增函数，所以 $f(a)<f(b)$，即有 $b<a$，与 $b>a$ 矛盾，所以 $f(a)$ 不能大于 a。

若 $f(a)<a$ 则 $b<a$，由于 $f(x)$ 是增函数，所以 $f(a)>f(b)$ 即 $b>a$，与 $b<a$ 矛盾，所以 $f(a)$ 不能小于 a。

因此 $f(a)\equiv a$，由于 a 是函数定义域内任意一点，所以 $f(x)\equiv x$.

评注 在(1)的证明中运用了函数增减性的定义以及函数、反函数的概念。(2)中还运用了反证法。

例 1.22 (1996 全国)当 $a>1$ 时，在同一坐标系中，函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图像是 …………………………………………………… ( )

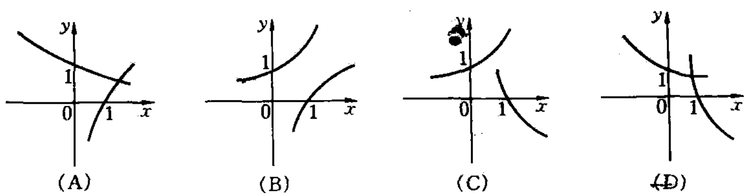


图 1.7

解析 $y=a^{-x}=(\frac{1}{a})^x$，因为 $a>1$，所以 $0<\frac{1}{a}<1$. 所以 $y=a^{-x}$ 的图像下降，又 $y=\log_a x$ 的图像上升，故选(A)。

评注 要熟悉指数，对数函数的图像特征。