试用教材

# 工程力学

上册

力学教研组编

广东工学院教育革命组出版

一九七三年六月

# 前　　言

## 一　本课程的任务

工程力学是研究物体的机械运动和构件的强度、刚度及稳定等问题的科学。它是一门技术基础课程。

机械运动泛指物体在空间的位移。要使机械实现预定的动作，必须合理布置传动系统。传动系统的运动分析与计算是本课程的任务之一。

组成机器或结构物的每一个部件称为构件。任何构件都起着传递力的作用。构件在外力作用下会发生变形，如果力的大小超过一定限度，构件将不能正常工作。为了保证机器或结构物能正常使用，必须保证每个构件都能正常工作。鉴定构件能否正常工作，通常要考虑三个方面：（1）会不会破坏；（2）会不会产生过大的不允许的变形；（3）构件所处的平衡状态是否稳定。构件能够安全地承受载荷而不破坏，我们就认为它满足了强度的要求；构件的变形若被限制在正常工作所允许的范围内，我们就认为它满足了刚度的要求；构件能够保持原有的平衡形式，我们就认为它满足了稳定性的要求。一般来说，构件的设计应当考虑以上三个方面的要求。但对每一个具体的构件来说，上述三个要求不一定是同等重要的，应该通过具体分析，抓其主要矛盾。例如有的以强度为主，有的以刚度为主，有的则以稳定性为主。主要方面满足了，其他次要方面一般也能满足。凭经验知，在一定的外力作用下，构件的强度、刚度及稳定性是随着材料的性质和构件外形尺寸而变化的。因此，合理地选用材料和确定构件的尺寸，使之符合“多快好省”的要求，是每一个工程技术人员的责任所在，也是本课程的任务之一。

上面所述，是从力学角度来考虑的。但是，**“世界上的事情是复杂的，是由各方面的因素决定的。看问题要从各方面去看，不能只从单方面看。”**设计构件时除要满足力学上的要求外，还要满足工艺和结构等方面的要求。因此，设计时要紧密联系实际，考虑多方面的因素，使设计合理化。

## 二　本课程的体系和内容概要

本教材的主要内容取材于理论力学和材料力学。但过去这两门课程的内容庞杂烦琐，脱离实际，教学过程较长。现在，我们根据学制和专业特点等实际情况，在尊重科学内在联系的原则下，把过去两门力学教材的内容加以删增和调整，按一门课的形式重新组织体系。这个体系包括如下四篇：

第一篇：机械运动分析。从介绍点的运动入手，研究物体的平移运动，绕定轴转动和合成运动，为机械运动分析提供理论基础和方法。

第二篇：构件的外力分析。在阐述静力学基本定律（静力学公理）的基础上，研究力系（平面力系和空间力系）的简化和平衡条件；并讨论了机械摩擦和机械效率，解决机械传动的外力计算问题。

第三篇：构件的强度、刚度和稳定性。重点是论述杆件的四种基本变形和组合变形；此外，还根据各专业的不同要求，安排了应力状态和强度理论、薄壁容器与厚壁圆筒等内容。

第四篇：动力学与动应力问题。简要介绍牛顿三大定律、定轴转动定律和动能定理等动力学基本知识，进而研究动应力和交变应力。

本讲义为机械类专业的试用教材，讲授全部内容大约需要200学时，各专业可根据具体情况有所侧重地教好基本内容，其余作为机动。

## 三 关于学习方法

本课程内有许多抽象的概念、假定和计算简图，使初学者感到难以入门。但力学和一切学科一样，它的每一个概念，每一个结论，都和实际事物有密切联系，只要我们能够掌握科学的学习方法，是可以学好的。近几年来，工农兵学员在学习力学方面有很多体会，他们认为除了在思想上要有明确的学习目的以外，在学习方法上应当注意“多看、多想、多练”三个环节。现介绍如下，供同志们参考。

多看，就是多接触周围环境，丰富自己的感性认识。力学问题到处都有，在工程上、日常生活上以及自然界里，到处都可以看到。丰富的感性认识，是得到理性认识的基础。

多想，就是“开动机器”，“善于思索”。光看不动脑筋不行，要把实际的东西和书本知识联系起来想一想，把自己看见的或做过的事物和教员讲的联系起来想一想。要养成分析的习惯，经过自己的周密思考，才能使感性认识产生质的飞跃，成为理性的认识。

多练，就是反复实践。力学方法的特点是将实际的东西抽象成一个计算简图（如一根直线，一个简单图形），再根据计算简图来求解。一般的说，计算简图能作得出来，问题就已经解决了一半。可是，要正确作出一个计算简图，却不是一件容易的事情。唯一有效的办法就是接触实际，反复实践，在实践中总结经验，增长才干。正如列宁所指出的：**“从生动的直观到抽象的思维，从抽象的思维到实践，这就是认识真理、认识客观实在的辩证的途径。”**

力 学 教 研 组

一九七二年九月

# 上 册 目 录

# 第二篇　构件的外力分析

## 第三章　构件的受力图



## 第四章　构件平衡时外力的计算



## 第五章　考虑摩擦时外力的计算

# 第一篇 机械运动分析

## 第一章 机械运动的基本形式

辩证唯物主义认为，世界是物质的，物质是运动的。毛主席指出：**“人的认识物质，就是认识物质的运动形式，因为除了运动的物质以外，世界上什么也没有，而物质的运动则必取一定的形式。”**任何物体的运动都必须在时间和空间中进行，不能设想有离开时间和空间而运动的物质，所以，时间和空间是物质存在的形式，是研究物体运动的基本出发点。**“自然界存在着许多的运动形式，机械运动、发声、发光、发热、电流、化分、化合等等都是。”**而机械运动是物质运动的最简单形式。

**“无论什么事物的运动都采取两种状态，相对地静止的状态和显著地变动的状态。”**要确定物体的运动状态，必须拿另外一个物体作为参考，这个作为参考的物体，称为参考体，固结于参考体上的任何一组坐标系，称为参考坐标系或参考系，我们只能站在参考系上来观察和判断物体的运动状态。对于同一个物体，如果从不同的参考系来观察它的运动，可以得出不同的结论。例如轮船在行驶，船上的人看见船上的烟囱是静止的，但岸上的人看见船上的烟囱是跟着船一起运动的。这是因为前者把船作为观察烟囱运动的参考体，而后者却把参考系放在岸上，所以得出的结论完全两样。这种原因在于**“矛盾着的事物及其每一个侧面各有其特点，这是矛盾的特殊性和相对性。”**事物的运动是绝对的，但观察事物的运动却具有相对性。所以我们在阐述物体运动的状态时，必须讲明是以什么物体为参考体。在工程上，通常是以地球为参考体，亦即将参考系固结于地球。我们今后所讲的“静止”（或“平衡”）和“运动”，除另有声明外，都应作如此理解。

本篇着重研究工程上的机械运动。机械运动有些看来非常简单，有些则比较复杂。譬如我们打开牛头刨床的箱盖，看见齿轮是转动的，摆杆是摇摆的（本质上也是转动），滑块是移动的。所有这些运动，看来都很简单。我们再看看其他机械，里面有些构件的运动则比较复杂，如滚齿机的分度机构、万能镗床的进给机构、曲柄压力机的曲柄连杆机构等等，其中一些构件的运动形式都不是简单的移动和转动。因此，机械运动也有简单和复杂之分，而移动和转动则是最简单、最基本的机械运动。下一章我们将会讲到，机械运动的形式不管如何复杂，如果把它加以分解的话，不外是移动和转动两个组成部分，换句话说，复杂的机械运动是由几个简单的机械运动组合而成的。

复杂的机械运动将在第二章讲到。本章的任务是研究机械运动的基本形式——物体的平移运动和绕固定轴转动，这是重要的基本知识，也是进行机构运动分析的理论基础。

## § 1.1 点的运动学

“点的运动”在物理学中已有所讨论，现在，在讲述物体的运动之前，先来复习一下，并作进一步的探讨。

这里所谓“点”，就是指物理学中所说的“质点”，因为在运动学中不涉及到质量，所以常简称为“动点”或“点”。一个物体可以看作是由无数的点所组成，要完全了解此物体的运动，就得研究组成此物体的所有的点的运动。然而，在自然界和工程上，物体的运动在一定条件下可以简化为点的运动。例如炮弹或飞机在空中的运动，当它们各部分的相对运动或者本身转动的影响可以忽略不计时，就可以简化为点的运动。又如刨床刨刀的运动、汽缸活塞的运动等，也可以简化为点的运动来研究。

点运动时所走过的路线，称为这个点的轨迹。若点的轨迹是直线，这个点的运动称为直线运动；若点的轨迹是曲线，则称为曲线运动。曲线有平面曲线和空间曲线之分，所以曲线运动又可分为平面曲线运动和空间曲线运动。在本篇中只限于讨论比较常见的平面曲线运动。

### 一、点的运动方程

本段讨论如何用数学的方法，确定点对于任意选定的参考系在每一瞬时的位置。通常采用如下两种方法：

（1）自然法

设有汽车（视作动点 M）沿着图1—1所示的路线在广州——石牌之间行驶，要确定汽车在任一瞬时的位置，可先任意选定某站(例如梅花村站)作为参考点 O，并规定从该站朝石牌方向(定为正方向)沿汽车行驶的路线量到汽车所在位置的距离 s 取正值，而从该站朝广州方向(定为负方向）量得的距离取负值；这样，只要说出 s 是“+”多少米或“−”多少米，我们便可以清楚地知道汽车在这瞬时的位置了。代数值 s 称为汽车的弧坐标。假定汽车以21.6公里/小时亦即 6 米/秒的速度朝石牌方向等速行驶，并从汽车由梅花村站开出了 100 米的瞬时开始计算时间，则在第 t 秒末汽车的弧坐标为：

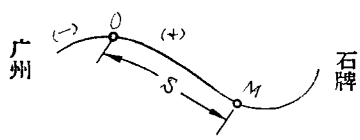

图 1—1

$$s=100+6t\text{（米）}.$$

可见，弧坐标 s 是随时间 t 而变化的，也就是说，s 是 t 的函数，即

$$s=f(t) \qquad (1—1)$$

这个函数关系称为汽车沿轨迹的运动方程。根据这个方程和已知轨迹，我们就可以确定

汽车在任一瞬时的位置。这种确定汽车在任一瞬时的位置的方法，可以推广于任何动点沿其已知轨迹运动的情形。

（2）坐标法

设动点M在某平面内相对于坐标系Oxy运动（图1—2），则M点在平面内的位置可以由两个坐标x、y完全确定。当动点M运动时，其坐标随时间而变化，因此，动点的坐标x、y都是时间t的函数，即

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1-2)$$

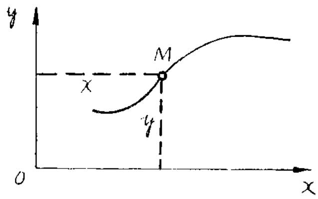

图 1—2

（1—2）式称为点的以直角坐标表示的运动方程。如果知道了这些方程，那么，我们就可以求出对应于任一瞬时的坐标值x和y，因此也就可以完全确定这个点的位置。从这些方程中消去时间t可以得到动点的轨迹方程。

## 二、点在直线运动中的速度和加速度

从物理学中已经知道，速度是描述点的运动快慢和方向的一个物理量。

设取动点的直线运动轨迹为x轴，在轴上任选一点O作为坐标原点（图1—3），则动点的运动方程为

$$x = f(t).$$

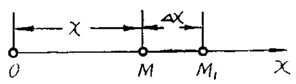

图 1—3

设在某一瞬时t，动点的位置是M，坐标是x，经过时间间隔$\Delta t$后，动点的位置是$M_1$，坐标是$x+\Delta x$，则坐标的增量$\Delta x$对于相应的时间间隔$\Delta t$的比值，称为动点在$\Delta t$时间内的平均速度，用$v^*$表示，即

$$v^* = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1-3)$$

工程上常常用平均速度的概念来估计物体在一段时间内运动的快慢。例如列车行驶速度70公里/小时，牛头刨床的切削速度50毫米/秒等等，都是指某种情况下的平均速度。

但是，只知道平均速度还不能满足工作上的需要，在许多问题中，我们往往需要知道物体在运动过程中某个瞬时的速度。这时，就要用到数学上关于极限的概念。当（1—3）式中的时间间隔$\Delta t$趋于零时，平均速度的极限值，就称为动点在瞬时t的瞬时速度（简称速度），用v表示，即

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = f'(t). \qquad (1-4)$$

因此，在直线运动中，动点的速度等于动点的坐标对于时间的一阶导数。

在某瞬时，如果导数$\frac{dx}{dt}$是正的，则x随时间而增大，因而点的运动方向与x轴的

正向相同；反之，如果导数$\frac{dx}{dt}$是负的，则x随时间而减少，因而点的运动方向与x轴的正向相反。

从公式（1—4）可以得知，速度的量纲为：

$$〔速度〕=\frac{〔长度〕}{〔时间〕},$$

因此，速度的单位是米/秒，厘米/秒等。

下面接着讲加速度。

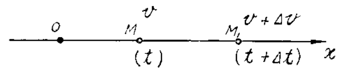


图 1—4

加速度是描述点在变速运动中速度变化快慢的一个物理量。

设动点在瞬时t位于M点（图1—4），速度为v；而在瞬时t+Δt则位于$M_1$点，速度变为v+Δv.那么，在时间间隔Δt内的速度增量Δv与Δt之比值，称为动点在该时间间隔Δt内的平均加速度，用$a^*$表示，即

$$a^*=\frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (1—5)$$

当时间间隔Δt趋于零时，平均加速度的极限值，称为动点在瞬时t的瞬时加速度（简称加速度），用$a$表示，即

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t). \qquad (1—6)$$

因此，在直线运动中，动点的加速度等于动点的速度对于时间的一阶导数，或者等于动点的坐标对于时间的二阶导数。

如果v和$a$同号，则速度的绝对值随时间而增大，这时点作加速运动；如果v和$a$异号，则速度的绝对值随时间而减小，这时点作减速运动。

加速度的量纲为：

$$〔加速度〕=\frac{〔速度〕}{〔时间〕}=\frac{〔长度/时间〕}{〔时间〕}=\frac{〔长度〕}{〔时间〕^2}.$$

因此，加速度的单位是米/秒$^2$，厘米/秒$^2$等。

**例1—1** 在笔直的道路上行驶的汽车，起动时的运动规律为$x=50+t^3$（x的单位为厘米，t的单位为秒），求汽车起动后10秒时的速度和加速度。

**解** 由公式（1—4）和（1—6）可知，当运动方程为$x=50+t^3$时，其速度为

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2,$$

加速度为 $$a=\frac{dv}{dt}=6t.$$

所以，在 $t=10$ 秒时，汽车的速度为

$$v=3\times10^{2}=300\ 厘米/秒,$$

加速度为 $\alpha=6\times10=60$ 厘米/秒$^{2}$.

从计算结果得知，v 和 $\alpha$ 同号，故汽车作加速运动。

## 三、等速直线运动和等加速直线运动

现在我们来讨论直线运动的两种特殊情形：等速直线运动和等加速直线运动。

（1）**等速直线运动** 当点沿直线轨迹运动时，如果速度保持不变，则该点的运动称为等速直线运动。这时，v=常量。根据（1—4）式有

$$dx=vdt,$$

把这等式在相应的上下限内积分，可得

$$\int_{x_0}^{x}dx=v\int_{0}^{t}dt,$$

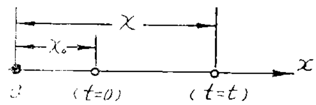


图 1—5

即 $$x=x_0+vt, \quad （1—7）$$

式中的 $x_0$ 是当时间 $t=0$ 时动点的坐标值(见图 1—5)，通常称为初位置。根据（1—7）式可以决定动点在任何瞬时的位置。

差数 $x-x_0$ 显然是点在 t 秒内所走过的路程，用 s 代表路程，则由（1—7）式有：

$$s=vt. \quad （1—8）$$

公式（1—8）说明：点在等速直线运动中所走过的路程等于速度与时间的乘积。

（2）**等加速直线运动** 如果点沿直线轨迹运动时，加速度保持不变，则该点的运动称为等加速直线运动。这时，$\alpha$=常量。根据（1—6）式有

$$dv=\alpha dt,$$

把这等式积分可得

$$v=v_0+\alpha t, \quad （1—9）$$

式中 $v_0$ 是当时间 $t=0$ 时的速度值，称为初速度。

在（1—9）式中用 $\frac{dx}{dt}$ 代替 v，得

$$\frac{dx}{dt}=v_0+\alpha t,$$

积分后得 $$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2, \quad （1—10）$$

或 $$s=x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2. \quad （1—11）$$

从公式（1—9）和（1—11）消去 t，还可得出另一个公式：

$$\left.\begin{aligned} s&=\frac{v^2-v_0{}^2}{2a},\\ \text{或}\qquad v^2&=v_0{}^2+2as. \end{aligned}\right\} \tag{1—12}$$

根据（1—10）式我们可以求得作等加速直线运动的点在瞬时 t 的位置。如果点恒沿轨迹的一个方向运动，则根据（1—11）式或（1—12）式可求得动点在时间间隔 t 内或在速度从 $v_0$ 变到 v 的过程中所走过的路程，因为在这种情况下，路程就等于 s（即坐标差数 $x-x_0$）的绝对值。这里应当注意，路程和坐标是两个完全不同的概念，例如作往复运动的牛头刨床的刨刀，当它走完一个周期时，其坐标还是等于初始值 $x_0$，而它所走过的路程却等于冲程的两倍。可见，坐标和路程不能混为一谈。

**例1－2** 飞机刚要离开地面起飞时的速度是 360 公里/小时，它在跑道上滑行了500米的距离。如果飞机滑行是等加速运动，问它滑行了多少时间？

**解** 根据题意知道：

初速度 $v_0=0$,

末速度 $v=360$公里/小时$=100$米/秒,

滑行的路程 $s=500$米。

于是，可选用公式（1—9）和（1—12）求解。先从（1—12）式求出加速度 $a$：

$$a=\frac{v^2-v_0{}^2}{2s}=\frac{100^2}{2\times500}=10\text{米/秒}^2,$$

再把 v、$a$ 之值代入（1—9）式，便得

$$t=\frac{v-v_0}{a}=\frac{100}{10}=10\text{秒},$$

即：飞机在跑道上滑行了 10 秒钟。

## 四、点在曲线运动中的速度和加速度

现在我们来研究当点作曲线运动时的速度和加速度。

（1）点在曲线运动中的速度

从物理学中已经知道，点作曲线运动时，其速度方向是不断改变的，为了同时表明点的运动快慢和方向，点在曲线运动中的速度须用矢量来表示。

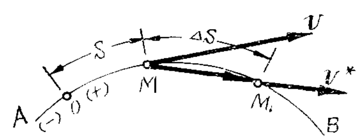

图 1—6

设动点沿曲线轨迹 AB 按运动规律 $s=f(t)$ 运动（图 1—6），在瞬时 t，动点位于 M 点，而在瞬时 $t+\Delta t$，动点走到了 $M_1$ 点。矢量 $\overrightarrow{MM_1}$（注）称为动点在时间间隔 $\Delta t$ 内的位移。$\overrightarrow{MM_1}$ 与 $\Delta t$ 的比值称为在这段时间间隔内的平均速度，即

---

注：符号 $\overrightarrow{MM_1}$ 表示以M点为起点、$M_1$ 为終点的矢量，这矢量的大小用$|\overrightarrow{MM_1}|$或 $MM_1$ 表示。

$$\vec{v}^* = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t};$$

若令$\Delta t \to 0$，则得动点在瞬时 t 的**瞬时速度**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}. \tag{1—13}$$

速度$\vec{v}$包含大小和方向两个因素，我们先来确定它的大小：以与$\Delta t$对应的弧坐标增量$\Delta s$来乘除（1—13）式的右端，可有

$$\left|\vec{v}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta s}\right| \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|,$$

由于

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta s}\right| = 1, \quad \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|,$$

故得速度的大小的表达式为

$$\left|\vec{v}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|. \tag{1—14}$$

上式中，若导数$\frac{ds}{dt}$为正，则 s 值随时间而增大，动点朝轨迹的正方向运动；若导数$\frac{ds}{dt}$为负，则 s 值随时间而减小，动点朝轨迹的负方向运动。于是，导数$\frac{ds}{dt}$可看作是速度的代数值，用 v 代表，则有

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{1—15}$$

现在再来看速度$\vec{v}$的方向。由图 1—6 可以看出，当$\Delta t \to 0$时，点$M_1$与M无限接近，因此在瞬时 t，速度$\vec{v}$的方向是沿着轨迹在M点的切线方向，并指向动点运动的一方。关于这个问题，我们联想到砂轮磨刀时火花沿轮缘的切线方向飞射出去的现象，就更可以理解。

（2）点在曲线运动中的加速度

当点作曲线运动时，其速度的大小可能随时间改变，也可能不改变，但速度的方向总是变的。我们知道，速度是一个矢量，对于矢量来讲，在它的大小和方向这两个因素中，只要有一个在改变，这矢量就在改变。因此，当点作曲线运动时，在任何一段时间

内都有速度的改变。例如沿着图1—7所示曲线运动的汽车(视作动点)，设在瞬时t位于M点，速度为$\vec{v}$，经过时间间隔$\Delta t$后运动到$M_1$点，速度变为$\vec{v_1}$。由于速度$\vec{v_1}$和$\vec{v}$并不相等，因此就有速度的改变。为了求出在时间$\Delta t$内速度的改变量（速度增量），可把$\vec{v_1}$看作是由$\vec{v}$与改变量$\Delta\vec{v}$所合成。这样，根据矢量合成的法则，把在$M_1$点的矢量$\vec{v_1}$平行移到M点（见图），然后从矢量$\vec{v}$的末端至矢量$\vec{v_1}$的末端作一矢量，它就是$\Delta\vec{v}$。$\Delta\vec{v}$称为$\vec{v_1}$与$\vec{v}$的矢量差，用式子表示就是：

$$\Delta\vec{v}=\vec{v_1}-\vec{v}\ .$$

由图可见，即使$\vec{v_1}$与$\vec{v}$大小相等，但因方向不同，二者之差仍不为零(注意，“$\vec{v_1}-\vec{v}$”不同于“$v_1-v$”，前者是矢量相减，遵从三角形法则，后者是数量相减）。

在曲线运动中，由于动点的速度在不断地改变着（即使没有大小的改变，也有方向的改变），因而，每一瞬时都存在着加速度。

下面我们来研究曲线运动的特殊情形——圆周运动的加速度。

($a$)等速圆周运动的加速度

动点在圆周上运动时，若其速度大小保持不变，则这种运动称为等速圆周运动。在这种运动中，动点速度的大小虽然不变，但方向则不断地随时间而改变。

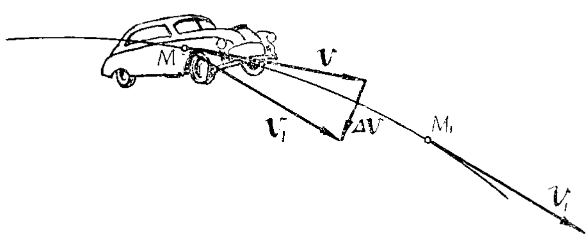


图 1—7

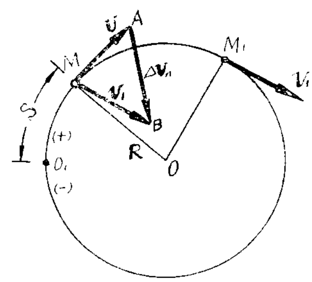


图 1—8

设动点沿着半径为R的圆周运动（图1—8）。在瞬时t位于M点，速度为$\vec{v}$；在瞬时$t+\Delta t$位于$M_1$点，速度为$\vec{v_1}$。则在$\Delta t$时间内由于速度方向的改变而得到的速度增量为

$$\Delta\vec{v_n}=\vec{v_1}-\vec{v}\ .$$

速度增量$\Delta\vec{v_n}$对于相应的时间间隔$\Delta t$的比值$\frac{\Delta\vec{v_n}}{\Delta t}$，当$\Delta t$趋近于零时的极限，称为点在瞬时t的加速度，以$\vec{a_n}$代表这加速度，则

$$\vec{a_n}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v_n}}{\Delta t}\ . \qquad (1—16)$$

下面来求加速度$\vec{a_n}$的大小和方向。为此，将$\vec{v_1}$平移到M点，并连接$\vec{v}$与$\vec{v_1}$两矢量的

末端而得到速度增量 $\Delta\vec{v}_n$ . 因我们所讨论的是等速圆周运动，速度的大小是一个常量，即 $|\vec{v}| = |\vec{v}_1|$，所以图中由 $\vec{v}$ 和 $\vec{v}_1$ 所构成的三角形 MAB 是一个等腰三角形，显然，它与等腰三角形 $OMM_1$ 是相似的（因为在这两个等腰三角形中，MA 和 MB 分别垂直于 OM 和 $OM_1$，有 $\angle AMB = \angle MOM_1$）。这两个三角形既然相似，则根据对应边成比例的关系有

$$\frac{|\Delta\vec{v}_n|}{|\vec{v}|} = \frac{MM_1}{R}.$$

由上式求出 $|\Delta\vec{v}_n|$，然后除以 $\Delta t$，可得

$$\frac{|\Delta\vec{v}_n|}{\Delta t} = \frac{|\vec{v}|\cdot MM_1}{R\cdot\Delta t}.$$

令 $\Delta t\to 0$ 而取极限，并考虑到此时 $M_1$ 点趋近于 M 点，弦长 $MM_1$ 趋近于弧长 $\overset{\frown}{MM_1}$（等于 $|\Delta s|$），便可得到加速度 $\vec{a}_n$ 的大小为

$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}_n|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\vec{v}|\cdot|\Delta s|}{R\cdot\Delta t}$$

$$= \frac{|\vec{v}|}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \frac{|\vec{v}|}{R}\cdot|v|,$$

故 $$a_n = \frac{v^2}{R}. \qquad (1-17)$$

现在再来确定加速度的方向。由图 1—8 可以看出：当 $M_1$ 点趋近于 M 点时，$\vec{v}_1$ 的方向趋近于 $\vec{v}$ 的方向，$\Delta\vec{v}_n$ 的方向亦将与 $\vec{v}$ 的方向垂直。由于 $\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$ 的方向与 $\Delta\vec{v}_n$ 的方向是一致的，所以在极限情况下，M 点的加速度垂直于 M 点的速度，即沿着半径指向圆心。因此，这个加速度称为向心加速度或法向加速度。这样，我们就可以对这个加速度下一个结论：点在等速圆周运动中的法向加速度的大小等于其瞬时速度的平方除以圆的半径，它的方向指向圆心。

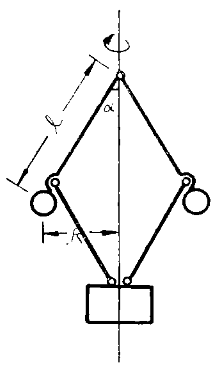

图 1—9

**例 1—3** 图1—9是离心调速器的示意图。设杆长 $l = 20$ 厘米；杆的倾斜角 $\alpha = 30°$ 时，小球按运动规律 $s = 75.2t$ 作圆周运动（s 以厘米计，t 以秒计）。求小球的法向加速度。

**解** 根据公式（1—17），小球的法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

其中速度v可按公式（1—5）求得：

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(75.2t)=75.2\text{厘米/秒},$$

圆周的半径R则为：

$$R=l\cdot\sin 30^\circ=20\times 0.5=10\text{厘米},$$

故得 $$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(75.2)^2}{10}=566\text{厘米/秒}^2.$$

（b）变速圆周运动的加速度

动点在圆周上运动时，如果速度的大小是不断地随时间而改变的，则这种运动称为变速圆周运动。

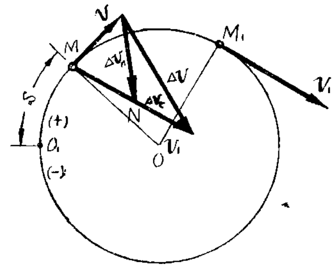

图 1—10

设动点作变速圆周运动，在瞬时t位于M点，经过时间间隔$\Delta t$运动到$M_1$点（图1—10），动点在M点时的速度为$\vec{v}$，而在$M_1$点时的速度为$\vec{v}_1$. 现求其加速度如下：将$\vec{v}_1$平移至M点（见图），按矢量关系

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_1-\vec{v}$$

作出动点在时间间隔$\Delta t$内的速度增量$\Delta\vec{v}$. 由于$\vec{v}_1$与$\vec{v}$大小不等，方向不同，故这速度增量同时包含了速度大小和方向的变化。现在我们来把它分解为反映速度大小变化和反映速度方向变化的两个分量。为此，在从M点作出的矢量$\vec{v}_1$上截取数值上等于$\vec{v}$的一段$\overrightarrow{MN}$(这$\overrightarrow{MN}$相当于图1—8中的$\overrightarrow{MB}$),剩下的一段用$\Delta\vec{v}_\tau$表示；再从矢量$\vec{v}$的末端至N点作一矢量，用$\Delta\vec{v}_n$表示。这样，$\Delta\vec{v}_\tau$和$\Delta\vec{v}_n$就是我们所需求的两分量，同时有

$$\Delta\vec{v}=\Delta\vec{v}_\tau+\Delta\vec{v}_n.$$

速度增量$\Delta\vec{v}$对于时间间隔$\Delta t$的比值，当$\Delta t\to 0$时的极限，就是点在瞬时t的加速度，以$\vec{a}$表示，则有

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}.$$

现在来讨论上面等式右边的两个分量：

第一项$\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}\right)$：因$\Delta\vec{v}_\tau$恒与$\vec{v}_1$平行，当$\Delta t\to 0$时，$\vec{v}_1$趋于与$\vec{v}$重合，这时$\Delta\vec{v}_\tau$也趋于与$\vec{v}$重合，故矢量$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}$的方向是沿轨迹在M点的切线方向。因此，这个矢量称为切向加速度，以$\vec{a}_\tau$表示。又因

$$|\Delta\vec{v}_\tau|=|v_1-v|,$$

故切向加速度的大小为

$$|\vec{a}_\tau| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{v_1 - v}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|,$$

从而得

$$|\vec{a}_\tau| = \left|\frac{dv}{dt}\right|. \tag{1—18}$$

上式中，导数 $\frac{dv}{dt}$ 是切向加速度的代数值，以 $a_\tau$ 表示，则得

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{1—19}$$

当导数 $\frac{dv}{dt}$ 为正值时，切向加速度 $\vec{a}_\tau$ 指向轨迹的正方向；反之，则指向轨迹的负方向。如果切向加速度的符号与速度的符号相同，则切向加速度的方向与点的运动方向相同，速度的绝对值越来越大（加速运动）；反之，如果切向加速度的符号与速度的符号相反，则切向加速度的方向与点的运动方向相反，速度的绝对值越来越小（减速运动）。

第二项 $\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}\right)$：这就是前面讨论过的动点的法向加速度 $\vec{a}_n$，其大小为

$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \vec{v}_n|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R},$$

此式也就是公式（1—17）。

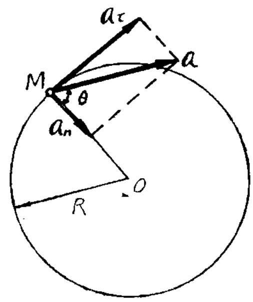

图 1—11

由此可见，动点作变速圆周运动时的全加速度 $\vec{a}$，等于切向加速度 $\vec{a}_\tau$ 和法向加速度 $\vec{a}_n$ 的几何和，即

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{1—20}$$

因为 $\vec{a}_\tau$ 与 $\vec{a}_n$ 互相垂直(图1—11)，所以在圆周运动中动点的全加速度的大小和方向分别由下列公式决定：

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}, \tag{1—21}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|a_\tau|}{a_n}, \tag{1—22}$$

式中 $\theta$ 代表 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}_n$ 之间的夹角。

**例 1—4** 飞轮加速转动，其轮缘上一点的运动规律为 $s=0.02t^3$（t 以秒计，s 以米计）。飞轮的半径为 40 厘米。求当此点的速度 v＝6米/秒时，此点的法向和切向加速度。

**解** 法向加速度可根据公式（1—17）求出如下：

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{6^2}{0.4}=90\ 米/秒^2\ .$$

为了求得切向加速度 $a_\tau$，须先求得速度 v 随时间 t 的变化规律。按公式(1—5)有

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\ (0.02t^3)=0.06t^2, \qquad (a)$$

因此，按公式（2—19）得：

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\ (0.06t^2)=0.12t\ . \qquad (b)$$

从式（a）知，当 v=6米/秒时，t 的值为

$$t=\sqrt{\frac{v}{0.06}}=\sqrt{\frac{6}{0.06}}=\sqrt{100}=10秒,$$

将此值代入式（b）中，即可求得这时 $a_\tau$ 的值：

$$a_\tau=0.12t=0.12\times10=1.2\ 米/秒^2\ .$$

前面讲的是圆周运动。若动点作一般的曲线运动(图 1—12)，其结论与圆周运动差不多，差别仅在于一般曲线的曲率半径 ρ 随时间而变化，而一个圆的曲率半径则为常量 R. 因此在计算一般曲线运动的加速度时，只要把公式（1—21）中的 R 换为 ρ 即可，换句话说，在一般曲线运动中法向加速度的大小为 $a_n=\frac{v^2}{\rho}$ .

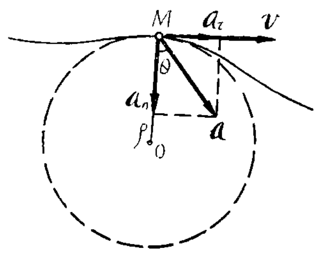

图 1—12

到此为止，我们讲了用自然法表示的点的运动方程，以及速度和加速度。但讲的都是一些特殊情况。为了对点的运动学有一个全貌的了解，现将点在各种运动情况下的运动方程，以及速度和加速度的表达式列在表1—1，供学习时参考。大家看了表1—1，应有如下基本认识：

（1）在曲线运动中，动点的加速度等于切向加速度与法向加速度的几何和。在等速曲线运动中切向加速度等于零；在变速曲线运动中，仅在速度$\vec{v}$到达极大値或极小值的瞬时$\left(\frac{dv}{dt}=0\right)$，切向加速度才等于零。法向加速度在任何曲线运动中都不为零〔仅在动点改变运动方向（v=0）或经过轨迹的拐点（ρ=∞）的瞬时是例外〕。

（2）在直线运动中没有法向加速度，即$a_n=0$；在等速直线运动中没有加速度，即 $a=0$.