普通高等院校数学类专业基础课规划教材

# 高等代数选讲

刘洪星　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等院校数学类专业基础课规划教材

# 高等代数选讲

刘洪星　编著

机械工业出版社

本书是“高等代数选讲”课程的教材或考研的复习资料，也可作为一年级学生的高等代数参考书、教师的参考书. 本书是由课堂讲义整理而成，作为讲义已经使用过五年. 内容共分九章，包括多项式、行列式，线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧几里得空间等知识. 内容编排上与北京大学数学系几何与代数教研室编写的《高等代数》自然章一致，但为了加强了前后知识的联系，对一些问题的讲解突出了综合运用. 每章按内容和知识点分类讨论，并且附有练习. 对一些问题给出了多种处理方法，并对许多问题的解法作了注解.

**图书在版编目（CIP）数据**

高等代数选讲/刘洪星编著. —北京：机械工业出版社，2009.9
普通高等院校数学类专业基础课规划教材
ISBN 978-7-111-27934-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等代数-高等学校-教材 Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 132731 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：韩效杰 版式设计：霍永明 责任校对：张 媛
封面设计：马精明 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2009 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 18 印张 · 349 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-27934-1
定价：27.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643
编辑投搞咨询：（010）88379408 xiaojie. han@ gmail. com

# 前 言

高等代数是大学数学专业的重要基础课程，它对后续知识的学习及学生的运算能力、逻辑推理能力、抽象概括能力的培养等都起着非常重要的作用.

该门课程有概念抽象、方法繁多、各模块知识联系紧密、系统性强的特点，加之题目浩如烟海，处理问题的方法纷繁多变，因而许多学生学习时感觉存在一定困难. 为了使学生加深对高等代数课程内容的理解，帮助他们掌握该课程处理问题的方法与技巧，进而提高他们分析与解决综合问题的能力，多年以来我们在数学专业学生中开设了“高等代数选讲”这一选修课程. 本书即是在多年授课的讲义基础上编写而成的.

全书按北京大学数学系几何与代数教研室编写的《高等代数》（第3版）的自然章顺序编排（新增的“双线性函数与辛空间”一章暂未涉及），共分九章，每章讨论若干问题. 讨论中包括知识归纳和对基本概念、基本理论、基本方法的分析与总结，并且对学生容易弄错的概念和带有共性的处理问题的方法等进行了一些标注. 书中所配例题多选自国内一些知名高校硕士研究生入学考试的典型试题，在一些问题的讨论中给出了多种方法，旨在使读者融会所学知识，培养他们统领全局、灵活解决实际问题的本领.

矩阵在整个数学体系中占有重要的地位，读者阅读本书时要特别注意其等价标准形、Jordan 标准形、合同意义下的对角形及最小多项式等的应用.

在本书编写过程中，参考了很多文献资料（详见参考文献），在此特对这些文献的作者表示衷心的感谢.

本书为高等院校数学专业高等代数选讲课程的教材；也可供数学专业学生考研复习使用，或作为数学专业高等代数或理工科专业线性代数课程的参考书.

本书的出版得到了河南大学教材出版基金的资助，也得到了河南大学数学与信息科学学院和机械工业出版社有关领导的大力支持. 机械工业出版社的编辑同志们作了大量卓有成效的工作，在此提出感谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，不当之处在所难免，如果读者有任何疑问或认为不妥之处，请联系我或者韩效杰编辑（xiaojie. han@ gmail. com），我们将不胜感谢！

刘洪星

于河南大学

# 目　　录

# 第一章　多　项　式

多项式理论在高等代数中是一块相对独立的内容,也是代数学中最基本的研究对象之一.该部分讨论的内容在进一步学习其他分支数学理论和解决实际问题时都有广泛应用.

## 一、多项式的概念、多项式相等

1. 设 $x$ 是一个文字(符号),$n$ 是非负整数,形如

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,(a_i \in P,\quad i = 0,1,2,\cdots,n,\quad n\text{ 是非负整数}) \tag{1}$$

的表达式,称为数域 $P$ 上的一元多项式.

数域 $P$ 上一元多项式全体构成的集合记为 $P[x]$.

在式(1)中,如果 $a_n \neq 0$,则 $a_nx^n$ 称为多项式(1)的首项,$a_n$ 称为首项系数,$n$ 称为多项式(1)的次数.

**注**　零多项式的次数定义为负无穷或无次数,而零次多项式是非零常数,要注意二者的区别.

2. 多项式的和、差运算归结为对应项系数的和、差运算.多项式乘法运算归结为逐项相乘后合并同类项,加法和乘法均适合交换律与结合律,并且满足乘法对加法的分配律及乘法的消去律.

**注**　这里要特别注意对消去律的理解,例如,设 $f(x),g(x) \in P[x]$,且 $(x-1)f(x) = (x-1)g(x)$,由消去律,立知 $f(x) = g(x)$,这一点与解方程求根时作恒等变形是不同的.

3. 次数定理

1) 如 $f(x)$,$g(x) \in P[x]$,则有

$$\partial(f(x) \pm g(x)) \leqslant \max\{\partial f(x),\quad \partial g(x)\}.$$

2) 如 $f(x)$,$g(x) \in P[x]$,则

$$\partial(f(x)g(x)) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

4. 多项式相等

两个多项式相等的充分必要条件是它们的同次项系数全相等.

证明多项式相等常结合以下思想:

1) 比较对应项系数;

2) 考虑多项式次数;

3）利用多项式根与次数的关系.

**例 1.1** 设$f(x)$，$g(x)$，$h(x)\in R[x]$，证明：若$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，则$f(x)=g(x)=h(x)=0$，并说明该结论在复数域上不再成立.

**证法 1**（考虑次数） 题设$f^2(x)=x(g^2(x)+h^2(x))$.

如$h(x)\neq 0$，则$h^2(x)$的次数为偶数，且$g^2(x)+h^2(x)$首项系数不为 0，所以$x[g^2(x)+h^2(x)]$为奇数次多项式，这与$f^2(x)=x(g^2(x)+h^2(x))$矛盾，此说明只有$h(x)=0$.

同理有$g(x)=0$，从而可得$f^2(x)=0$，故$f(x)=0$.

**证法 2**（考虑根的个数） 假如$g(x)\neq 0$，则存在实数$x_0<0$，使$g(x_0)\neq 0$（否则$g(x)$有无数多个根，与$g(x)\neq 0$矛盾）. 于是$f^2(x_0)=x_0(g^2(x_0)+h^2(x_0))<0$，得出矛盾. 从而$g(x)=0$.

同理$h(x)=0$，从而有$f(x)=0$.

**注** 对题目后半部分，只要取$g(x)=ix$，$h(x)=x$，$f(x)=0$即可说明.

**例 1.2** 证明：数域$P$上多项式$f(x)=kx\Leftrightarrow\forall a,b\in P$，有

$$f(a+b)=f(a)+f(b).$$

**证明** 必要性显然，下面仅证充分性.

**证法 1** 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，由题设，对任何的$c\in P$，有

$$f(2c)=f(c)+f(c)=2f(c).$$

所以

$$\begin{aligned}0&=f(2c)-2f(c)\\&=(2^n-2)a_nc^n+(2^{n-1}-2)a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+(2^2-2)a_2c^2-a_0.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{gathered}2^n-2\neq 0,\\2^{n-1}-2\neq 0,\\\vdots\\2^2-2\neq 0,\end{gathered}$$

结合$c$的任意性得

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_2=a_0=0.$$

所以$f(x)=a_1x$，$a_1\in P$. 证完.

**证法 2** 设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，$a_n\neq 0$，

因为 $$f(0+a)=f(0)+f(a),a\in P,$$

所以 $$f(0)=0,$$

此说明$f(x)$常数项为 0.

当$f(x)=0$时，结论显然成立.

当$f(x)\neq 0$时，设$\partial f(x)=n>1$. 这时，$f(x)\neq a_nx^n$（否则，一方面 $f(1+$

$1)=f(2)=a_n2^n$，另一方面 $f(1+1)=f(1)+f(1)=2a_n$，从而有 $a_n2^n=2a_n$，进而 $n=1$，得出矛盾）. 由此，$f(x)$ 有非零复根 $\alpha$，且由题设知

$$f(2\alpha)=f(\alpha)+f(\alpha)=0.$$
$$f(3\alpha)=f(\alpha)+f(2\alpha)=0.$$
$$\vdots$$

此说明 $f(x)$ 有无穷多个根，与 $f(x)\neq 0$ 矛盾. 因此 $f(x)$ 是常数项为零的一次多项式.

**注** 证法 1 考虑多项式系数，而证法 2 中用到 $n$ 次多项式在复数域 $C$ 上恰有 $n$ 个根，出发点不同，殊途同归.

**例 1.3** （河南大学）设 $f(x)\in P[x]$，如

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\qquad (\forall x,y\in P),$$

则 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$.

**证明** 如 $f(x)=0$，结论已证.

如 $f(x)\neq 0$，因为

$$f(2x)=f(x)\cdot f(x)=f^2(x)$$

所以 $f(x)$ 是零次多项式，令 $f(x)=c\neq 0$，由

$$c=f(0)=f(0+0)=f^2(0)=c^2$$

知 $c=1$，即 $f(x)=1$.

**例 1.4** 设 $f(x)$ 是非零实系数多项式，$k$ 是一个正整数，且 $f(f(x))=f^k(x)$，则 $f(x)$ 为零次多项式，或 $f(x)=x^k$.

**证明** 若 $\partial f(x)=0$，则命题已证.

若 $\partial f(x)>0$，令 $f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$，$a_m\neq 0$.

故有

$$a_m(a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0)^m+\cdots+a_0=(a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0)^k,$$

比较次数得

$$mk=m^2,$$

因为 $m>0$，所以 $k=m$.

即 $$a_mf^m(x)+\cdots+a_1f(x)+a_0=f^m(x),$$

所以 $$(a_m-1)f^m(x)+\cdots+a_1f(x)+a_0=0.$$

故 $a_m=1$，$a_i=0$，$i=0,1,2,\cdots,m-1$.

所以 $$f(x)=x^m=x^k.$$

**例 1.5** 求所有满足条件 $xp(x-1)=(x-2)p(x)$ $(x\in R)$ 的多项式 $p(x)$.

**解** 在已知等式中，令 $x=0,1$，得 $p(0)=p(1)=0$.

由因式定理，$p(x)$ 有因式 $x(x-1)$，设

$$p(x)=x(x-1)Q(x),Q(x)\in R[x]. \qquad ①$$

所以
$$p(x-1)=(x-1)(x-2)Q(x-1). \qquad ②$$

将式①,式②代入已知等式,由消去律得 $Q(x)=Q(x-1)$,由此有

$$Q(0)=Q(1)=Q(2)=\cdots,$$

即有无穷多个 $x$,使 $Q(x)$ 均取同一值 $a$,所以 $Q(x)=a$. 故 $p(x)=ax(x-1)=ax^2-ax$,$a$ 为常数. 不难验证,对任一常数 $a$,如上 $p(x)$ 满足题设要求.

## 二、多项式的带余除法、整除

1. 带余除法定理　设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$g(x)\neq 0$,则存在唯一的一对多项式 $q(x),r(x)\in P[x]$,使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

这里 $r(x)=0$,或 $\partial r(x)<\partial g(x)$.

2. 多项式整除的概念及性质

1)**定义**　设 $f(x),g(x)\in P[x]$,如存在多项式 $h(x)\in P[x]$,使 $f(x)=g(x)h(x)$,则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$,记为 $g(x)\mid f(x)$.

**注**①　数域 $P$ 上多项式的整除与整数的整除性不同. 比如,作为数域 $P$ 上多项式有 $3\mid 10$,但在整数环上,3 不是 10 的因式.

②　多项式的整除性不因系数域的扩大而改变,即设 $P,\bar{P}$ 是两个数域,且 $P\subset\bar{P}$,$f(x),g(x)\in P[x]$,如果在 $P[x]$ 中 $g(x)\nmid f(x)$,那么 $\bar{P}$ 上仍有 $g(x)\nmid f(x)$,这一点可由带余除法定理中的唯一性给出证明.

2)**性质**

①　任一多项式都整除它自身;

②　任一多项式都整除零多项式;

③　零多项式只能整除零多项式;

④　零次多项式能整除任一多项式,但它只能被零次多项式整除;

⑤　如 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid f(x)$,那么 $f(x)=cg(x)$,$c$ 为非零常数;

⑥　如 $f(x)\mid g(x)$,$g(x)\mid h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$;

⑦　如果 $f(x)\mid g_i(x)$,$i=1,2,\cdots,r$,则

$$f(x)\mid u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x),$$

这里 $u_i(x)(i=1,2,\cdots,r)$ 是数域 $P$ 上的任意一组多项式.

**注**　由性质⑦可得

a)　$g(x)\mid f_1(x),g(x)\mid f_2(x)\Rightarrow g(x)\mid(f_1(x)\pm f_2(x))$.

b)　$g(x)\mid(f_1(x)+f_2(x))$,且 $g(x)\mid f_1(x)$,则 $g(x)\mid f_2(x)$.

c)　$g(x)\mid(f_1(x)+f_2(x))$,但 $g(x)\nmid f_1(x)$,则 $g(x)\nmid f_2(x)$. 但是要注意:如 $g(x)\nmid f_1(x)$,$g(x)\nmid f_2(x)$,不能得出 $g(x)\nmid(f_1(x)+f_2(x))$.

3）证明多项式整除的常见方法有

Ⅰ）利用定义和性质，并注意结合运算公式

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}),$$

$$x^{2k+1} + a^{2k+1} = (x+a)(x^{2k} - ax^{2k-1} + \cdots - a^{2k-1}x + a^{2k}) \text{ 等；}$$

Ⅱ）利用不可约多项式的性质；

Ⅲ）利用数学归纳法；

Ⅳ）利用根与一次因式的关系；

Ⅴ）利用标准分解式；

Ⅵ）利用多项式互素的性质.

3. 综合除法

以 $g(x) = x - a$ 除 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 时，常用如下简便格式

$$\begin{array}{c|cccccc}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & \downarrow & +)\,ab_{n-1} & +)\,ab_{n-2} & \cdots & +)\,ab_1 & ab_0 \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & \multicolumn{1}{|c}{c_0}
\end{array}$$

求得商式 $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$，余式 $r(x) = c_0$.

**例 1.6**　设 $f(x) \in P[x]$，证明 $x \mid f(x)$ 的充要条件是 $x \mid f^k(x)$，$k$ 是正整数.

**证明**　必要性，显然.

充分性　设 $x \nmid f(x)$，令

$$f(x) = xq(x) + r, r \neq 0,$$

则
$$f^k(x) = (xq(x) + r)^k \xlongequal{\triangle} xQ(x) + r^k, r^k \neq 0$$

这里 $Q(x)$ 是关于 $x$ 的 $(\partial(f(x)))^k - 1$ 次多项式.

由带余除法定理知 $x \nmid f^k(x)$，与已知矛盾.

**注**　这里用带余除法定理给出了充分性的证明. 事实上，我们还可以考虑如下两个方法给出证明.

$1^0$　由于 $x$ 是不可约多项式，由 $x \mid f^k(x)$，立知 $x \mid f(x)$.

$2^0$　$x \mid f^k(x) \Rightarrow f^k(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x \mid f(x)$.

其中 $1^0$ 是利用不可约多项式的性质；$2^0$ 利用了根与一次因式的关系.

**例 1.7**　对任意的自然数 $n$，均有 $x^2 + x + 1 \mid x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}$.

**证法 1**　归纳法

$n = 0$ 时，

$$x^2 + x + 1 \mid x^2 + (x+1).$$

设 $n = k$ 时，

$$x^2+x+1 \mid x^{k+2}+(x+1)^{2k+1},$$

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}x^{k+3}+(x+1)^{2k+3} &= x^{k+3}+(x+1)^2(x+1)^{2k+1}\\ &= x^{k+3}+x(x+1)^{2k+1}+(x^2+x+1)x^{2k+1}\\ &= x[x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}]+(x^2+x+1)x^{2k+1}.\end{aligned}$$

由上式及归纳假设知 $x^2+x+1 \mid x^{n+3}+(x+1)^{2k+3}$，命题得证.

**证法 2** 设 $x^2+x+1$ 的二根记为 $\omega,\omega^2(\omega^3=1)$.

因为

$$\begin{aligned}\omega^{n+2}+(\omega+1)^{2n+1} &= \omega^{n+2}+(-\omega^2)^{2n+1}\\ &= \omega^{n+2}-\omega^{4n+2}\\ &= \omega^{n+2}-\omega^{3n}\omega^{n+2}=0.\\ (\omega^2)^{n+2}+(\omega^2+1)^{2n+1} &= \omega^{2n+4}+(-\omega)^{2n+1}\\ &= \omega^{2n+1}\omega^3-\omega^{2n+1}=0.\end{aligned}$$

所以

$$x-\omega \mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1},x-\omega^2 \mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}.$$

结合 $x-\omega$ 与 $x-\omega^2$ 互素，$x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)$ 知

$$x^2+x+1 \mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}.$$

**例 1.8** 设 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$，$g(x)=(f(x)+x^n)^2-x^n$.

**证明** $f(x) \mid g(x)$

**证明** 因为

$$\begin{aligned}g(x) &= (f(x)+x^n)^2-x^n\\ &= f^2(x)+2x^nf(x)+x^n(x^n-1)\end{aligned}$$

由 $f(x) \mid x^n-1$ 可知 $f(x) \mid g(x)$.

**例 1.9** 设 $f_i(x)\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 是数域 $P$ 上的多项式，证明：

$(x^n+\cdots+x+1) \mid [x^{n-1}f_1(x^{n+1})+x^{n-2}f_2(x^{n+1})+\cdots+xf_{n-1}(x^{n+1})+f_n(x^{n+1})]$ 的充分必要条件是 $(x-1) \mid f_i(x)$，$i=1,2,\cdots,n$.

**证明** 由根与一次因式的关系，只要证明 $f_i(1)=0$ 即可.

设 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 的根为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，它们是 $n+1$ 次单位根，这里 $\varepsilon_i \neq 1$. 则

$$(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1) \mid (x^{n-1}f_1(x^{n+1})+\cdots+xf_{n-1}(x^{n+1})+f_n(x^{n+1}))$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\varepsilon_1^{n-1}f_1(1)+\varepsilon_1^{n-2}f_2(1)+\cdots+\varepsilon f_{n-1}(1)+f_n(1)=0,\\ \varepsilon_2^{n-1}f_1(1)+\varepsilon_2^{n-2}f_2(1)+\cdots+\varepsilon_2 f_{n-1}(1)+f_n(1)=0,\\ \vdots\\ \varepsilon_n^{n-1}f_1(1)+\varepsilon_n^{n-2}f_2(1)+\cdots+\varepsilon_n f_{n-1}(1)+f_n(1)=0.\end{cases}$$

$\Leftrightarrow f_i(1) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \mid f_i(x), i = 1,2,\cdots,n.$

**例 1.10** 已知 $f(x) = (x+1)^{2n} + 2x(x+1)^{2n-1} + \cdots + (2x)^n(x+1)^n$.

证明：$F(x) = (x-1)f(x) + (x+1)^{2n+1}$ 能被 $x^{n+1}$ 整除.

**证明** 因为

$$\begin{aligned}(x-1)f(x) &= (x-1)[(x+1)^n + 2x(x+1)^{n-1} + \cdots + (2x)^n](x+1)^n \\ &= -((x+1)-2x)[(x+1)^n + 2x(x+1)^{n-1} + \cdots + (2x)^n](x+1)^n \\ &= -[(x+1)^{n+1} - (2x)^{n+1}](x+1)^n \\ &= -(x+1)^{2n+1} + (2x)^{n+1}(x+1)^n,\end{aligned}$$

所以

$$F(x) = x^{n+1}2^{n+1}(x+1)^n,$$

即 $x^{n+1} \mid F(x)$.

**例 1.11** 设 $f(x) = x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}, g(x) = x^2 - x + 1$,

其中，$m,n,p$ 为非负整数，则 $g(x) \mid f(x)$ 的充要条件是 $m,n,p$ 具有相同的奇偶性.

**证明** $\Rightarrow$) 令 $f(x) = g(x)q(x)$. 设 $g(x) = x^2 - x + 1$ 的二根为 $\omega_1, \omega_2$，则 $\omega_1 + \omega_2 = 1, {\omega_1}^2 + {\omega_2}^2 = -1$，且 $\omega_i^3 = -1(i = 1,2)$.

又因为 $g(x) \mid f(x)$，所以 $g(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根. 所以

$$f(\omega_1) = (-1)^m - (-1)^n\omega_1 + (-1)^p\omega_1^2 = 0.$$

$$f(\omega_2) = (-1)^m - (-1)^n\omega_2 + (-1)^p\omega_2^2 = 0.$$

二式相加得

$$2(-1)^m - (-1)^n(\omega_1 + \omega_2) + (-1)^p(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0,$$

即
$$2(-1)^m - (-1)^n + (-1)^p(-1) = 0.$$

所以
$$2(-1)^m = (-1)^n + (-1)^p.$$

因此，$m$ 为奇数 $\Rightarrow n,p$ 为奇数；$m$ 为偶数 $\Rightarrow n,p$ 为偶数.

$\Leftarrow$) 当 $m,n,p$ 同为奇数，或同为偶数时，

$$f(\omega_1) = (-1)^m - \omega_1(-1)^n + (-1)^p\omega_1^2 = \begin{cases} -g(\omega_1) & m,n,p \text{ 为奇数时}, \\ g(\omega_1) & m,n,p \text{ 为偶数时}. \end{cases}$$

由 $g(\omega_1) = 0$ 知，$\omega_1$ 是 $f(x)$ 的根. 同理 $\omega_2$ 是 $f(x)$ 的根.

又 $(x-\omega_1, x-\omega_2) = 1, g(x) = (x-\omega_1)(x-\omega_2)$，所以 $g(x) \mid f(x)$.

**例 1.12** 证明：$g^2(x) \mid f^2(x) \Leftrightarrow g(x) \mid f(x)$.

**证明** 充分性显然，仅证必要性，设

$$f(x) = bp_1^{l_1}(x)\cdots p_r^{l_r}(x) \quad l_i > 0, i = 1,2,\cdots,r.$$

由 $g(x) \mid f^2(x)$ 知，$g(x)$ 的不可约因式均在 $f(x)$ 中出现，令

$g(x) = ap_1^{k_1}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)$, $k_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,k_r$. 由于 $g^2(x) \mid f^2(x)$ 得

$$a^2 p_1^{2k_1}(x)\cdots p_r^{2k_r}(x) \mid b^2 p_1^{2l_1}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x),$$

所以

$$p_i^{2k_i}(x) \mid b^2 p_1^{2l_1}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x)$$

又

$$(p_i^{2k_i}(x), p_1^{2l_1}(x)\cdots p_{i-1}^{2l_{i-1}}(x)p_{i+1}^{2l_{i+1}}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x)) = 1,$$

因此

$$p_i^{2k_i}(x) \mid p_i^{2l_i}(x), i = 1,2,\cdots,r.$$

所以 $2k_i \leqslant 2l_i, i = 1,2,\cdots,r$，即 $k_i \leqslant l_i, i = 1,2,\cdots,r$. 因此 $g(x) \mid f(x)$.

**例 1.13** （南航 2004）(1) 设 $f(x) = x^7 + 2x^6 - 6x^5 - 8x^4 + 19x^3 + 9x^2 - 22x + 8$，$g(x) = x^2 + x - 2$，将 $f(x)$ 表成 $g(x)$ 的方幂和，即将 $f(x)$ 表成

$$f(x) = c_k(x)g^k(x) + c_{k-1}(x)g^{k-1}(x) + \cdots + c_1(x)g(x) + c_0(x),$$

其中 $\partial c_i(x) < \partial g(x)$，或 $c_i(x) = 0, i = 0,1,\cdots,k$.

(2) 设 $d(x) = (f(x), g(x))$，$f(x) \mid h(x)$ 和 $g(x) \mid h(x)$. 证明：

$$f(x)g(x) \mid d(x)h(x).$$

**解** ① 因为 $f(x) = g(x)[x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 10x - 3] + (x + 2)$,

$$x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 10x - 3 = g(x)(x^3 - 3x + 2) + (2x + 1),$$

$$x^3 - 3x + 2 = g(x)(x - 1),$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)[g(x)(x^3 - 3x + 2) + (2x + 1)] + x + 2 \\ &= g^2(x)(x^3 - 3x + 2) + (2x + 1)g(x) + (x + 2) \\ &= (x - 1)g^3(x) + (2x + 1)g(x) + (x + 2). \end{aligned}$$

② **证明** 因为 $d(x) = (f(x), g(x))$，所以 $\exists u(x), v(x)$，使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x), \qquad ①$$

而

$$f(x) \mid h(x), \quad g(x) \mid h(x),$$

所以存在多项式 $m(x), n(x)$ 使

$$h(x) = f(x)m(x) = g(x)n(x). \qquad ②$$

将式 ① 两边同乘 $h(x)$，得

$$u(x)f(x)h(x) + v(x)g(x)h(x) = d(x)h(x). \qquad ③$$

式 ② 代入式 ③ 得

$$[u(x)n(x) + v(x)m(x)]f(x)g(x) = d(x)h(x).$$

所以 $f(x)g(x) \mid d(x)h(x)$.

**例 1.14** 求一个次数最低的实系数多项式，使其被 $x^2 + 1$ 除余 $x + 1$，被 $x^3 + x^2 + 1$ 除余 $x^2 - 1$.

**解法 1** 由题设，令 $f(x) = (x^2 + 1)m(x) + (x + 1)$，则存在多项式 $n(x)$，使

$$(x^2 + 1)m(x) + (x + 1) = (x^3 + x^2 + 1)n(x) + (x^2 - 1).$$

显然 $\partial f(x) \geqslant 2$,为求最小次数的 $f(x)$. 令 $n(x) = ax + b$,取 $x = \mathrm{i}$ 得 $\mathrm{i} + 1 = -\mathrm{i}(a\mathrm{i} + b) - 2$,

即
$$(b+1)\mathrm{i} + (-a+3) = 0.$$
所以 $b = -1, a = 3$,从而 $n(x) = 3x - 1$.

可以验证,
$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 + x^2 + 1)n(x) + x^2 - 1 \\ &= 3x^4 + 2x^3 + 3x - 2 \end{aligned}$$
确实是被 $x^2 + 1$ 除余 $x + 1$ 的多项式.

**解法 2** 同解法 1,有多项式 $m(x), n(x)$ 使
$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)m(x) + (x+1) \\ &= (x^3 + x^2 + 1)n(x) + (x^2 - 1) \\ &= [x(x^2+1) + (x^2+1) - x]n(x) + (x^2+1) - 2 \end{aligned}$$
于是应有 $-xn(x) - 2 - (x+1)$ 是 $x^2 + 1$ 的倍式,$\partial n(x) \geqslant 1$,设 $n(x) = ax + b$,则可设 $-x(ax+b) - x - 3 = (-a)(x^2+1)$. 比较两边同次项系数得
$$\begin{cases} b + 1 = 0 \\ -a = -3 \end{cases},\text{即}\begin{cases} b = -1 \\ a = 3. \end{cases}$$
所以 $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 3x - 2$ 即为所求.

## 三、关于多项式的最大公因式、互素及最小公倍式

1. 设 $f(x), g(x) \in P[x]$,对 $P[x]$ 中多项式 $d(x)$,如果 $d(x) \mid f(x)$,$d(x) \mid g(x)$,则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式. 因为非零常数整除任一多项式,所以任意两个多项式都有公因式.

2. 如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式 $m(x)$ 都是 $d(x)$ 的因式,则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式. 求两个多项式最大公因式最一般的方法是辗转相除法.

**注** 零和零的最大公因式为零多项式. 当多项式 $f(x), g(x)$ 不全为 0 时,记 $(f(x), g(x))$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 首项系数为 1 的最大公因式. 请读者思考如下命题错在何处?

**命题** 如果数域 $P$ 上多项式 $p(x) \mid f(x)$,则 $(f(x), p(x)) = p(x)$.

3. 设 $f(x), g(x) \in P[x]$,如 $P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式,则存在 $u(x), v(x) \in P[x]$,使
$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

**注 1)** 如上 $u(x), v(x)$ 不是唯一的. 事实上,如果上式成立,那么对任一多项式 $n(x)$,令 $u_1(x) = u(x) - n(x)g(x)$,$v_1(x) = v(x) + n(x)f(x)$. 显然有
$$d(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x).$$

**注 2)** 如 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合,即

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x),$$

$d(x)$ 未必是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 譬如,当 $f(x) = g(x) = 1$ 时虽然有等式

$$d(x) = 2x = x \cdot 1 + x \cdot 1$$

但因 $2x$ 不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,当然更不是它们的最大公因式了. 但是,如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,又是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合,则 $d(x)$ 一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式,这一事实在多项式最大公因式证明中经常用到.

4. 多项式的互素

1) 设 $f(x),g(x) \in P[x]$,如 $(f(x),g(x)) = 1$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

2) 互素多项式的性质

① 设 $f(x),g(x) \in P[x]$,则 $f(x),g(x)$ 互素的充要条件是存在 $u(x),v(x) \in P[x]$,使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

② 如 $(f(x),g(x)) = 1$,且 $f(x) \mid g(x)h(x)$,则 $f(x) \mid h(x)$.

③ 如 $(f(x),g(x)) = 1$,且 $f(x) \mid h(x),g(x) \mid h(x)$,则 $f(x)g(x) \mid h(x)$.

④ 如 $(f(x),g(x)) = 1,(f(x),h(x)) = 1$,则 $(f(x),g(x)h(x)) = 1$.

⑤ 如果 $P,\bar{P}$ 是两个数域,$P \subset \bar{P}$,则 $P[x]$ 中多项式 $f(x),g(x)$ 在数域 $P$ 上互素的充要条件是它们在 $\bar{P}$ 上互素.

5. 最小公倍式

**定义** 设 $f(x),g(x) \in P[x]$,如 $P[x]$ 中多项式 $m(x)$ 满足 $f(x) \mid m(x)$, $g(x) \mid m(x)$,且 $m(x)$ 能整除 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公倍式,称 $m(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式. $f(x)$ 与 $g(x)$ 首项系数为 1 的最小公倍式记为 $[f(x),g(x)]$.

**例 1.15** 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $P[x]$ 上两个次数大于 0 的多项式.

证明:若 $(f(x),g(x)) = 1$,则 $\exists u(x),v(x) \in P[x]$,使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1,$$

其中 $\partial u(x) < \partial g(x),\partial v(x) < \partial f(x)$,并且满足这样条件的 $u(x),v(x)$ 是唯一的.

**证明** 因为 $(f(x),g(x)) = 1$,故存在 $s(x),t(x) \in P[x]$,使

$$s(x)f(x) + t(x)g(x) = 1. \qquad (1)$$

由于 $f(x)$、$g(x)$ 的次数均大于 0,故 $g(x) \nmid s(x)$,$f(x) \nmid t(x)$,令

$$s(x) = g(x)h(x) + u(x).\ 0 \leqslant \partial u(x) < \partial g(x),$$
$$t(x) = f(x)k(x) + v(x).\ 0 \leqslant \partial v(x) < \partial f(x).$$

代入式(1)得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) + [h(x) + k(x)]f(x)g(x) = 1.$$

由此等式知,

$$h(x) + k(x) = 0,$$