

漢 譯
溫氏高中三角法

顧 裕 魁 譯
壽 孝 天 駱 師 曾 校

商 務 印 書 館 發 行

民國二十一年一月二十九日
 敝公司突遭國難總務處印刷
 所編譯所書棧房均被炸燬附
 設之涵芬樓東方圖書館尚公
 小學亦遭殃及盡付焚如三十
 五載之經營墮於一旦迭蒙
 各界慰問督望速圖恢復詞意
 懇摯銜感何窮敝館雖處境艱
 困不敢不勉為其難因將學校
 需用各書先行覆印其他各書
 亦將次第出版惟是圖版裝製
 不能盡如原式事勢所限想荷
 鑒原謹布下忱統祈垂鑒

上海商務印書館謹啓

版 權 所 有 翻 印 必 究

辛亥年十一月初版
 民國二十一年國難後第一版
 六月印行
 民國二十二年國難後第十三版
 七月印行

(三〇六七)

漢譯 溫氏高中三角法

PLANE AND SPHERICAL TRIGONOMETRY

每冊定價大洋玖角

外埠酌加運費匯費

WENTWORTH

原著者 顧 裕 魁

譯述者 壽 孝 天

校訂者 駱 師 曾

發行所 上海河南路商務印書館
 上海及各埠商務印書館

溫 德 華 士 三 角 法

序 言

美人溫德華士氏。(Wentworth) 近世算學大家也。其所著算學各書。爲我國各學校所採用者。已不止一種。蓋以溫氏之書。說理則明晰。選材則詳備。教者易於教。學者易於學。以視他種教科書。實有比較的優點也。惟原書概爲英文。在已通英文者。不難就原書而研求。在未通英文者。同抱此研求之志。而爲文字所阻。致不得一窺美備之著作。亦爲憾事。三角一法。在算學中。程度已高。學校中習是法者。大都爲中學以上已通英文之生徒。故各學校用溫氏書。多直接用原書講授。似無藉乎譯本。雖然。學堂之高等生。無慮不能讀溫氏書。而喜讀溫氏書者。必不以學校高等生爲限。爲普及計。則譯本之不可少者一。各種術語。中西本難強同。但誦習西書。知彼而不知此。於應用必多窒礙。爲貫通計。則譯本之不可少者二。夫學術之爲物。傳播愈多其途。則昌明愈趨於速。本館前於溫氏之書。如代數學。如幾何學。已先後譯成漢文。豈好爲駢枝哉。誠欲使不能讀原書者。有捷徑以探其奧。已曾讀原書者。可對照而會其通云爾。今此三角法之譯。亦猶前志也。印既成用述其原意如此。

目次

平 面 部

第壹編 銳角之三角函數

章 數		頁 數
1.	角之測法	1
2.	三角函數	4
3.	直線表示之函數式	9
4.	函數隨其角而變換	12
5.	餘角之函數	13
6.	一角之函數之關係	15
7.	公式之應用	18
8.	45° 之函數	21
9.	30° 及 60° 之函數	21

第貳編 直 角 三 角 形

10.	已知部分	24
11.	不用對數之解法	24
12.	解直角三角形之通法	27
13.	對數解法	29
14.	直角三角形之面積	33
15.	等腰三角形	38
16.	正多角形	41

第 叁 編 測 角 法

17.	測角法之定義	...	...	...	...	...	44
18.	正量及負量	...	...	...	...	...	44
19.	平面內一點之坐標	...	...	...	...	...	45
20.	任意角	...	...	...	...	...	47
21.	任意角之函數	...	...	...	...	...	48
22.	變角之函數	...	...	...	...	...	51
23.	大於 360° 之角之函數	...	...	...	...	...	53
24.	公式之擴張	...	...	...	...	...	53
25.	第一象限內函數之導出	...	...	...	...	...	56
26.	相較為 90° 之兩角之函數	...	...	...	...	...	59
27.	負角之函數	...	...	...	...	...	60
28.	兩角和之函數	...	...	...	...	...	63
29.	兩角較之函數	...	...	...	...	...	65
30.	二倍角之函數	...	...	...	...	...	68
31.	半角之函數	...	...	...	...	...	68
32.	函數之和及較	...	...	...	...	...	69
33.	逆三角函數	...	...	...	...	...	72

第肆編 斜角三角形

34.	正弦之定律	...	...	...	...	...	75
35.	餘弦之定律	...	...	...	...	...	77
36.	正切之定律	...	...	...	...	...	78
37.	已知部分	...	...	...	...	...	80
38.	斜角三角形之解法 (例 I)	...	...	...	...	...	80
39.	續前 (例 II)	...	...	...	...	...	83
40.	續前 (例 III)	...	...	...	...	...	88
41.	續前 (例 IV)	...	...	...	...	...	92
42.	三角形之面積	...	...	...	...	...	97

第伍編 雜題

平面三角問題	...	...	...	...	102
直角三角形	...	...	...	...	103
斜角三角形	...	...	...	...	105
面積	...	...	...	...	111
平面航海術	...	...	...	...	114
平行及中緯線航海術	...	...	...	...	115
週游航海術	...	...	...	...	119
測角法內之問題	...	...	...	...	120
簡單方程式之解法	...	...	...	...	126
方程式之一切解法	...	...	...	...	131

目次

v

58.	例 II	...	...	...	...	...	...	193
59.	例 III	...	...	...	...	...	...	195
60.	例 IV	...	...	...	...	...	...	198
61.	例 V	...	...	...	...	...	...	199
62.	例 VI	...	...	...	...	...	...	202
63.	球面三角形之面積	...	...	...	...	...	...	204

第玖編 球面三角法之應用

64.	問題	...	...	...	...	...	...	210
65.	問題	...	...	...	...	...	...	212
66.	天球	...	...	...	...	...	...	213
67.	球面坐標	...	...	...	...	...	...	216
68.	天文三角形	...	...	...	...	...	...	219
69.	問題	...	...	...	...	...	...	221
70.	問題	...	...	...	...	...	...	222
71.	問題	...	...	...	...	...	...	223
72.	問題	...	...	...	...	...	...	225
73.	問題	...	...	...	...	...	...	226

公式彙錄

答數

溫德華士三角法

平面部

第壹編

銳角之三角函數

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

OF

ACUTE ANGLES

第一章

角之測法

ANGULAR MEASURE

測量長度時。恆用呎, 呎等爲單位。故測量角度時。亦有種種單位。

常度或六十分法 (common or sexagesimal system) 分圓周爲 360 等份。以每等份所對之圓心角爲單位角。而名之爲度 (degree)。每度再分爲六十分 (minute)。每分再分爲六十秒 (second)。度分與秒。各以記號表之。如 6 度 5 分 7 秒。書作 $6^{\circ} 5' 7''$ 。

〔注意〕 六十分法者。古代巴比倫天文家用以定 360 日爲一年者也。

真弧度法 (circular system) 於圓周上截一與半徑等長之弧。而取其所對之圓心角。定為角之單位名之曰**本位弧** (radian),

360° 內本位弧之數。等於圓周內所含半徑長之倍數。此數不關圓之大小。皆為 2π 。(即 2×3.1416)。已於幾何學內證明。故本位弧在任何圓內。恆為同度之角。

圓周為其半徑之 2π 倍。

於是 2π 本位弧 = 360°

而 π 本位弧 = 180°

故 1 本位弧 = $\frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$

而 1 度 = $\frac{\pi}{180}$ 本位弧 = 0.017453 本位弧。

由最後之二方程式。乃有由本位弧求度。或由度求本位弧兩種之變換。

如 2 本位弧 = $2 \times \frac{180^\circ}{\pi} = 2 \times (57^\circ 17' 45'') = 114^\circ 35' 30''$

〔注意〕 真弧度法。始用於十八世紀之初。此法於高等數學內。最為便利。蓋其本位弧。僅以真數表之。如 $\angle \pi$ 。意謂本角為 π 本位弧。又 $\angle 3$ 為 3 本位弧。

十八世紀之末。度量衡悉改呎制。其時有人提議。分直角為 100 等份。定為單位。而名之為度 (grade)。每度又分為 100 分。每分為 100 秒。是之謂百分法 (centesimal system)。然此法於實際上。未聞有用之者。

例題 I.

〔設 $\pi = 3.1416$ 〕

1. 化下列諸角爲眞弧度。而以 π 之分數式。表示其結果。

$60^\circ, 45^\circ, 150^\circ, 195^\circ, 11^\circ 15', 123^\circ 45', 37^\circ 30'.$

2. 於 $\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{11}{16}\pi, \frac{7}{15}\pi$, 本位弧內。各有若干度。

3. 改 1° 爲本位弧。其小數部分若干。又 $1'$ 若何。

4. 一個本位弧內有若干秒。

5. 試以本位弧表示八角形及十二角形之一內角。

6. 於 50 呎半徑之圓周上。截取 10 呎之弧。問此弧所對之圓心角若干度。

7. 地球赤道半徑約 3963 哩。設於赤道上有相距 1000 哩之兩點。問經度之差。

8. 設赤道上兩點之經度差爲 1° 。問兩點間相距若干哩。

9. 設 1° 之圓心角所乘之弧爲 1 呎。求圓半徑。

10. 由地球之旋轉。而移赤道上一點。於其周上經過與地球半徑相等之距離。問須幾小時。

11. 設時鐘分針之長爲 $3\frac{1}{2}$ 呎。問其極端於 15 分鐘內所行之長。

(令 $\pi = \frac{22}{7}$ 。下題仿此)。

12. 一輪每秒鐘旋轉 15 次。問旋過 4 本位弧。須時幾何。

第二章

三角函數

THE TRIGONOMETRIC FUNCTION

平面三角形邊角相關之理。即以已知之任何三項。可以決定三角形之形狀及大小。惟已知三項中。至少必有一項為邊。

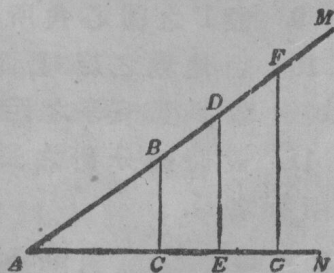
幾何學者。由已知之三項。表示其如何構造 (construct) 此三角形也。

三角法 (trigonometry) 者。由已知部分之真數值。而表示其如何計算 (compute) 此三角形之未知部分也。

幾何學以普通法示三角形之邊角互相依屬。三角法。始則於直角三角形 (right triangle) 內。示此依屬之真相。於是乃用各邊之比 (ratios of the sides)。以計算之。

設 MAN (1 圖) 為銳角。自一邊上之任何點 B, D, F 。至又一邊作 BC, DE, FG 諸垂綫。則 ACB, AED, AGF 直角三角形。有 A 角為公共。故互為等角而相似。於是其各組相當邊之比相等。即

1 圖



$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF}; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{DE} = \frac{AG}{FG}; \quad \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF}.$$

故此諸比。於 A 之值不變時。其值恆不變。

所以於銳角 A 之任何值。必有某數可以顯明所有公用銳角 A 之直角三角形內各邊互比之各值。

茲共有六個不同之比。

- I. 對邊與斜邊之比。謂之 A 之正弦 (Sine)。書作 $\sin A$.
- II. 鄰邊與斜邊之比。謂之 A 之餘弦 (Cosine)。書作 $\cos A$.
- III. 對邊與鄰邊之比。謂之 A 之正切 (Tangent)。書作 $\tan A$.
- IV. 鄰邊與對邊之比。謂之 A 之餘切 (Cotangent)。書作 $\cot A$.
- V. 斜邊與鄰邊之比。謂之 A 之正割 (Secant)。書作 $\sec A$.
- VI. 斜邊與對邊之比。謂之 A 之餘割 (Cosecant)。書作 $\csc A$.

此六個比。謂之 A 角之三角函數。

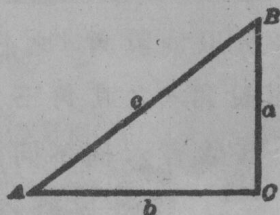
此外尚有兩個函數。亦僅依屬於 A 角者。恆與上六個相并而為八個。

- VII. A 之正矢 (Versed sine)。為 $1 - \cos A$ 。書作 $\text{vers } A$.
- VIII. A 之餘矢 (Coversed sine)。為 $1 - \sin A$ 。書作 $\text{covers } A$.

2 圖

於 ABC 直角三角形內 (2 圖)。

以 a, b, c , 表示銳角 A, B , 及直角 C 各對邊之長而所表者為同類單位。則



$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$$

$$\text{vers } A = 1 - \frac{b}{c} = \frac{c-b}{c}, \quad \text{covers } A = 1 - \frac{a}{c} = \frac{c-a}{c},$$

例題 II.

1. ABC 三角形 (2 圖) 內。餘一銳角 B 之各函數為何。
2. 試比較 A 及 B 之各函數。而示其

$$\sin A = \cos B$$

$$\sec A = \csc B$$

$$\cos A = \sin B$$

$$\csc A = \sec B$$

$$\tan A = \cot B$$

$$\text{vers } A = \text{covers } B$$

$$\cot A = \tan B$$

$$\text{covers } A = \text{vers } B$$

3. 設 a, b, c , 有下之各值, 試求 A 之各函數值。

(i) 3, 4, 5.

(iii) 8, 15, 17.

(v) 3.9, 8, 8.9

(ii) 5, 12, 13.

(iv) 9, 40, 41.

(vi) 1.19, 1.20, 1.69

4. 欲 a, b, c (2圖) 三綫。爲直角三角形之三邊。則各綫必長若干而後可。又問3題內各數。是否即所需之長。

5. 設 a, b, c , 有下之各值。試求 A 之各函數值。

(i) $2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2,$ (iii) $pqr, qrs, rsp,$

(ii) $\frac{2xy}{x-y}, x+y, \frac{x^2+y^2}{x-y},$ (iv) $\frac{mn}{pq}, \frac{mv}{sq}, \frac{nr}{ps}.$

6. 求證前題 (i) 及 (ii) 內 a, b, c 之值。爲合於直角三角形之三邊。

7. 欲令5題 (iii) 及 (iv) 內 a, b, c 之各值。爲直角三角形之各邊。問當立何種方程式。

已知 $a^2 + b^2 = c^2$, 求下列六題中 A 及 B 之函數。

8. $a=24, b=143.$

11. $a=\sqrt{p^2+q^2}, b=\sqrt{2pq}.$

9. $a=0.264, c=0.265.$

12. $a=\sqrt{p^2+pq}, c=p+q.$

10. $b=9.5, c=19.3$

13. $b=2\sqrt{pq}, c=p+q.$

已知 $a^2 + b^2 = c^2$, 求下列四題中 A 之函數。

14. $a=2b.$

16. $a+b=\frac{5}{4}c.$

15. $a=\frac{3}{4}c.$

17. $a-b=\frac{1}{4}c.$

18. 設 $\sin A = \frac{3}{5}$. 而 $c=20.5$, 求 a .

19. 設 $\cos A = 0.44$, 而 $c=3.5$, 求 b .

20. 設 $\tan A = \frac{1}{3}$. 而 $b=2\frac{5}{11}$, 求 a .

21. 設 $\cot A = 4$, 而 $a=17$, 求 b .

22. 設 $\sec A = 2$, 而 $b = 20$, 求 c .

23. 設 $\csc A = 6.45$, 而 $a = 35.6$, 求 c .

有下列已知各件。求作一直角三角形。

24. $c = 6$, $\tan A = \frac{3}{2}$.

26. $b = 2$, $\sin A = 0.6$.

25. $a = 3.5$, $\cos A = \frac{1}{2}$.

27. $b = 4$, $\csc A = 4$.

28. 於直角三角形內 $c = 2.5$ 哩, $\sin A = 0.6$, $\cos A = 0.8$, 求餘二邊。

29. 以分角器作 20° , 40° , 及 70° 之三角。由測其必需之綫。以決定其函數。并以所得值。與下表中所列較近各值比較之。

	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$	$\sec$	$\csc$
20°	0.342	0.940	0.364	2.747	1.064	2.924
40°	0.643	0.766	0.839	1.192	1.305	1.556
70°	0.940	0.342	2.747	0.364	2.924	1.064

30. 由上表設 $A = 20^\circ$, $c = 1$, 又設 $A = 20^\circ$, $c = 4$, 試各求直角三角形之餘二邊。

31. 由直立竿之水平影長度竿長。測時得太陽之仰角之正切為 0.82。同時有塔之水平影長 174.3 碼。求塔高。

〔增註〕參攷例題 IX 圖解及增註。

第三章

以直綫表示函數法

REPRESENTATION OF THE FUNCTIONS
BY LINES

一角之函數均爲比。故皆爲數。然亦可用直綫表之。其法先擇某長爲單位。乃造成一直角三角形。而其比式內之分母。均須與此單位相等。

其最便利之法如下。

以一點 O (3圖) 爲心。及與長之單位相等者爲半徑。作一圓。又作一水平直徑 AA' 。及其垂直徑 BB' 。

其以 1 爲半徑之圓。謂之單位圓 (Unit circle)。設 AOP 爲一銳角。而其值 (度, 分, 秒) 以 x 表之。

則此 x 角。可謂爲由 OP 直綫自最始位置 (initial position) OA 。至最終位置 (terminal position) OP 。在 O 點旋轉而成。

作 $PM \perp OA$, $PN \perp OB$ 。

於 $\text{rt. } \triangle OMP$ 內。其斜邊 $OP=1$ 。

3 圖

