



新课程学习能力评价课题研究资源用书

主编 刘德 林旭

编写 新课程学习能力评价课题组

中国教育学会《中国教育学刊》推荐学生用书

学习高手

状元塑造车间

学习技术化

TECHNOLOGIZING
STUDY

配浙教版

数学 八年级下册

推开这扇窗

- 全解全析
- 高手支招
- 习题解答
- 状元笔记



光明日报出版社



新课程学习能力评价课题研究资源用书

学习高手

状元塑造车间

主 编 刘 德 林 旭

本册主编 鞠立杰

本册编委 鞠立杰 黄海涛 王淑芳 张明波

数学

八年级下册

配浙教版

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

学习高手. 数学. 八年级. 下册/刘德, 林旭主编. —北京: 光明日报出版社, 2009. 11
配浙教版

ISBN 978-7-5112-0243-7

I. 学… II. ①刘… ②林… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 159708 号

学习高手

数学/八年级下册(浙教版)

主 编: 刘 德 林 旭

责任编辑: 温 梦

策 划: 聂电春

版式设计: 邢 丽

责任校对: 徐为正

责任印制: 胡 骑

出版发行: 光明日报出版社

地 址: 北京市崇文区珠市口东大街 5 号, 100062

电 话: 010-67078249(咨询)

传 真: 010-67078255

网 址: <http://book.gmw.cn>

E-mail: gmcbs@gmw.cn

法律顾问: 北京市华沛德律师事务所张永福律师

印 刷: 山东滨州明天印务有限公司

装 订: 山东滨州明天印务有限公司

本书如有破损、缺页、装订错误, 请与本社发行部联系调换。

开 本: 890×1240 1/32

字 数: 250 千字

印 张: 9.5

版 次: 2009 年 11 月第 1 版

印 次: 2009 年 11 月第 1 次

书 号: ISBN 978-7-5112-0243-7

定价: 15.90 元

版权所有 翻印必究

目录

第1章 二次根式 1

1.1 二次根式 1

高手支招1 细品教材 1

高手支招2 归纳整理 2

高手支招3 典例精析 2

高手支招4 链接中考 4

高手支招5 思考发现 4

高手支招6 体验成功 5

教材习题点拨 6

1.2 二次根式的性质 7

高手支招1 细品教材 7

高手支招2 归纳整理 9

高手支招3 典例精析 9

高手支招4 链接中考 12

高手支招5 思考发现 12

高手支招6 体验成功 13

教材习题点拨 15

1.3 二次根式的运算 16

高手支招1 细品教材 16

高手支招2 归纳整理 19

高手支招3 典例精析 20

高手支招4 链接中考 23

高手支招5 思考发现 24

高手支招6 体验成功 25

教材习题点拨 28

本章总结 30

教材习题点拨 33

第2章 一元二次方程 35

2.1 一元二次方程 35

高手支招1 细品教材 35

高手支招2 归纳整理 36

高手支招3 典例精析 37

高手支招4 链接中考 38

高手支招5 思考发现 39

高手支招6 体验成功 39

教材习题点拨 41

2.2 一元二次方程的解法 43

高手支招1 细品教材 43

高手支招2 归纳整理 45

高手支招3 典例精析 45

高手支招4 链接中考 48

高手支招5 思考发现 49

高手支招6 体验成功 50

教材习题点拨 51

2.3 一元二次方程的应用 54

高手支招1 细品教材 54

高手支招2 归纳整理 55

高手支招3 典例精析 56

高手支招4 链接中考 59

高手支招5 思考发现 60

高手支招6 体验成功 61

教材习题点拨 63

本章总结 65

教材习题点拨 68

第3章 频数及其分布 70

3.1 频数与频率 70

高手支招1 细品教材 70

高手支招2 归纳整理 71

高手支招3 典例精析 72

高手支招4 链接中考 74

高手支招5 思考发现 74

高手支招6 体验成功 75

教材习题点拨 77

3.2 频数分布直方图 80

高手支招1 细品教材 80

高手支招2 归纳整理 81

高手支招3 典例精析 81

高手支招4 链接中考 84

高手支招5 思考发现 86

高手支招6 体验成功 86

教材习题点拨 92

3.3 频数分布折线图 94

高手支招1 细品教材 94

高手支招2 归纳整理 95

高手支招3 典例精析 95

高手支招4 链接中考 100

高手支招5 思考发现 102

高手支招6 体验成功 102

教材习题点拨 105

本章总结 107

教材习题点拨 109

第4章 命题与证明 113

4.1 定义与命题 113

高手支招1 细品教材 113

高手支招2 归纳整理 116

高手支招3 典例精析 116

高手支招4 链接中考 118

高手支招5 思考发现 119

高手支招6 体验成功 120

教材习题点拨 122

4.2 证明 124

高手支招1 细品教材 124

高手支招2 归纳整理 125

高手支招3 典例精析 126

高手支招4 链接中考 129

高手支招5 思考发现 130

高手支招6 体验成功 130

教材习题点拨 133

4.3 反例与证明 137

4.4 反证法 137

高手支招1 细品教材 137

高手支招2 归纳整理 139

高手支招3 典例精析 139

高手支招4 链接中考 141

高手支招5 思考发现 142

高手支招6 体验成功 142

教材习题点拨 144

本章总结	146	5.4 中心对称	184
教材习题点拨	150	高手支招 1 细品教材	184
第 5 章 平行四边形	153	高手支招 2 归纳整理	186
5.1 多边形	153	高手支招 3 典例精析	186
高手支招 1 细品教材	153	高手支招 4 链接中考	189
高手支招 2 归纳整理	155	高手支招 5 思考发现	190
高手支招 3 典例精析	156	高手支招 6 体验成功	191
高手支招 4 链接中考	159	教材习题点拨	193
高手支招 5 思考发现	159	5.5 平行四边形的判定	195
高手支招 6 体验成功	160	高手支招 1 细品教材	195
教材习题点拨	161	高手支招 2 归纳整理	196
5.2 平行四边形	164	高手支招 3 典例精析	197
高手支招 1 细品教材	164	高手支招 4 链接中考	201
高手支招 2 归纳整理	166	高手支招 5 思考发现	202
高手支招 3 典例精析	166	高手支招 6 体验成功	203
高手支招 4 链接中考	168	教材习题点拨	206
高手支招 5 思考发现	169	5.6 三角形的中位线	209
高手支招 6 体验成功	169	高手支招 1 细品教材	209
教材习题点拨	171	高手支招 2 归纳整理	210
5.3 平行四边形的性质	173	高手支招 3 典例精析	210
高手支招 1 细品教材	173	高手支招 4 链接中考	213
高手支招 2 归纳整理	174	高手支招 5 思考发现	214
高手支招 3 典例精析	175	高手支招 6 体验成功	215
高手支招 4 链接中考	178	教材习题点拨	218
高手支招 5 思考发现	179	5.7 逆命题和逆定理	219
高手支招 6 体验成功	179	高手支招 1 细品教材	219
教材习题点拨	182	高手支招 2 归纳整理	222

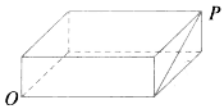
高手支招 3 典例精析	222
高手支招 4 链接中考	225
高手支招 5 思考发现	226
高手支招 6 体验成功	226
教材习题点拨	229
本章总结	232
教材习题点拨	235
第 6 章 特殊平行四边形与梯形	239
6.1 矩形	239
高手支招 1 细品教材	239
高手支招 2 归纳整理	240
高手支招 3 典例精析	241
高手支招 4 链接中考	243
高手支招 5 思考发现	244
高手支招 6 体验成功	244
教材习题点拨	247
6.2 菱形	250
高手支招 1 细品教材	250
高手支招 2 归纳整理	252
高手支招 3 典例精析	253
高手支招 4 链接中考	256

高手支招 5 思考发现	257
高手支招 6 体验成功	257
教材习题点拨	260
6.3 正方形	262
高手支招 1 细品教材	262
高手支招 2 归纳整理	264
高手支招 3 典例精析	265
高手支招 4 链接中考	268
高手支招 5 思考发现	270
高手支招 6 体验成功	270
教材习题点拨	275
6.4 梯形	277
高手支招 1 细品教材	277
高手支招 2 归纳整理	280
高手支招 3 典例精析	281
高手支招 4 链接中考	284
高手支招 5 思考发现	285
高手支招 6 体验成功	286
教材习题点拨	290
本章总结	292
教材习题点拨	296

第1章 二次根式

1.1 二次根式

爱整洁的小丽天天在家里打扫卫生.有一次小丽打扫房间时,发现一只壁虎在房间地面上的一角的 O 点,紧盯着天花板上另一角的 P 点的一只苍蝇,垂涎欲滴,如图所示.又好奇又爱动脑筋的小丽想:这只壁虎按什么路线走才能尽快捕到猎物呢?如果请你帮助解决,你有什么办法呢?



高手支招① 细品教材

二次根式

像 $\sqrt{a^2+4}$, $\sqrt{b-3}$, $\sqrt{2s}$ 这样表示的算术平方根,且根号内含有字母的代数式叫做二次根式.为了方便起见,我们把一个数的算术平方根(如 $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$)也叫做二次根式.

二次根式的被开方数可以是数,也可以是代数式.如果是数,必须是非负数;如果是代数式,则这个代数式的值必须是非负的.

学习理解二次根式的概念要从以下两个方面把握:

1. 二次根式必须含有“ $\sqrt{\quad}$ ”,像 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{(-2)^2}$ 、 $\sqrt{a^2+1}$ 、 $\sqrt{3m}$ ($m \geq 0$)等都是二次根式;

2. 含有“ $\sqrt{\quad}$ ”的式子不一定是二次根式,这是因为当被开方数大于或等于零时,是二次根式;当被开方数小于零时,就不是二次根式.

【示例】判断下列各式哪些是二次根式.

(1) $\sqrt{3}$; (2) $\sqrt{-2}$; (3) $\sqrt{x^2+1}$.

► 思路分析: 判别一个式子是不是二次根式,就看它是否满足两个条件:

① 含有“ $\sqrt{\quad}$ ”; ② 被开方数是非负数. 显然(1)满足这两个条件;对于(3),由于 $x^2 \geq 0$,则 $x^2+1 > 0$ 恒成立,所以(3)也满足这两个条件;只有(2)被开方数小于零,不满足条件②.

► 解: (1)(3)是二次根式.



高手支招② 归纳整理

本节主要内容是二次根式的概念, 对于该概念只要了解形如 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 的式子叫做二次根式就可以了, 重点是理解二次根式有意义的条件.

二次根式 $\begin{cases} \text{定义: 一般地, 形如 ① 的式子叫做二次根式} \\ \sqrt{a} \text{ 有意义的条件是 ②} \end{cases}$

答案

① $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) ② $a \geq 0$



高手支招③ 典例精析

一、基础知识巩固

【例 1】下列各式哪些是二次根式, 哪些不是? 为什么?

(1) $\sqrt{15}$; (2) $\sqrt{-17}$; (3) $\sqrt[3]{4}$; (4) $-\sqrt{-5x}$.

► 思路分析: 根据二次根式的概念来判断.

► 解: (1) $\because 15 > 0, \therefore \sqrt{15}$ 是二次根式.

(2) $\because -17 < 0, \therefore \sqrt{-17}$ 不是二次根式.

(3) $\because \sqrt[3]{4}$ 中不含“ $\sqrt{\quad}$ ”, $\therefore \sqrt[3]{4}$ 不是二次根式.

(4) 当 $-5x \geq 0$, 即 $x \leq 0$ 时, $-\sqrt{-5x}$ 是二次根式; 当 $x > 0$ 时, $-\sqrt{-5x}$ 不是二次根式.

(技术提示)

当被开方数是一个实数时可直接判断; 当被开方数含有字母, 且字母的取值情况不明时, 要分情况讨论.

【例 2】求下列二次根式中字母 x 的取值范围:

(1) $\sqrt{4-3x}$; (2) $\sqrt{(3-x)^2}$; (3) $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

► 思路分析: 二次根式的被开方数必须是非负数, 如果式子的分母中含有字母, 则字母的取值不能使分母为零.

► 解: (1) $\because 4-3x \geq 0$, 解得 $x \leq \frac{4}{3}$,

$\therefore$ 字母 x 的取值范围是小于或等于 $\frac{4}{3}$ 的实数.

(2) $\because$ 无论 x 取何值, 总能保证 $(3-x)^2 \geq 0$,

∴字母 x 取任意实数.

(3) ∵ $x-1 \geq 0$ 且 $x-1 \neq 0$, 解得 $x > 1$,

∴字母 x 的取值范围是大于 1 的实数.

技术提示 (1) 二次根式的被开方数必须是非负数, 因为负数没有平方根;
(2) 当二次根式中有分母时, 既要满足被开方数是非负数, 又要满足分母不为零.

【例 3】 当 x 为何值时, $\frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$ 在实数范围内有意义?

▶ **错解**: 由二次根式的概念可得 $x-4 \geq 0$, 解得 $x \geq 4$.

∴当 $x \geq 4$ 时, $\frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$ 在实数范围内有意义.

▶ **错解分析**: 没有考虑当分母 $x-5=0$, 即 $x=5$ 时, $\frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$ 无意义.

▶ **正解**: 要使 $\frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$ 有意义, 必须同时满足 $\begin{cases} x-4 \geq 0, \\ x-5 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x \geq 4$ 且 $x \neq 5$.

二、综合能力拓展

【例 4】 当 x 取何值时, 式子 $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ 在实数范围内有意义?

▶ **思路分析**: 因为这个二次根式的被开方数是分式, 要使它有意义, 必须满足两个条件: 一是被开方数为非负数; 二是分母不能为零. 由此可得不等式组.

▶ **解**: 由二次根式的概念, 得 $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 1-x > 0 \end{cases}$ ① 或 $\begin{cases} x+1 \leq 0, \\ 1-x < 0. \end{cases}$ ②

解不等式组①, 得 $-1 \leq x < 1$. 不等式组②无解.

∴当 $-1 \leq x < 1$ 时, 式子 $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ 在实数范围内有意义.

技术提示 当被开方数是较复杂的分式时, 考虑问题要周全, 既要满足整个被开方数为非负数, 又要保证分母不为零.

三、创新思维应用

【例 5】 若 $a^2 + \sqrt{b-2} = 4a-4$, 试求 $\sqrt{ab}$ 的值.

▶ **思路分析**: 观察可以发现, 将已知等式移项后 $a^2 - 4a + 4$ 可以化为完全平方式, 这样通过巧妙变形把原式化为两个非负数的和等于零的形式, 可使问题转化为解简单的方程组的问题.

▶ **解**: ∵ $a^2 + \sqrt{b-2} = 4a-4$,

$$\therefore a^2 - 4a + 4 + \sqrt{b-2} = 0, \text{即 } (a-2)^2 + \sqrt{b-2} = 0,$$

$$\text{又 } \because (a-2)^2 \geq 0, \sqrt{b-2} \geq 0,$$

$$\therefore \begin{cases} a-2=0, \\ b-2=0. \end{cases} \therefore \begin{cases} a=2, \\ b=2. \end{cases}$$

$$\therefore \sqrt{ab} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{2^2} = 2.$$

技法点拨

像这类问题通常利用“几个非负数的和等于零，则每个数必为零”这个性质，将问题转化为解简单的方程组的问题。



高手支招④ 链接中考

二次根式的概念是学习二次根式的化简与计算的重要基础，因此它是中考的重点。考查形式以填空题、选择题为主。学习这部分内容时，关键掌握二次根式的概念以及二次根式成立的条件。

【例1】2008·甘肃庆阳 要使 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义， x 应满足的条件是_____。

▶▶▶

答案

$$x \geq 2$$

点拨

由二次根式的意义可知，被开方数大于或等于0，即 $x-2 \geq 0$ ，解得 $x \geq 2$ 。

【例2】2008·北京 若 $|x+2| + \sqrt{y-3} = 0$ ，则 xy 的值为 …………… ()

A. -8

B. -6

C. 5

D. 6

▶▶▶

▶ **答案：B**

点拨

$\because |x+2| \geq 0, \sqrt{y-3} \geq 0$ ，且两个非负数的和为0， $\therefore$ 每个非负数都等于0。 $\therefore x+2=0, y-3=0$ 。解得 $x=-2, y=3, \therefore xy=-6$ 。



高手支招⑤ 思考发现

1. 判断一个式子是不是二次根式，要看它是否同时满足两个条件：

(1) 必须含有“ $\sqrt{\quad}$ ”；

(2) 被开方数是非负数。

2. 求代数式中字母的取值范围时应考虑：(1) 二次根式的被开方数大于或等于零；(2) 分母的值不能为零；(3) 零指数幂、负整数指数幂的底数不

等于零,分别根据这三方面情况,将问题转化为解方程(组)或不等式(组)问题.

3. 若已知的被开方数为含有字母

的二次根式,则隐含着被开方数大于或等于零的条件,由此可将问题转化为解方程或不等式的问题,从而可确定字母的取值范围.



高手支招 ⑥ 体验成功

基础巩固

1. 下列各式是二次根式的有 ()

① $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ② $\sqrt{-3}$ ③ $-\sqrt{x^2+1}$ ④ $\sqrt{8}$ ⑤ $\sqrt{(-\frac{1}{3})^2}$ ⑥ $\sqrt{1-x}(x>1)$

⑦ $\sqrt{x^2+2x+3}$

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

2. 若 $\sqrt{\frac{3}{x-1}}$ 是二次根式,那么 x 的取值范围是 ()

A. $x \geq 1$

B. $x \leq 1$

C. $x > 1$

D. $x < 1$

3. 若式子 $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$ 有意义,则 x 的取值范围是 ()

A. $x \leq 2$ 或 $x \geq 1$

B. $x \leq 2$

C. $1 \leq x \leq 2$

D. $x \geq 1$

4. $|x-y| = \sqrt{(x+y)^2 + (\quad)^2}$ 中的括号内应填入_____.

综合应用

5. 已知 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + 5$, 求 $x^2 - xy + y^2$ 的值.

6. 当 a 取什么值时, $\sqrt{3a-2} + 2\ 008$ 有最小值? 并求出这个最小值.

探究创新

7. 若 x, y 都是实数, 且 $y < \sqrt{3x-1} + \sqrt{1-3x} + \frac{3}{4}$, 求 $\frac{4y-3}{|4y-3|} + 2x$ 的值.

【答案与解析】 >>>

1. D 解析: 根据二次根式的概念, 可知①③④⑤⑦是二次根式, ②⑥不是二次根式.

2. C 解析: $\because \sqrt{\frac{3}{x-1}}$ 是二次根式,

$$\therefore \frac{3}{x-1} \geq 0, \text{ 且分母 } x-1 \neq 0.$$

$$\therefore x-1 > 0. \therefore x > 1.$$



3. C 解析: 由 $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases}$ 得 $1 \leq x \leq 2$.

4. $-4xy$ 解析: 根据和的平方与差的平方的关系可得.

5. 解: $\because$ 在 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + 5$ 中, $x-3 \geq 0$ 且 $3-x \geq 0$, 即 $x \geq 3$ 且 $x \leq 3$,

$$\therefore x=3, y=5.$$

$$\therefore x^2 - xy + y^2 = 9 - 3 \times 5 + 25 = 19.$$

6. 解: 要使 $\sqrt{3a-2} + 2\ 008$ 的值最小, 只有 $\sqrt{3a-2}$ 最小.

$\because \sqrt{3a-2}$ 是非负数,

$$\therefore \sqrt{3a-2} = 0, \text{ 解得 } a = \frac{2}{3}.$$

$\therefore$ 当 $a = \frac{2}{3}$ 时, $\sqrt{3a-2} + 2\ 008$ 取最小值 $2\ 008$.

7. 解: 由 $\sqrt{3x-1}$ 及 $\sqrt{1-3x}$ 有意义, 得 $3x-1 \geq 0$ 且 $1-3x \geq 0$,

$$\therefore 3x-1=0, \text{ 即 } x = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore y < \sqrt{3x-1} + \sqrt{1-3x} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore 4y-3 < 0.$$

$$\therefore \frac{4y-3}{|4y-3|} + 2x = \frac{4y-3}{3-4y} + 2x = 2x-1 = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

教材习题点拨

作业题

A 组

1. 解: (1) $a \geq 0$; (2) $a > 0$; (3) $a \leq \frac{1}{3}$.

2. 解: 1.

3. 解: (1) $\sqrt{2.43^2 + (\frac{a}{2})^2}$; (2) 2.63 米.

4. 解: (1) 2; (2) $\sqrt{2}$; (3) $\sqrt{6}$.

B 组

5. 解: $x = \pm 3$.

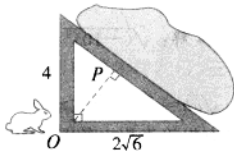
点拨: 由二次根式的性质可得 x^2 的值为 9, 进一步开平方可得 $x = \pm 3$.

6. 解: (1) $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$; (2) 3.3 秒.

点拨: 计算时要注意公式的变形应用.

1.2 二次根式的性质

如图,一只兔子在两条交叉垂直路口处 O 点,被一位猎人发现.兔子为了尽快逃避猎人的追捕,抄近路走,穿过空地,逃往草地.由点到直线的最短距离公理,可知兔子逃跑的最短距离是线段 OP 的长度.



那么如何求这个最短距离呢?这就涉及到我们这节所要学的内容.



高手支招① 细品教材

$$一、(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0).$$

根据平方根的定义可知,若 $x^2 = a$,则 x 是 a 的平方根.反之,如果 x 是 a 的平方根,则有 $x^2 = a$.因为 $\sqrt{a}$ 是 a 的一个平方根,所以 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$.

这个二次根式的基本性质从两个方面说明被开方数与算术平方根之间的关系,一方面说明:一个非负数的算术平方根的平方还是这个数;另一方面说明:这个式子反过来可以写成 $a = (\sqrt{a})^2 (a \geq 0)$,也就是说:一个非负数可以写成它的算术平方根的平方的形式.

【示例】计算: $(2\sqrt{5})^2$.

► 思路分析: 先利用积的乘方的性质 $(ab)^2 = a^2 b^2$ 变形,再利用二次根式的性质 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 进行计算.

$$\text{► 解: } (2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times (\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20.$$

$$二、\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

从这个等式的左右两边可知, $\sqrt{a^2}$ 中 a 的取值范围是全体实数,即不论 a 取什么实数, $\sqrt{a^2}$ 一定有意义.

比较 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 与 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ 可知,两者的最大区别是被开方数不同:前者被开方数是非负数;后者被开方数的底数可为全体实数.



1. $\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根,因为非负数才有算术平方根,所以总有 $a \geq 0$;

2. 化简 $\sqrt{a^2}$ 时,一定要先化为 $|a|$ 的形式,再根据 a 的正负性确定结果,这是简化计算的重要过程,也是防止出错的有效方法.



【示例】计算： $\sqrt{(-10)^2}$.

► **思路分析**：可根据 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ 进行化简.

► **解**： $\sqrt{(-10)^2} = |-10| = 10$.

三、积的算术平方根的性质

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$ ，也就是说积的算术平方根等于积中各因式的算术平方根的积.

在这个性质中， a, b 可以是数，也可以是代数式，无论是数，还是代数式，都必须满足 $a \geq 0, b \geq 0$. 只有满足这个条件，才能运用这个性质进行计算或化简；否则，等式右边就没有意义了，等式也就不成立了.

【示例】计算：(1) $\sqrt{16 \times 9}$ ；

(2) $\sqrt{81 \times 121}$.

► **思路分析**：利用积的算术平方根等于积中各因数的算术平方根这个性质，可直接计算，如果被开方数是完全平方数，就要移到根号外.

► **解**：(1) $\sqrt{16 \times 9} = \sqrt{16} \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$ ；

(2) $\sqrt{81 \times 121} = \sqrt{81} \times \sqrt{121} = 9 \times 11 = 99$.

四、商的算术平方根的性质

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (a \geq 0, b > 0)$ ，也就是说商的算术平方根等于被开方数中被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.

在运用商的算术平方根的性质解决相关计算问题时，要注意成立的条件，即被开方数的分子为非负数，分母大于零.

【示例】计算：(1) $\sqrt{\frac{7}{144}}$ ；(2) $\sqrt{\frac{9a}{169}}$.

► **思路分析**：利用商的算术平方根等于被开方数中被除式的算术平方根除以除式的算术平方根这个性质，直接计算，如果被开方数是完全平方数，就要进行化简.

► **解**：(1) $\sqrt{\frac{7}{144}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{144}} = \frac{\sqrt{7}}{12}$ ；

(2) $\sqrt{\frac{9a}{169}} = \frac{\sqrt{9a}}{\sqrt{169}} = \frac{\sqrt{3^2 a}}{\sqrt{13^2}} = \frac{3\sqrt{a}}{13}$.



这个公式的作用是化简二次根式. 如果一个二次根式的被开方数(式)中有开得尽方的因数(因式)，可用积的算术平方根的性质和公式 $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0), \end{cases}$ 将这些因数(因式)移到根号外，达到化简的目的.

**高手支招②** 归纳整理

本节主要内容是二次根式的性质,二次根式的性质是进行二次根式的化简与运算的基础,在运用二次根式的基本性质时要注意区别 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 与 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0); \\ -a (a < 0) \end{cases}$ 之间的不同点.

$$\text{二次根式的性质} \begin{cases} (\sqrt{a})^2 = \text{①} \\ \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (\text{②}) \\ -a (\text{③}) \end{cases} \\ \text{积的算术平方根的性质: } \sqrt{ab} = \text{④} \quad (a \geq 0, b \geq 0) \\ \text{商的算术平方根的性质: } \sqrt{\frac{a}{b}} = \text{⑤} \quad (a \geq 0, b > 0) \end{cases}$$

答案

① $a(a \geq 0)$ ② $a \geq 0$ ③ $a < 0$ ④ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ⑤ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

**高手支招③** 典例精析

一、基础知识巩固

【例1】当 $x < 5$ 时,二次根式 $\sqrt{(x-5)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

► **思路分析:** 根据二次根式的性质 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0), \\ -a (a < 0) \end{cases}$ 可得结果.

$$\because x < 5, \therefore x - 5 < 0.$$

$$\therefore \sqrt{(x-5)^2} = |x-5| = -(x-5) = 5-x.$$

答案

$$5-x$$



技巧提醒 化简形如 $\sqrt{a^2}$ 的二次根式,一定要先化为 $|a|$ 的形式,再根据 a 的正负性来求值.

【例2】已知 $1 \leq x \leq 3$,化简 $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9}$.

► **思路分析:** 要将式子 $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9}$ 化简,应先将被开方式分解因式,看被开方式中是否是完全平方式,若是便可利用二次根式的性质化简.



经观察,两个被开方式都是完全平方式,因此不难化简.

► 解: $\because 1 \leq x \leq 3, \therefore x-1 \geq 0, x-3 \leq 0.$

$$\begin{aligned} & \therefore \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9} \\ &= \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2} \\ &= |x-1| + |x-3| \\ &= x-1+3-x=2. \end{aligned}$$

技术化提示 此类题应先将被开方式变形为完全平方式,再根据 x 的取值范围,判断出被开方数的底数是负数还是非负数,然后运用公式 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a \geq 0), \\ -a(a < 0) \end{cases}$ 进行化简.

【例3】计算:(1) $\sqrt{(-16) \times (-9)}$; (2) $\sqrt{(-4) \times \frac{25}{9} \times (-169)}$.

► 思路分析: 这两题中被开方数都有两个因数是负数,要先利用有理数乘法法则将它们化为正数,再计算.

► 解: (1) $\sqrt{(-16) \times (-9)} = \sqrt{16 \times 9} = \sqrt{16} \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12;$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt{(-4) \times \frac{25}{9} \times (-169)} &= \sqrt{4 \times \frac{25}{9} \times 169} = \sqrt{4} \times \sqrt{\frac{25}{9}} \times \sqrt{169} = 2 \times \frac{5}{3} \times \\ 13 &= \frac{130}{3}. \end{aligned}$$

技术化提示 像这类被开方数有负因数时,必须先将负因数转化为正因数,才能运用积的算术平方根的性质计算.

【例4】求将二次根式 $x\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 中根号外的字母移到根号内后的结果.

► 错解: $x\sqrt{-\frac{1}{x}} = \sqrt{x^2 \cdot (-\frac{1}{x})} = \sqrt{-x}.$

► 错解分析: $\because$ 二次根式 $\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 有意义,

$$\therefore -\frac{1}{x} > 0, \text{ 也就是 } x < 0.$$

上面的错解是将根号外的 x 作为非负数移到根号内的.

► 正解: $\because -\frac{1}{x} > 0,$

$$\therefore x < 0.$$