普通高等教育"十一五"国家级规划教材

运筹学教程

第2版

邱菀华 冯允成 魏法杰 周泓 刘美芳 编著

Operational Research

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

运筹学教程

第2版

邱菀华　冯允成　魏法杰　周泓　刘美芳　编著

Operational Research

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书的最初版本可以追溯到1985年。根据不同时期的教学要求，期间大改了四次，写书的教授也传带了四代人。历史传承和不断创新、完善、赋予了本书鲜明的特色和旺盛的生命力。

本书在内容方面，系统地介绍运筹学的基本理论、方法和应用；在编排上，注重内容安排上的前后衔接，重点突出理论联系实际。本书主要特点在于：注重案例分析，力求通过理论与案例的结合使读者学会对于实际问题的分析、研究和建立教学模型，掌握解决问题所需要的数学概念和解题技巧。为了方便教学，本书还配有教学课件，并在每章后增加了习题。同时，考虑到不同院校对教学内容的不同要求，书中对选讲内容标记了“*”号，供各学校在教学中予以取舍。

本书可作为管理、经济类各专业本科生教材，也可用于研究生教学；同时，可作为其他相关专业本科生、研究生的教材和教学参考书，也可作为广大科技工作者、企业领导和管理人员、政府机关干部的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学教程/邱菀华等编著．—2版．—北京：机械工业出版社，2009.5

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-111-27089-8

Ⅰ.运… Ⅱ.邱… Ⅲ.运筹学—高等学校—教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第071520号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)

责任编辑：张敬柱　版式设计：霍永明　责任校对：张玉琴

封面设计：赵颖喆　责任印制：洪汉军

北京市朝阳展望印刷厂印刷

2009年8月第2版第1次印刷

169mm×239mm·21.25印张·409千字

标准书号：ISBN 978-7-111-27089-8

定价：32.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：(010)68326294

购书热线电话：(010)88379639　88379641　88379643

编辑热线电话：(010)88379539

第 2 版前言

第1版前言

目 录

第1章 绪 论

1.1 运筹学定义

运筹学一词1938年起源于英国，是一门利用科学方法，特别是使用数学方法去解决资源的分配和使用的学科。运筹学在英国称为“Operational Research”，在美国称为“Operations Research”，我国香港和台湾地区译作作业研究，而我国大陆的学者，根据《史纪·高祖本纪》论张良的名言：“运筹帷幄之中，决胜千里之外”，将“Operational Research”翻译成“运筹学”。它作为一门典型的技术性科学学科，至今已有七十多年的历史。

为了深入理解运筹学的性质和特点，人们对运筹学作了一些定义，但是，由于运筹学具有应用复杂、范围广泛、多学科交叉的学科特征，所以至今为止，都没有一个确切的统一的定义。关于运筹学是什么，学术界曾分别由P. M. Morse与G. E. Kimball 、R. L. Ackoff与E. L. Arnoff、S. Beer作出三个典型的定义：

P. M. Morse与G. E. Kimball认为：运筹学就是“一种科学方法，提供执行者有关他们管辖下的作业的一些计量性的决策基础。”

R. L. Ackoff与E. L. Arnoff则认为：运筹学是“将科学的方法、技术与工具应用于系统的作业上使管辖下的作业问题获得最佳的解决。”

最为全面的定义由S. Beer给出，他认为：运筹学是“一种近代科学的研究，研究人、机器、材料与资金在其周围环境中所发生的有关管理与控制的概率性承担意外风险问题。其独特的技术是根据情况，利用科学模式，经由量测、比较以及对可能行为的预测而提出一个管制策略。”

在我国《辞海》(1979年版) 中有关运筹学条目的释义为：运筹学“主要研究经济活动与军事活动中能用数量来表达的有关应用、筹划与管理方面的问题，它根据问题的要求，通过数学的分析与运算，作出综合性的合理安排，以达到较经济较有效地使用人力和物力的目的。”

1.2 运筹学简史

运筹学诞生于军事作战研究。真正成功地运用现代数学方法于作战的当属第一次世界大战期间，用古典概率计算炮弹的命中率——兰彻斯特(F. W. Lanchester，1916年) 战斗动态理论。

会产生了巨大影响，中国运筹学的专家和学者也敏锐地捕捉到了运筹学应用的新方向。例如，我国的运筹学学者，将全局最优化、图论、神经网络等运筹学理论及方法应用于分子生物信息学中的DNA与蛋白质序列比较、芯片测试、生物进化分析、蛋白质结构预测等问题的研究；在金融管理方面，将优化及决策分析方法，应用于金融风险控制与管理、资产评估与定价分析模型等；在网络管理上，利用随机过程方法，研究排队网络的数量指标分析；在供应链管理问题中，利用随机动态规划模型，研究多重决策最优策略的计算方法；在人工智能、人—机结合的智能系统、“第五次产业革命”中的其他各种信息技术等重要的新方向上，我国运筹学工作者都取得了可喜的进展及成绩，有一些已进入国际先进水平的行列，被有关同行所认可。

1.3 运筹学的学科分支

经过几十年的应用，运筹学形成了众多的学科分支，主要分支如图1-1所示。

- 运筹学
  - 数学规划
    - 线性规划
    - 整数规划
    - 非线性规划
      - 无约束非线性规划
      - 约束非线性规划
    - 动态规划
    - 多目标规划
    - 目标规划
    - 模糊规划
    - 组合优化
    - 投入产出分析
  - 图论与网络分析
  - 排队论
  - 库存论
  - 决策分析
  - 对策论
  - 人工智能
  - 可靠性理论
  - 马尔可夫随机决策过程
  - 军事运筹学
    - 对抗模拟
    - 兰彻斯特理论
    - 火力运用理论
    - 指挥控制理论
  - 软运筹学

图1-1 运筹学的学科分支

1.4 运筹学方法的应用状况

七十多年来，运筹学已在众多领域得到应用，如工业管理与制造、交通、场所设置、装箱问题、电信、柔性制造系统、农业、林业、自然资源与环境、排序、时间表问题、金融管理等。主要采用的定量化运筹方法如图 1-2 所示。

这些方法主要用于各行业的管理领域，Hopp 曾对 50 年（1955～2004 年）内《Management Science》杂志中发表的不同学科论文的比重进行了统计，在所有被统计的期刊文献中，运筹管理类占 20.7%，优化类占 24.7%，二者之和为 45.4%，几乎占了半壁江山。这也从一个侧面说明了传统运筹学的核心所在。

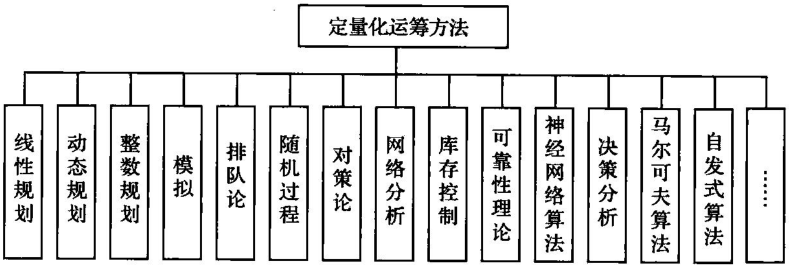

图 1-2　定量化运筹方法

1.5 本书的主要研究内容

1. 线性规划

线性规划是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支，它是辅助人们进行科学管理的一种数学方法。它主要研究在一定约束条件下，合理安排人力、物力等资源，使经济效果达到最好。一般地，求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题，统称为线性规划问题。决策变量、约束条件、目标函数是线性规划的三要素。

2. 整数线性规划

整数线性规划是要求问题中的全部或一部分决策变量为整数的线性规划。

在线性规划问题中，有些最优解可能是分数或小数，但对于某些具体问题，常要求解必须是整数。例如，所求解是机器的台数、工作的人数或装货的车数等。为了满足整数的要求，初看起来似乎只要把已得的非整数解舍入化整就可以了，而实际上化整后的数不一定是可行解和最优解，所以应该有特殊的方法来求解整数规划。书中介绍了分枝定界法和割平面法。

3. 非线性规划

非线性规划是具有非线性约束条件或目标函数的数学规划，是运筹学的一个重要分支。它是研究一个 N 元实函数在一组等式或不等式的约束条件下的极值问题，且目标函数和约束条件至少有一个是决策变量的非线性函数。非线性规划按照是否具有约束条件分成无约束非线性规划和有约束非线性规划，书中针对这两种问题介绍了不同的求解算法。

4. 图论

图论是从构成“图”的基本要素出发，研究有向图或无向图在结构上的基本特征，并对有“图论”要素组成的网络进行优化计算，以确定其最短路、最大流等。图论可结合工程和管理问题进行实际应用。

5. 网络分析

作为网络分析的主要方法之一，网络计划法又称为计划评审技术（PERT），是一种新的科学管理方法。它以数理统计为基础，运用网络分析的方法，将构成计划目标的所有任务，按其相互之间的逻辑关系和时间参数组成统一的网络形式，通过计算确定其进度和关键路线，并通过网络进行资源和费用的优化。

6. 决策与决策分析

决策和决策分析是运筹学最新发展的一个分支，广泛应用于经营管理工作中。它根据系统的状态信息、可能选取的策略以及采取这些策略对系统状态所产生的后果进行综合研究，以便按照某种衡量准则选择一组最优策略。

7. 多目标决策

系统方案的选择取决于多个目标的满足程度，这类决策问题称为多目标决策，它兴起于 20 世纪 70 年代中期。在社会经济系统的研究控制过程中，所面临的系统决策问题常常是多目标的。例如，在研究生产过程的组织决策时，既要考虑生产系统的产量最大，又要使产品质量高、生产成本低等。这些目标之间相互作用和矛盾，使决策过程相当复杂，使决策者常常很难作出决策。这类具有多个目标的决策问题需要应用多目标决策分析方法来解决。

8. 群决策

群决策是研究多人如何作出统一的有效抉择。多个个体组成群体，个体间可能是合作的，也可能是竞争的，还可以是复杂联合的，以及合作基础上的有限竞争等，但无论哪种情况，都必须合作择出统一的决策行为。

9. 排队论

排队论是一种用来研究公用服务系统工作过程的数学理论和方法。在这种系统中，服务对象的到达过程和服务过程一般都是随机性的，是一种随机聚散过程。它通过对随机服务对象的统计研究，找出反映这些随机现象平均特性的规律，从而提高服务系统的工作能力和工作效率。

第2章 线性规划

数学规划是运筹学的主要分支。它包括线性规划、非线性规划、整数规划和动态规划等。线性规划出现于20世纪30年代初，1947年丹茨基（George B. Dantzig）发明了求解线性规划问题的单纯形法之后，线性理论得到完善，实际应用也得到了迅速的发展和推广。随着电子计算机的发展，成千上万个约束条件和变量的大型线性规划问题得以求解，有力地推动了线性规划的发展。因此，无论从理论的成熟性看，还是从应用的广泛性看，线性规划都是运筹学的一个重要分支，它在工业、农业、交通运输、军事和计划管理等各方面都得到越来越广泛的应用。

2.1 线性规划的基本概念

在生产过程中，要想提高工作效率和经济效益，一般有两条途径：一条是进行技术改造，改进生产手段和条件，如增添设备、改进工艺、挖掘潜力等。另一条是在生产手段和条件都不变的情况下，改善生产的组织和计划管理，作出最优安排，使生产手段和条件得到充分的利用。线性规划方法就是解决后一类问题的工具。

后一类问题又分两个方面：一是在一定限制条件下，使得工作成果尽可能大；二是在完成既定任务的情况下，使资源消耗尽可能小。

例2-1 设一个工厂可以生产A、B和C三种产品，而其中每种产品又有1型和2型之分。今共有原料100单位用于生产这些产品，并且要求产品A的投料数量不得少于40单位，其余两产品的投料均不得超过35单位。每种产品的单位投料所获利润由表2-1给出。试问应如何投料才能使所获总利润最大？

表2-1 产品利润分配表

产　品	A		B		C	
产品类型	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2
单位投料所获利润/万元	3	2.5	3.5	4	5	4.5

这个问题可用数学表达式表示如下：

设 x_1 和 x_2 分别表示产品 A_1 和 A_2 所用的投料数量，由 y_1 和 y_2、z_1 和 z_2 分别表示 B_1 和 B_2、C_1 和 C_2 所用投料数量。根据已知条件，它们应满足以下关

系式

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2 &= 100 \\ x_1+x_2 &\geqslant 40 \\ y_1+y_2 &\leqslant 35 \\ z_1+z_2 &\leqslant 35 \end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

又由于实际问题中投料为负时无意义，故所有变量都必须满足非负要求，即

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0,\ z_1\geqslant 0,\ z_2\geqslant 0$$

最后按题目要求，应使下列总利润表达式

$$p=3x_1+2.5x_2+3.5y_1+4y_2+5z_1+4.5z_2 \tag{2-2}$$

取最大值。

把式（2-1）、式（2-2）称为给上述生产安排问题建立的线性规划模型。利用该数学模型求一组变量 x_1，x_2，y_1，y_2，z_1，z_2 的值，满足式（2-1）和非负条件，使式（2-2）达到极大值的这一数学问题，称为线性规划问题。

可以等价地把式（2-1）改写成等式

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2 &= 100 \\ x_1+x_2-t_1 &= 40 \\ y_1+y_2+t_2 &= 35 \\ z_1+z_2+t_3 &= 35 \\ t_i\geqslant 0\ (i=1,\ 2,\ 3) & \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

式（2-1）、式（2-3）和非负要求称为线性规划的约束条件，求极值的表达式（2-2）称为目标函数。它是衡量规划方案优劣的标准。

满足约束条件的一组变量值（x_1，x_2，y_1，y_2，z_1，z_2，t_1，t_2，t_3）称作线性规划问题的可行解，使目标函数达到极值的可行解称为线性规划的最优解。例如，在例 2-1 中，$x_1=40$，$y_1=35$，$z_1=25$，$t_3=10$，$x_2=y_2=z_2=t_1=t_2=0$，均满足非负条件和式（2-3），则该组变量值（40，0，35，0，25，0，0，0，10）称为线性规划问题的可行解。将这些值代入式（2-2）就得到相应的目标函数值为 $p=367.5$ 万元。但这不是最大利润，因为另取一组变量值（40，0，25，0，35，0，0，10，0）也是可行解，其相应的目标函数 $p=395$ 万元为最大利润（后面章节将阐明原理）。所以，后者为线性规划的最优解。

综上所述，得到线性规划的数学模型为：

求一组变量 x_1，x_2，…，x_n 的值，使之满足线性约束条件

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\{\leqslant,\ =,\ \geqslant\}^{\ominus}b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\{\leqslant,\ =,\ \geqslant\}\ b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\{\leqslant,\ =,\ \geqslant\}\ b_m \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{2-4}$$

并使线性目标函数

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{2-5}$$

达到极值（最大或最小）。其中 a_{ij}，b_i，c_j（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）为已知常数。

这个线性规划可缩写成

$$\left.\begin{array}{ll} \min\ (\text{或} \max) & z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\{\leqslant,\ =,\ \geqslant\}b_i\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\ & x_j\geqslant 0(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{array}\right\} \tag{2-6}$$

也可以用矩阵形式

$$\left.\begin{array}{l} \min(\text{或} \max)\quad z=\boldsymbol{cx} \\ \text{s.t.}\quad \boldsymbol{Ax}\{\leqslant,=,\geqslant\}\boldsymbol{b} \\ \qquad\quad \boldsymbol{x}\geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{2-7}$$

式中

$$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量非负“min”、“max”分别表示 $\boldsymbol{cx}$ 的极小、极大值。“s. t.”为英文“subject to”的缩写形式，即约束条件，或称限制条件。在上述线性规划模型式（2-6）和式（2-7）中，z 为目标函数；x_i（$i=1, 2, \cdots, n$）为决策变量；c_i（$i=1, 2, \cdots, n$）为价值系数或费用系数；a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）称为约束系数；b_j（$j=1, 2, \cdots, m$）称为约束条件右端项或资源常数向量；$\boldsymbol{A}$ 称为约束系数矩阵或技术系数矩阵。

在经济和生产活动中，线性规划是在有限资源（人力、物力、财力）限制条件下，寻求获得最大收益或支付最低成本的可行方案的一种数学方法。其中

⊖ 这里的每个约束条件只用到≤、=或≥中的一个符号。

收益、成本和限制条件均为变量的线性表达式，故称为线性规划问题，简记为LP（Linear Programming）问题。

2.2 线性规划的图解法

当线性规划问题的决策变量个数少于4时，可用图解法求解。图解法是利用几何图形来求解线性规划问题的一种方法，它将几何图形和线性规划问题中的基本概念联系起来，直观明了，有助于人们理解线性规划问题的基本思想和解题思路。本节主要介绍两个决策变量的线性规划问题的图解法。

1. 线性不等式的图像表示

(1) 单个不等式的图像

1) $x \leqslant 3$ 的图像如图2-1所示，它是一个半平面，用直线 l_0（作为边界）和一个箭头来表示这个半平面。

2) $x+2y \leqslant 8$ 的图像如图2-2所示，它是一个以直线 $x+2y=8$ 为其边界的半平面。

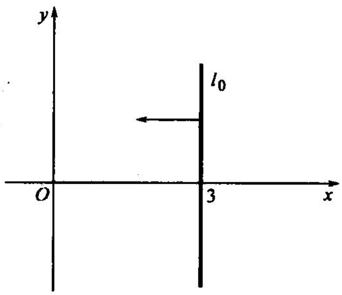

图2-1 $x \leqslant 3$ 的图像

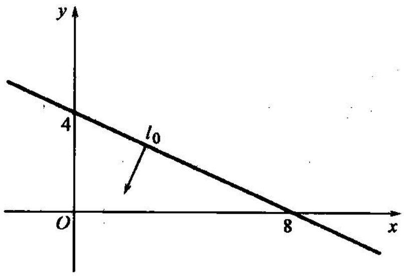

图2-2 $x+2y \leqslant 8$ 的图像

3) $2x+y \geqslant 4$ 的图像如图2-3所示，它是以直线 $2x+y=4$ 为边界的一个半平面。

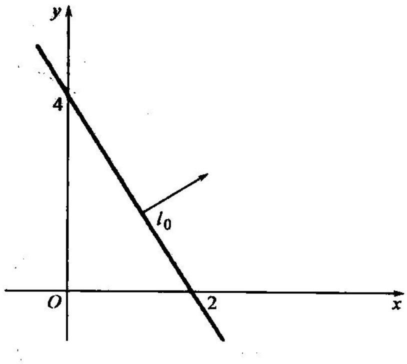

图2-3 $2x+y \geqslant 4$ 的图像

对于一般情况，令

$$f(x, y)=ax+by+c$$

式中，a、b、c 为实常数。

1) 若 $f(x, y)=0$，则其图像为一条直线，记为 l_0。

2) 若 $f(x, y) \geqslant 0$，则其图像是以 l_0 为边界的一个半平面。

3) 若 $f(x, y) \leqslant 0$，则其图像是以 l_0 为边界的另一个半平面。