2002年全国硕士研究生入学考试
基础知识复习丛书

数学（经济类）

刘西垣 主编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学.经济类/刘西垣主编. —北京：高等教育出版社，2001.3
(2002年全国硕士研究生入学考试基础知识复习丛书)
ISBN 7-04-008605-0

Ⅰ.数… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第08991号

2002年全国硕士研究生入学考试基础知识复习丛书——数学(经济类)
刘西垣 主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**邮政编码**	100009
电　　话	010—64054588	**传　　真**	010—64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京市朝阳区北苑印刷厂		
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2001年3月第1版
印　　张	23	**印　　次**	2001年3月第1次印刷
字　　数	550 000	**定　　价**	24.10元

编者的话

2002年全国硕士研究生入学考试又要开始准备了．为了协助广大考生加强数学训练，提高应试能力，我们编写了数学科目的考前复习指导用书．数学科目的考试分理工和经济两个大类．对于每一大类，复习指导用书又分复习用书(即《数学·附解题指导》)和练习用书(即《数学·模拟试题与试卷》)两册，配套使用．

复习用书分为三个部分：高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步．每一部分又分为若干章节．编写指导思想、结构和内容以教育部制定的考试大纲为依据．陈述方式除给出基本事项或知识要点外，均通过典型例题或历年试题来介绍解题思路与方法．考虑到应试的实际情况，题型的选择与解法也可能是综合型的，即在保证重点的情况下不排除运用后续的知识．

练习用书分为三个部分：单元练习、综合练习、模拟试题．单元练习部分仍按章节体系编写；综合练习则只按学科分支编排；模拟试题按专业分类，每类三组题[如数学(一)有三组……数学(四)有三组]．练习用书供考生自我练习用，虽然附有参考答案，但考生务必自己首先独立解题，然后，根据需要，再与解答进行对照和分析．

历年研究生考试数学试题的特点是量大、面广，综合性强，而从近两年的情况看，少数试题还有深化的趋势，为了取得好的成绩，我们对考生的考前复习提出以下三点对策．

1．“一传到位”．这里借用排球运动的术语，是指在解题时一定要及时弄清楚本命题内容所涉及的范围，以及熟悉解决这类问题的基本途径或常规方法．例如求函数的导数问题，首先要弄明白该函数是以什么形式出现的，若是分段函数，则在分段点必须用左、右求导的方法进行；如果该函数以积分形式出现，如求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t.$$

因为是对x求导，而积分号下又含有变量x，这在定积分的学习中是没有的，所以我们只能设法通过变换将积分号下的x化去，使被积函数中不再出现x，即写成

$$\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal[\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u]{x-t=u}-x\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u.$$

然后就可以求导了．

2．“胸有典型”．这里所说的“典型”是指每一部分内容里最基本且常用的某些范例．而“胸有”的意思是必须熟知这些事实．例如在微积分中的两个重要函数极限；基本初等函数的导数公式；等价极限关系：

$$\varphi(x)\sim\sin\varphi(x)\sim\tan\varphi(x)\sim\ln(1+\varphi(x))\ (x\to 0),$$

其中$\varphi(x)\to 0\ (x\to 0)$；$p$级数，$x^{-p}$的广义积分；基本幂级数的和，如

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),$$

以及基本初等函数泰勒级数展式等等.显然,若对这些事实能"想到就来",则将对解答试题大有助益.

3."步步为营".为了从形式上减少命题数量,也为检查考生融会贯通的能力,试卷上常出现多种概念、方法和要求并存的所谓综合命题.此时,我们必须将整个命题分成若干小题,一步一步地解出来.要做到这一点,第一要敢于分解,第二要善于分解.如 1998 年微积分部分有试题:

"设函数 $f(x)$在 $[1,+\infty)$ 上连续.若由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=1$,$x=t\ (t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)].$$

试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程,并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解."

这一试题属于综合题型.从命题 100 多字的陈述中仔细读下来,易知它涉及平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体体积的定积分表达式、微分方程及其通解和特解等内容,从而要分步骤一一解决.

第一步是正确写出题目中所定义的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积公式

$$V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x.$$

第二步是利用题设得出函数 $y=f(x)$ 满足的微分方程,即

$$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)],$$

或

$$3\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=t^2f(t)-f(1).$$

两边对变量 t 求导数,得 $\qquad 3f^2(t)=2tf(t)+t^2f'(t).$

由此即可得到 y 满足的微分方程 $\qquad x^2y'=3y^2-2xy.$

第三步是判断方程的类型,选择适当的解法求出方程满足条件 $y\big|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解来.

由于方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}$$

的形式,从而它是齐次方程.利用变换 $y=xu$ 即可把方程化归新未知函数 u 的可分离变量的方程,再求通解和满足给定条件的特解就不困难了.

总起来说,就是一传到位,胸有典型,步步为营.

此外,需要提醒读者的是,对于本书所编的大量例题和练习,并非每题都要细读细做,而应根据自己的具体情况来定.虽然每年的试题都有些变化,但知识的范围和结构基本相同,因此,掌握基本概念、基础理论、常用方法是最重要的.精读,学会解决一定数量的范例不失为应试的

重要方法.

本书是北京大学数学科学学院举办的硕士研究生入学考试数学辅导班的教材. 对本书中存在的不足之处,请广大读者提出意见和建议. **欢迎考生参加我院举办的暑期辅导班**.

编　者

于北京大学数学科学学院

2001 年 2 月

目　　录

第一部分　高等数学

第一章　函　数

按照考试大纲，本章的考试内容包括：一元函数和多元函数的概念，函数的表示法，二元函数的几何意义，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数、复合函数、隐函数和分段函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数等方面．要求考生理解一元函数的概念并掌握其表示法，了解多元函数的概念，了解二元函数的表示法与几何意义，了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性，理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念，掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念，会建立简单应用问题中的函数关系式．

在历年的试题中，既有单纯考查函数有关知识的题目，还有许多试题是把函数有关知识融会于其它内容当中的综合性题目．

第一节　函数的有关概念和几种特性

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，x 的变动区域是 D，如果对于变量 x 在 D 中的每一个值，按照某一对应关系，变量 y 总有唯一确定的一个数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$；数集 D 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量．

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的函数值，记作 $f(x_0)$，当 x 取遍 D 的每一个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$Z=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\} \tag{1.1}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的值域．

定义 1.2　设 x，y 和 z 是三个变量，数对 (x,y) 的变动区域是 D，如果对于每一对数值 $(x,y)\in D$，按照某一对应关系，变量 z 总有唯一确定的一个数值和它对应，则称变量 z 是变量 x 和 y 的二元函数，记作 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$；集合 D 叫做函数 $y=f(x,y)$ 的定义域，x 和 y 叫做自变量，z 叫做因变量．

当 (x,y) 取遍 D 的每一个点时，对应的函数值的全体组成的数集

$$Z=\{z\,|\,z=f(x,y),\ (x,y)\in D\} \tag{1.2}$$

称为函数 $z=f(x,y)$ 的值域．一般说来，二元函数的图形是空间的一张曲面，其定义域 D 是该曲面在 xy 平面上的投影．

类似于二元函数的定义，可定义三元函数、四元函数，乃至一般的 n 元函数，即

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D. \tag{1.3}$$

注意,当 $n = 1$ 时,n 元函数就是定义 1.1 中定义的一元函数;当 $n \geqslant 2$ 时,n 元函数统称多元函数.

定义 1.3 设函数 $f(x)$的定义域是 D,集合 $X \subset D$. 如果存在数 K_1,使得

$$f(x) \leqslant K_1 \tag{1.4}$$

对于任何 $x \in X$ 成立,则称函数 $f(x)$在 X 有上界,数 K_1 称为函数 $f(x)$在 X 的一个上界;如果存在数 K_2,使得

$$f(x) \geqslant K_2 \tag{1.5}$$

对于任何 $x \in X$ 成立,则称函数 $f(x)$在 X 有下界,数 K_2 称为函数 $f(x)$在 X 的一个下界;如果存在数 $M > 0$,使得

$$|f(x)| \leqslant M \tag{1.6}$$

对于任何 $x \in X$ 成立,则称函数 $f(x)$在 X 上有界,数 M 称为函数 $f(x)$在 X 上的一个界,否则称函数 $f(x)$在 X 上无界.

容易证明,函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界. 注意,如果 M 是函数 $f(x)$在 X 上的一个界,则任何比 M 更大的正数也是函数 $f(x)$在 X 上的界,所以一个有界函数必有无穷多个界,可以证明其中必有一个最小的界. 对于函数的上界和下界也有类似的结论.

如果函数 $f(x)$在其定义域上有界,则称为有界函数;否则称为无界函数.

想要证明一个函数 $f(x)$是有界函数,应按照定义找到 $f(x)$在其定义域上的一个界 M;反之,如果想要证明一个函数 $f(x)$是无界函数,则应说明任何正数 M 都不是 $f(x)$的界,也就是说:对于任意给定的 $M > 0$,都存在 $x_M \in D$,使得 $|f(x_M)| > M$ 成立.

不难看出,只需把 x 换为(x, y),上面有关函数有界性的讨论,对于二元函数 $f(x, y)$同样是成立的.

定义 1.4 设函数 $f(x)$的定义域是 D,区间 $I \subset D$. 如果对于任何 $x_1, x_2 \in I$,只要 $x_1 < x_2$,就有

$$f(x_1) < f(x_2), \tag{1.7}$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上(严格)单调增加;如果对于任何 $x_1, x_2 \in I$,只要 $x_1 < x_2$,就有

$$f(x_1) > f(x_2), \tag{1.8}$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上(严格)单调减少.

如果函数 $f(x)$在其定义域上单调增加,则称 $f(x)$为单调增加函数(简称增函数);如果函数 $f(x)$在其定义域上单调减少,则称 $f(x)$为单调减少函数(简称减函数);单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

定义 1.5 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任何 $x \in D$,总有

$$f(x) = f(-x), \tag{1.9}$$

则称 $f(x)$为偶函数；如果对于任何 $x \in D$，总有

$$f(x) = -f(-x), \tag{1.10}$$

则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的；奇函数的图形关于原点是对称的.

定义 1.6 设函数 $f(x)$的定义域是 D. 如果存在常数 T，使得对于任何 $x \in D$，总有

$$x \pm T \in D, \tag{1.11}$$

$$f(x+T) = f(x) \tag{1.12}$$

同时成立，则称 T 是 $f(x)$的一个周期，称 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数.

显然，如果 T 是函数 $f(x)$的一个周期，则 T 的任何整数倍倍数也是函数 $f(x)$的周期，因而一个周期函数必有无穷多个周期. 为了确定起见，如果一个周期函数存在最小正周期，我们所说的这个函数的周期就是指它的最小正周期.

设 T 是函数 $f(x)$的周期，则在它定义域内每个长度为 T 的区间上，$f(x)$的图形有相同的形状.

注意，有关函数奇偶性、单调性和周期性的讨论只对一元函数有效.

定义 1.7 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D，值域是 Z. 如果对于每个 $y \in Z$，存在唯一的 $x \in D$ 满足 $f(x) = y$，把 y 看作自变量，把 x 看作因变量，则 x 是一个定义在 $y \in Z$ 上的函数，记此函数为

$$x = f^{-1}(y) \quad (y \in Z), \tag{1.13}$$

称为 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的反函数.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常把反函数表达式中的 x 和 y 对换，写成

$$y = f^{-1}(x) \quad (x \in Z) \tag{1.14}$$

的形式. 这样一来，在同一个直角坐标系中，函数 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ $(x \in Z)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

很明显，(严格)单调函数一定有反函数；若某个函数不是单调函数，但是它的定义域能够分为若干个单调区间，则在每个单调区间中该函数就有一个相应的反函数. 例如：$y = x^2$ 分别在$(-\infty, 0]$上单调减少，在$[0, +\infty)$上单调增加，相应的反函数分别是 $y = -\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ 和 $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$. 同单调性一样，仅对一元函数才能讨论其反函数问题.

定义 1.8 设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D_f，值域是 Z_f，函数 $u = g(x)$ 的定义域是 D_g，值域是 Z_g. 如果 $Z_g \cap D_f \neq \varnothing$，则称函数

$$y = f[g(x)], \; x \in D = \{x \mid g(x) \in D_f\} \tag{1.15}$$

是由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的复合函数. 变量 u 称为中间变量.

定义 1.9 常数函数、幂函数、对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数等六种函数称为基本初等函数. 基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数称为初等函数.

初等函数有很多好的性质，它们是微积分的重要研究对象.

定义 1.10 设 $F(x, y)$ 是一个已知二元函数，I 是一个区间. 如果对于每个 $x \in I$，都存在唯一的 y 满足方程 $F(x, y)=0$，则称这个函数 $y=y(x)$ 为方程 $F(x, y)=0$ 在区间 I 上确定的隐函数.

由定义 1.10 可知，把隐函数 $y=y(x)$ 代入方程 $F(x, y)=0$，就得到在区间 I 上成立的恒等式

$$F[x, y(x)] \equiv 0, \ x \in I. \tag{1.16}$$

尽管在大多数情况下，不能从方程 $F(x, y)=0$ 解出隐函数 $y=y(x)$ 的显式表达式，然而，却可利用恒等式(1.16)来研究隐函数的许多性质，如：隐函数的可微性以及导数公式等.

与定义 1.10 类似，还可以定义由方程 $F(x, y, z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x, y)$ 以及由方程组 $F(x, y, u, v)=0$ 和 $G(x, y, u, v)=0$ 确定的两个隐函数 $u=u(x, y)$ 和 $v=v(x, y)$ 等等更复杂的隐函数.

例 1.1(1990 年)① 设函数 $f(x)=x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

【分析】 从函数 $f(x)$ 的构造来看，它是无界函数 x，$\tan x$ 与非负函数 $e^{\sin x}$ 的乘积，容易猜想它应是无界函数. 为证明这一结论，对任意给定的 $M>0$，令 $x_M=2[M]\pi+\frac{\pi}{4}$，于是

$$|f(x_M)|=x_M e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

我们来证明 $x_M e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}>M$ 总是成立的：若 $0<M<1$，则有 $x_M e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{4}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}>1>M$；若 $n \leqslant M<n+1$ ($n=1, 2, \cdots$)，则有 $x_M e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}>x_M>2n\pi>n+1>M$. 综合起来即得 $|f(x_M)|>M$ 成立. 这表明 $f(x)$ 确实是无界函数.

【答】 选(B).

【讨论】 作为进一步的练习，我们来证明 $f(x)$ 不是偶函数，也不是单调函数.

首先，

$$f(-x)=(-x) \cdot \tan(-x) \cdot e^{\sin(-x)}=x \cdot \tan x \cdot e^{-\sin x},$$

取 $x=\frac{\pi}{4}$，不难得出 $$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

从 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 知 $f(x)$ 不是偶函数.

其次，注意 $f(0)=0$，而 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 都是正数，这表明 $f(x)$ 在其定义域上既不是单调增加的，也不是单调减少的，从而它也不是单调函数.

把上面的证明一般化可得：

若存在 $x_0 \in D$，使得 $-x_0 \notin D$ 或 $f(-x_0) \neq f(x_0)$，则 $f(x)$ 不是偶函数.

若存在 $x_1, x_2, x_3 \in I$，且 $x_1<x_2<x_3$，使得 $f(x_1)<f(x_2)$ 与 $f(x_2)>f(x_3)$ [或 $f(x_1)>f(x_2)$ 与 $f(x_2)<f(x_3)$] 同时成立，则 $f(x)$ 在区间 I 上不是单调函数.

例 1.2 证明 $f(x)=x-[x]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界周期函数.

【分析】 可通过取整函数 $y=[x]$ 分段变化的规律来了解函数 $f(x)=x-[x]$ 是怎样变化的.

【证明】 当 $n \leqslant x<n+1$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时，有

$$f(x)=x-[x]<n+1-n=1,$$

---

① 1990 年系指本例为 1990 年研究生入学考试的试题. 下同.

$$f(x)=x-[x]\geqslant n-n=0,$$

即 $0\leqslant f(x)<1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上成立.这表明 $f(x)$是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数.

又因对于任何实数 x,总有

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x),$$

所以,$f(x)$是以 1 为周期的周期函数.

例 1.3(1992 年) 已知 $f(x)=\sin x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$,且 $|\varphi(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}$,求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

【分析】 按照复合函数的定义,从 $f(x)$的解析式可得复合函数 $f[\varphi(x)]$的一般形式,把它与题设的 $f[\varphi(x)]$ 的解析式比较,即可求得 $\varphi(x)$及其定义域.

【解】 注意
$$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2,$$

解出即得
$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

它的定义域是
$$D=\{x\mid |1-x^2|\leqslant 1\}=\{x\mid 0\leqslant x^2\leqslant 2\}=\left\{x\,\middle|\,|x|\leqslant\sqrt{2}\right\},$$

即闭区间 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

例 1.4(1992 年) 设 p, q 是常数,且 $0<q<1$. 求证:方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根.

【分析】 我们知道,若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号,则必存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$,即 ξ 是方程 $f(x)=0$ 的一个根.若进一步假设函数 $f(x)$还在$[a,b]$上单调,则上面的 ξ 是方程 $f(x)=0$ 在区间(a,b)中唯一的根.由于题设的函数 $f(x)=x+p+q\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,因此,我们只需找出一个区间$[a,b]$使 $f(a)$与 $f(b)$反号,并证明函数$f(x)$单调.

【证明】 设 $f(x)=x+p+q\cos x$. 首先证明连续函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.设 $x_1<x_2$,于是

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2-x_1+q(\cos x_2-\cos x_1)=x_2-x_1-2q\sin\frac{x_2-x_1}{2}\sin\frac{x_2+x_1}{2}\\&\geqslant x_2-x_1-2q\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x_2+x_1}{2}\right|\\&\geqslant x_2-x_1-q(x_2-x_1)=(1-q)(x_2-x_1)>0.\end{aligned}$$

这表明方程 $f(x)=0$ 最多只有一个根.

其次,我们再来确定根所在的范围.注意,设 $a=-|p|-1$,则有

$$f(a)=-|p|-1+p+q\cos(-|p|-1)\leqslant -1+q<0,$$

设 $b=|p|+1$,则有
$$f(b)=|p|+1+p+q\cos(|p|+1)\geqslant 1-q>0.$$

这表明方程 $f(x)=0$ 必有一根在 $(-|p|-1,|p|+1)$ 之内.

综合起来即得,方程 $f(x)=0$ 恰有一个实根.

【讨论】 注意,也可用函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$恒正来判定 $f(x)$是单调增加的.

此外,还可以更进一步判定方程 $f(x)=0$ 的唯一的根 ξ 的符号:若 $p+q=0$,则由 $f(0)=p+q=0$ 知 $\xi=0$;若 $p+q>0$,则由 $f(0)=p+q>0$ 知 $\xi<0$;若 $p+q<0$,则由 $f(0)=p+q<0$ 知 $\xi>0$.

第二节 分段函数与积分上限的函数

在自变量的不同变化范围中,自变量与因变量的对应法则是用不同的式子来表示的函数,称为分段函数.绝对值函数 $y=|x|$,取整函数 $y=[x]$ 等都是分段函数.

若 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积,它在部分区间$[a,x]$上的定积分在区间$[a,b]$上定义了一

个函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

称为用变上限定积分定义的函数，或称为积分上限的函数.

在考研数学试题中经常出现这两类函数，因此有必要重视这两类函数的有关概念和运算.

例 2.1 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0.\end{cases}$ 求 $f(-x)$的解析式.

【分析】 本题是求分段函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=-x$ 的复合函数的问题. 可采用代入法，即用 $-x$ 代替分段函数 $y=f(x)$ 中的自变量 x，然后将所得结果变形和化简即可.

【解】 用 $-x$ 代替 $f(x)$的解析式中的 x，可得

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$$

例 2.2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

【分析】 本题也是求分段函数的复合函数解析式的问题，用 $f(x)$代替 $f(x)$的解析式中的自变量 x，得

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$$

下一步需分别求出不等式 $|f(x)|\leqslant 1$ 和 $|f(x)|>1$ 的解集，由此即可得到 $f[f(x)]$的解析式.

【解】 用 $f(x)$代替 $f(x)$解析式中的 x，得

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$$

由 $f(x)$的定义知，$|f(x)|\leqslant 1$ 恒成立，而 $|f(x)|>1$ 是不可能的，于是

$$f[f(x)]=1,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 2.3 设 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$连续，$t>0$，$s>0$，则 I

(A) 依赖于 s, t.　　(B) 依赖于 s, t, x.

(C) 依赖于 t, x，不依赖于 s.　　(D) 依赖于 s，不依赖于 t.

【分析】 把题目中的变上限定积分化归标准形式，就更容易弄清 I 究竟依赖哪些变量. 为此，作变量代换 $u=tx$，于是 $f(tx)=f(u)$，$t\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，与 x 从 0 变到 $\frac{s}{t}$ 对应，u 从 0 变到 s，代入可得

$$I=\int_0^s f(u)\mathrm{d}u.$$

这表明答案(D)正确.

【答】 选(D).

【讨论】 与本题类似，在解决有关积分上限的函数的问题时，把被积函数化为仅依赖积分变量的函数往往是关键的一步. 例如：

$$F(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t$$

可利用变量代换 $u=\frac{t}{3}$ 化为

$$F(x)=3\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

$$G(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$$

可利用变量代换 $u = x^n - t^n$ 化为 $\qquad G(x) = \dfrac{1}{n}\int_0^{x^n} f(u)\mathrm{d}u.$

这里的函数 $F(x)$和 $G(x)$都曾出现在以前的考研试题中.

例 2.4 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1, \\ x^3, & x \geqslant -1. \end{cases}$ 求 $f(x)$的反函数 $g(x)$的表达式.

【分析】 分段函数 $y = f(x)$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 被分成两个区间 $(-\infty, -1)$ 和 $[-1, +\infty)$，在每个区间中 $f(x)$有不同的解析式，但都是单调增加的. 又因 $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0}(1 - 2x^2) = -1 = f(-1)$，于是 $f(x)$在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上也是单调增加的. 从而其反函数存在，且可分别在区间 $(-\infty, -1)$ 和 $[-1, +\infty)$ 上求其解析式.

若函数 $f(x)$在区间 I 上单调，求它的反函数的程序是：求函数 $f(x)$对应的值域 Z；把 $y = f(x)$ 中的变量 x 和 y 对换，即把它写成 $x = f(y)$ 的形式；解出 $y = g(x)$，这就是所求的反函数的表达式，它的定义域是 $x \in Z$.

【解】 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时，$y = 1 - 2x^2$ 的值域 $Z_1 = \{y \mid y = 1 - 2x^2, x < -1\} = \{y \mid y < -1\}$. 把 $y = 1 - 2x^2$ 改写成 $x = 1 - 2y^2$，可解得 $y = -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$.

当 $x \in [-1, +\infty)$ 时，$y = x^3$ 的值域 $Z_2 = \{y \mid y = x^3, x \geqslant -1\} = \{y \mid y \geqslant -1\}$. 把 $y = x^3$ 改写成 $x = y^3$，可解得 $y = \sqrt[3]{x}$.

综合即得 $f(x)$的反函数是

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & x \geqslant -1. \end{cases}$$

第二章　极限　连续　求极限的方法

极限方法是我们研究函数的基本方法之一，高等数学中所研究的连续、导数、定积分、级数等等都是各种不同类型的极限，可见极限的重要性. 考试大纲要求：了解数列极限和函数极限（包括左、右极限）的概念. 了解极限的性质与极限存在的两个准则（单调有界数列存在极限与夹逼定理），掌握极限的性质及四则运算法则，会用洛必达法则与两个重要极限. 本章的重点内容是极限，特别要掌握求极限的一些方法. 求极限的方法很多，主要有：

① 利用极限的四则运算法则与幂指数运算法则；

② 用洛必达法则求未定式的极限；

③ 利用函数的连续性求极限；

④ 利用变量替换法与两个重要极限；

⑤ 利用夹逼定理（适当放大缩小法）求极限；

⑥ 利用函数极限求序列极限；

⑦ 利用单调有界数列存在极限定理求某些递归数列的极限；

⑧ 利用定积分求某些和式的极限等.

有时一道题中要用到多种方法.

极限问题可以归结为无穷小量问题，极限方法的重要部分是无穷小量阶的估计与分析，无穷小量的倒数是无穷大量. 关于无穷小量与无穷大量，考试大纲要求：了解无穷小量的概念和