

管理最优方案的制定方法

线性规划与案例

冉毅群

中国最优设计管理研究会

一九八五年二月

目 录

§ 1	什么是线性规划	1
§ 2	线性规划数学模型	1 2
§ 3	线性规划的解法	1 9
1.	图解法	1 9
2.	单纯形法	2 5
§ 4	对偶规划及对偶单纯形法	5 6
§ 5	制定最优调运方案的方法——表上作业法	7 2
§ 6	线性规划在管理中的应用案例	8 7
1.	最优配棉方案的制定	8 7
2.	工厂的合理布局	9 0
3.	运输工具的最优调配	9 5

§ 1 什么是线性规划

线性规划是运筹学的一个重要分支。从四十年代开创以来，时间虽然不长，但从理论的完整性，解法的多样性以及应用的广泛性来说，都远较运筹学的其它分支发展得成熟。特别是随着电子计算机的发展和应，解决了它计算上的烦琐问题。所以，在工业、农业、商业、交通运输、企业管理等各个领域都得到广泛应用。如生产计划的制定、合理运输、工厂布局、库存管理、产品质量、人事安排以及包装等等方面都取得了显著的经济效果。据报道，1970年美国在用电子计算机进行科学运算的工作中，与线性规划有关的课题占25%左右。在我国，随着科学技术的发展与普及，线性规划也逐步受到重视。

什么是线性规划？线性规划就是在满足一定的条件下，使所要求的目标达到最优，即如何确定利用最少的人力、物力、财力资源以达到最好的经济效益。从企业管理的角度来看，要提高一个部门、一个地区、一个企业的经济效益，就技术方面而言，一般有两个办法，一个是进行技术改进，如增添设备，改进工艺、挖掘资源潜力等等；另一个办法是上述已有的手段不变，只改变生产组织及计划管理就能提高经济效益，线性规划就是解决后一个问题的有效工具。许多问题用线性规划的数学模型描述，然后通过电子计算机或手工的方法求解，找出问题的答案，从而使计划工作、企业的生产组织工作等搞得更加科学与合理，充分发挥各方面的潜力，为加快四化建设做出更大的贡献。

线性规划所研究的问题，主要有两类：其一是给定了一定数量的人力、物力、财力资源，问题是如何应用这些资源，以期取得更大的

经济效益，其二是给定一项任务，问题是如何统筹安排，才能以最小的消耗去完成这项任务，事实上这个问题的两种不同的提法而已。为了便于同志们理解和掌握线性规划所研究的问题和内容，下面举一些例子加以说明：

例1 某工厂生产甲、乙两种产品，假设生产甲种产品一吨需耗煤6吨，电力20瓩，钢材2吨；生产乙种产品一吨需耗4吨，电力25瓩，钢材4吨。生产一吨甲种产品利润是1200元，一吨乙种产品利润1800元。按计划国家能提供该厂的煤为5000吨，电力800瓩，钢材650吨。问应当生产多少吨甲种产品和多少吨乙种产品，使利润率达到最大？

将上述条件及要求列成表1

表1

消耗定 额 资源	产 品	所能提供 的原材料		
		甲产品	乙产品	
煤 (吨)		6	4	5000
电力 (瓩)		20	25	800
钢材 (吨)		2	4	850
利润 (元)		1200	1800	

现在用代数形式来表达这一问题，我们用 x_1 、 x_2 分别表示生产甲产品和生产乙产品的数量，单位为吨。

因为生产1吨甲种产品需煤6吨，电力20瓩，钢材2吨，所以生产 x_1 吨的甲种产品就需要 $6x_1$ 吨煤、 $20x_1$ 瓩电、 $2x_1$ 吨

钢材。同样，生产1吨乙种产品需要4吨煤，25瓩电力，4吨钢材。
那么，生产 X_2 吨乙种产品就需要 $4X_2$ 吨煤， $25X_2$ 瓩电力， $4X_2$ 吨钢材。

生产两种产品共需要原材料为：

煤 $6X_1 + 4X_2$ 吨

电力 $20X_1 + 25X_2$ 瓩

钢材 $2X_1 + 4X_2$ 吨

但这些原材料数量都不能大于国家所能提供的煤、电力、钢材的数量，故有下述不等式方程：

$$6X_1 + 4X_2 \leq 5000$$

$$20X_1 + 25X_2 \leq 800$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 850$$

其次，假定该厂全部安排生产甲种产品，不生产乙种产品，则有

$$X_1 > 0 \quad X_2 = 0$$

如果全部生产乙种产品，不生产甲种产品，则有：

$$X_1 = 0 \quad X_2 > 0$$

但这两种产品中绝不会有生产“负产品”的情况，或者是生产，或者是不生产，因此，应满足：

$$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0$$

以上条件统称为约束条件。

生产 X_1 吨甲种产品和生产 X_2 吨乙种产品的总利润为
($1200X_1 + 1800X_2$) 元，我们的目标使总利润达到最大，因此，

$$F(X) = 1200X_1 + 1800X_2$$

这一代数式就称为目标函数

综合上述分析，我们就可以把问题归结为如下的代数表达式：

求未知数 $X_i (i=1, 2)$ 它们满足约束条件

$$\begin{cases} 6X_1 + 4X_2 \leq 5000 \\ 30X_1 + 25X_2 \leq 800 \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 850 \\ X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \end{cases}$$

使得 $F(X) = 1200X_1 + 1800X_2$ 取最大值。满足约束条件的 X_1, X_2 称为容许解，并使目标函数达到最大值的 X_1, X_2 称为最优解。生产上一个容许解就是一个计划方案，一个最优解就是一个最优方案。

经过计算，该问题的最优解为：

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 32$$

所获得的最大利润为

$$F(X) = 57600 \text{ 元}$$

即甲种产品生产0吨；乙种产品生产32吨，可获得最大利润。

例2 某公社所管辖范围的土地为平原、丘陵、洼地三种，其数量分别为

800 亩

1200 亩

650 亩

各种土质种不同粮食作物（如高粱、谷子、玉米），其亩产量也是不一样的。据统计各种土地种各种作物的亩产量如下，表2

表2

单位: 斤/亩

土地 \ 作物	高粱	谷子	玉米	土地数
平原	400	260	550	800 亩
丘陵	300	210	400	1200 亩
洼地	250	150	350	650 亩
要求	900	400	1350	

本年度上级要求种高粱 900 亩, 谷子 400 亩, 玉米 1350 亩。
问应如何确定种植计划, 使粮食总产量达到最大。

现设 X_{ij}

($i = 1, 2, 3$)

($j = 1, 2, 3$)

表示第 i 种土地种第 j 种作物的亩数。这是什么意思呢? 比如 $i = 1$, $j = 2$ 时, $X_{ij} = X_{12}$, 表示平原种植谷子的亩数。又如 X_{23} 就表示丘陵地种玉米的亩数……, 各种土地种不同粮食作物亩数, 见表 3。

表3

土地 \ 种植亩数	高粱	谷子	玉米
平原	X_{11}	X_{12}	X_{13}
丘陵	X_{21}	X_{22}	X_{23}
洼地	X_{31}	X_{32}	X_{33}

在平原种高粱 X_{11} 亩，种谷子 X_{12} 亩，种玉米 X_{13} 亩，种三种粮食作物的亩数之和应等于平原的总面积数即

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 800$$

同样丘陵地、洼地种植各种作物的亩数应分别等于它们的面积数，即

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1200$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 650$$

其次，平原、丘陵、洼地种植的高粱亩数（ $X_{11} + X_{21} + X_{31}$ ）应等于上级要求的种植面积，即

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 900$$

同样，平原、丘陵、洼地种植的谷子、玉米的亩数应分别达到上级所要求的面积，即

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 400$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1350$$

各种土地种各种作物的亩数或者是种、或者是不种，绝不能为负，所以有：

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

综合上述，该问题可归纳成如下代表方程表达式。

求未知数， X_{ij} （ $i, j = 1, 2, 3$ ），它满足约束条件：

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 800 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1200 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} = 650 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} = 900 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 400 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1350 \\ X_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

使得 $F(X) = 400X_{11} + 260X_{12} + 550X_{13} + 300X_{22} +$
 $210X_{23} + 400X_{33} + 250X_{31} + 150X_{32} +$
 $350X_{33}$ 取最大值

计算结果最优方案如下表4

表4

土地 \ 亩数	高粱	谷子	玉米
平原	0	0	800
丘陵地	250	400	550
洼地	650	0	0

粮食总产量 $F = 981500$ 斤。

例3 某县有三个粮仓，用 A_1, A_2, A_3 表示，它们的库存量分别为400、750、800万吨，这些粮食分别供应周围的四个小城镇（城镇用 B_1, B_2, B_3, B_4 表示）其需要量分别为500、750、400、300万吨，已知由每个粮仓到各个小镇的距离如下表5。

表5

粮仓 \ 城镇距离	B_1	B_2	B_3	B_4	库存量
A_1	8	10	12	5	400
A_2	7	12	9	6	750
A_3	13	8	15	9	800
需要量	500	750	400	300	1950

这个表说明，由 A_1 仓库到 B_1 镇的距离为 8 公里，到 B_2 的距离为 10 公里……现在的问题是如何确定粮食的合理调运方案，使得总重吨公里为最小*。

现设 A_1 、 A_2 、 A_3 分别向 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 运输粮食的量为 X_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$) 如下表 6

表 6

运 量 仓库 \ 城镇	B_1	B_2	B_3	B_4	库 存 量 (万吨)
A_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	400
A_2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	750
A_3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	800
需要量(万吨)	500	750	400	300	1950

根据问题的要求则得到以下方程：

1. 各仓库的粮食库存量与运出量平衡方程：

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 400$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 750$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 800$$

* 吨公里——即运送货物的重量(单位用吨表示)乘运送距离(单位用公里表示)。

2. 各城镇需要量与供应量平衡方程：

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 500$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 750$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 400$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 300$$

3. 粮食的运输量应大于或等于零

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$$

目标函数是总重吨公里

$$\begin{aligned} F(X) = & 8X_{11} + 10X_{12} + 12X_{13} + 5X_{14} + \\ & 7X_{21} + 12X_{22} + 9X_{23} + 6X_{24} + \\ & 13X_{31} + 8X_{32} + 15X_{33} + 9X_{34} \end{aligned}$$

取极小值

计算结果最优合理调运方案为表7

表7

分配运量 仓库	城镇	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁		150	0	0	250
A ₂		350	0	400	0
A ₃		0	750	0	50

总重吨公里 $F(X) = 14950$

上述几例虽然是从不同的角度来安排生产计划，可是转化成代数问题后，却有一致的共性：

求一组非负变量，满足一定的条件（该条件或是线性方程组，或

~ 10 ~

是线性不等式)，使一个线性函数取得极值（极小或极大值）。我们称这样的问题为线性规划问题。更概括地说，线性规划所研究的数学模型是约束极值问题。目标函数是未知量的线性函数，约束条件也是未知量的线性方程组或线性不等式。下面给出线性规划的一般表达式：

$$\text{求 } X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$$

满足

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq (\geq, =) b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq (\geq, =) b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq (\geq, =) b_m \\ X_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

使目标函数

$$F(X) = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots C_nX_n \text{ 取极小或极大值。}$$

$$X = (X_1 X_2 \dots X_n)^T$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_m = b_m \end{cases} \quad (I - I)$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n$$

58

數。

式中 a_{ij} , b_i , c_j ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) 都是已知常数, 且 $m < n$, $b_i \geq 0$ (m 为约束方程个数, n 为变量个数) 为简便起见, 上面的问题可用矩阵符号来表示:

滿足 $\begin{cases} AX = B \\ X \geq 0 \end{cases}$

使得 $F(X) = C^T X$ 取极小值 (T 表示转置符号)

式中:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

以上形式称为线性规划的标准形式

例 1: 求 $X = (X_1, X_2, X_3)^T$

满足约束条件

$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 = 6 \\ 4X_1 + 8X_2 + 9X_3 = 15 \\ X_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

使得

$F(X) = 7X_1 + 8X_2 + 14X_3$ 取极小值, 或用

$\text{Min } F(X)$ 表示

这就是标准形。用矩阵符号表示为：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

上节例3，运输问题的模型亦为标准形。

二 把一般线性规划问题划为标准形：

1. 当给出的约束条件是不等式：

1) 当

$$\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

目标函数为

$$\min F = C^T X$$

化为标准形式时，我们须引入松弛变量Y，其标准形式，约束条件为：

$$\begin{cases} AX + Y = B \\ X \geq 0 \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

目标函数为：

$$\min F(X) = C^T X$$

例：求 $X = (X_1 \ X_2)^T$

$$\text{满足} \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 4X_1 + 19X_2 \leq 7 \\ X_i \geq 0 \ (i=1, 2) \end{cases}$$

使目标函数

$$\min F = 9X_1 + 8X_2$$

化为标准形式时，引入松弛变量 X_3, X_4 ，变为

$$\text{求 } X = (X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4)^T$$

$$\text{满足} \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 6 \\ 4X_1 + 19X_2 + X_4 = 7 \\ X_i \geq 0, \ (i=1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

使目标函数

$$\min F = 9X_1 + 8X_2$$

2) 当

$$\begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

求 $F = C^T X$ 的极小值的问题，化标准形时，就须引入松弛变量（或剩余变量） W ，其标准形式为：

$$\begin{cases} AX - W = B \\ X \geq 0 \\ W \geq 0 \end{cases}$$

$$\min F = C^T X$$

例 求 $X = (X_1 \ X_2)^T$

$$\text{满足} \begin{cases} 3X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ 9X_1 + 6X_2 \geq 13 \\ X_1 + 8X_2 \geq 10 \\ X_i \geq 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

使目标函数

$$\min F = 7X_1 + 18X_2$$

化为标准形时，引入松弛变量 X_3, X_4, X_5 变为

$$\text{求 } X = (X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ X_5)^T$$

满足：

$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 - X_3 = 8 \\ 9X_1 + 6X_2 - X_4 = 13 \\ X_1 + 8X_2 - X_5 = 10 \\ X_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \end{cases}$$

使目标函数

$$\min F = 7X_1 + 18X_2$$

2. 当问题的目标函数 $C^T X$ 是求极大值时，如求 X

$$\text{满足} \begin{cases} A X = B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

取 $F = C^T X$ 的极大值。

化为标准形时，将目标函数反号就是极小值，故上式的标准形式为：

求 X

$$\text{满足} \begin{cases} A X = B \\ X \geq 0 \end{cases}$$