绿色通道

高中同步用书

2009最新版

思远教辅精品绿色通道系列丛书

■依据《课程标准》《考试大纲》编写

◎丛书主编 贾鸿玉

学生用书

数学

[高一上册]

天津人民美術出版社

■根据教育部最新审定教材编写
思远教辅精品绿色通道系列丛书

高中同步用书

绿色通道

GREEN PASSAGE

数学

高一上册

丛书主编/贾鸿玉
本册主编/孔庆府　李　艳
副 主 编/任宗杰　袁　成　回　春
董军胜　吕红利　高瑞红
编　　委/李学东　张洪福　姜秀林
朱保成　孟爱民　李晓东

天津人民美術出版社

绿色通道系列丛书

GREEN PASSAGE

图书在版编目（CIP）数据

高中同步用书.高一数学.上册/孔庆府，李艳主编.—天津：天津人民美术出版社，2008.7

（绿色通道）

ISBN 978-7-5305-3713-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.①孔…　②李…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第104510号

敬告读者：

《高考绿色通道》系列的成功，引发盗版仿作的狂潮，为了维护著作和广大消费者的合法权益，请远离盗版，我们坚决打击盗版，维护知识产权。

书　　名： 绿色通道·高一数学

出 版 人： 刘子瑞　**责任编辑：** 邢立宏　**技术编辑：** 高　振

封面设计： 思远文化　**营销策划：** 老　多　**责任印制：** 刘艳娜

出版发行： 天津人民美術出版社　**邮编：** 300050

地　　址： 天津市和平区马场道150号　**电话：**（022）23287429

经　　销： 全国新华书店　**印刷：** 河北腾飞印刷有限公司

版　　次： 2009年7月第2版　2009年7月第1次印刷

开　　本： 860×1200mm　1/16　**印　　张：** 135.5

印　　数： 0001-30000　**全套定价：** 322.00元（共九册）

（如出现印装错误，请与承印厂家调换）

走绿色通道　扬金色风帆

——思远《高考绿色通道》系列丛书前言

思远《高考绿色通道》系列丛书是根据教学进度、教学内容和教学要求，设计拓展性学习内容和辅助性训练内容。内容的选取与设计，以全日制义务教育各科课程标准为依据，以《高考考试大纲》为设计模版，体现其提倡的新理念，致力于全面提高学生的素养，为学生巩固知识、拓展能力提供丰富多样的学习内容。融入自主、合作、探究学习的全新学习理念，一举成为全国优秀教辅精品图书。精选的主题、优美的选文，还有我们的“课程目标”、“疑难解析”、“经典例题”、“能力训练”等栏目版块，构成一套很好的教材补充资料和课外阅读欣赏的优秀材料。七年来，全国几万所中学教学实践的检验和反馈表明，该丛书栏目新颖、形式活泼、讲解透彻、题目灵活、题量适中，能帮助学生进行高品质的有效学习，使学生在高效的学习中能力与成绩迅猛提升!

修订后的思远《高考绿色通道》系列丛书具有以下特点：

【前瞻性】突出素质教育的要求，强调培养学生的创新精神和实践能力，原创大量与生产、生活实际和社会热点问题紧密联系、学生自己构思答案的探究性习题和反映最新高考动态的潜能测试题，以培养和提高学生的发散思维能力。

【灵活性】通过富有实效的练习，达到内容的“实”与形式的“活”的良好统一，加强了课内知识与课外知识的有机结合，凸现学习与生活的紧密联系，构建开放的学习体系，为学生留有选择、拓展和创造的空间，呈现方式生动活泼，从学生的兴趣入手，内容、版式对学生充满吸引力。

【科学性】按学习规律和思维能力培养的规律循序渐进，突出能力升级五步递进——知识归纳、学法建议、潜能开发、知能达标训练、综合能力训练，科学地对学生进行显能测试和潜能测试，培养和提高学生思维的敏捷性、科学性、深刻性和发散性。

【新颖性】与人民教育出版社最新修订教材配套，融入最新的教育理念和一代名师最新的教学精华，关注全国各地最新高考模式和试题设计思路，减少陈题、不选偏题、精编活题、首创新题，启迪思维方法。

【实用性】第二次修订着重在“精析”和“精练”上狠下功夫，遵循课堂讲解与练习严格同步的实用性原则，强调讲解通俗易懂、言简意赅、分析精辟和指导到位，突出内容的新颖和形式的灵活、习题数量的适当和层次比例的合理，注重命题考查主干知识点和思维的技巧点、探究点、发散点及解题的关键点。

思远《高考绿色通道》系列丛书努力为学生的学习和探索创造条件，这是实施新课程标准与提高教学成绩的重要前提。对中学生进行自主学习、尝试探疑、发现知识、寻找学习规律、科学的思维技巧训练，显能测试和潜能测试是一种新的教学尝试。因此，思远《高考绿色通道》系列丛书努力做到内容充实有趣、文字生动流畅、设题科学实用、答案详细准确、题量合理、印刷精美，以激发学生学习和探索知识的兴趣。丛书的策划、编写及审定得到了北京师范大学、华中师范大学、人大附中、景山中学、湖南师大附中等单位的专家、特高级教师的鼎力相助，特此致谢!

策划部专家推荐：状元心语——梦想的力量

没有谁到最后能把所有的知识点全都搞懂，高考状元也不例外！

经历过高考和全国研究生统一考试的我，一路走来感触良多。高考是人生中最为重要的转折点，高考就是一场战争，只是我们战斗在没有硝烟的战场上，其中的酸甜苦辣只有我们自己心里才知道。

不当跛腿的战士

高一的生活是愉悦而惬意的，但是刚迈进高二的坎就开始进入战备状态了，警戒级别明显提高，更别提高三了，天天都在考试测验搞演习，神经绷得紧紧的。那个时候我经常埋怨我的青春年少全部都浪费在了书本上，可怜了我的花季岁月。

高一下学期我在文理分科的时候选择了理科，但无论是理科还是文科，肯定有许多同学和我一样都有偏科的毛病。理科的物理、化学、生物科目好比海陆空三军，败下一门都会导致战局急转直下，我从此从厌恶物理开始硬着头皮上，加大了对物理攻关的力度，增加了投入时间，我始终还是相信一句话：付出和收获是成正比的，带有兴趣和激情的学习与获得是成平方关系的。

我们的小集团

坐在周围的同学自然要比其他同学更亲近，我和前后左右的同学的关系都不错。面对同样的敌人，高中三年我们团结在以女班长为首的集团军周围，团结周围可以团结的力量共同促进学习。我经常有不懂的问题都会先找到他们，而不是找老师。我想这也是学生时代的一个通病，在这种情况下建立学习联盟是具有很强的现实意义的。大家有问题一起探讨一下或者就是纯粹听别人解答，这样会在讨论中看到自己没有发现的问题，看问题看得更远，看得更深，学习效率更高。我绝对不会由于害羞或者是羞于向人家请教而放弃。

锁定目标要精确制导

对于每个人来说，稍微标高理想能让自己感到肩上的责任感，有了压力才会有动力，才会想要积极进步来达到自己的预定目标。如果现在的能力是属于二本院校，目标应该锁定在一本排名稍微靠后的院校；如果现在处于三本实力状态，那就该把自己的志愿设定在二本阶段……当然理想要结合实际，不能虚高，当你发现和自己拟定的理想相差太多的时候，就会觉得现实是那么残酷，你会被自己的失败蒙蔽双眼而看不到彼岸。正确合理地制订自己的学习任务和学习目标是高中生涯的最重要的人生规划，它会像一盏明灯照亮你的六月之旅。

最后大决战

在离高考还有一百天的时候，黑板上就已经出现了倒计时的字样。当数字越变越小的时候，伴随着日益紧张的复习，这时候大家多多少少都会出现些心理问题。由于天气炎热，模考的次数越来越频繁，大家开始出现心慌、怯场的症状，有的同学因为前几次模考成绩不理想被打击得毫无信心，畏惧考试的抵触情绪在暗地里增长，这个时候调整心态是最重要的。想想还有剩下的不到三个月，前面已经吃了不少苦头遭过不少罪，为了不让以前的汗水和泪水白流，咬咬牙都要殊死一拼。

在整个高中的学习过程中，我一直笃信“天道酬勤”的信念，有理想、有信念、具有坚韧不拔的毅力才会成功！

（摘自《招生考试通讯》有删改）

Contents 目录

第1章 集合与简易逻辑

本章概览 …… 1
学法指导 …… 1
考纲要求 …… 1
§1.1 集合(第一课时) …… 2
预习导引 …… 2
重点剖析 …… 2
典型例题 …… 2
基础知识检测 …… 3
综合运用检测 …… 3
妙题诊断 …… 4
提炼升华 …… 4
轻松一刻 …… 5
§1.1 集合(第二课时) …… 5
预习导引 …… 5
重点剖析 …… 5
典型例题 …… 6
基础知识检测 …… 6
综合运用检测 …… 7
妙题诊断 …… 8
提炼升华 …… 8
轻松一刻 …… 8
§1.2 子集、全集、补集(第一课时) …… 9
预习导引 …… 9
重点剖析 …… 9
典型例题 …… 9
基础知识检测 …… 10
综合运用检测 …… 11
妙题诊断 …… 11
提炼升华 …… 11
轻松一刻 …… 11
§1.2 子集、全集、补集(第二课时) …… 12
预习导引 …… 12
重点剖析 …… 12
典型例题 …… 12
基础知识检测 …… 13
综合运用检测 …… 14
妙题诊断 …… 15
提炼升华 …… 15
轻松一刻 …… 15
§1.3 交集、并集(第一课时) …… 15
预习导引 …… 15
重点剖析 …… 16
典型例题 …… 16
基础知识检测 …… 16
综合运用检测 …… 17
妙题诊断 …… 18
提炼升华 …… 18
轻松一刻 …… 18
§1.3 交集、并集(第二课时) …… 19
预习导引 …… 19
重点剖析 …… 19
典型例题 …… 19
基础知识检测 …… 20
综合运用检测 …… 20
妙题诊断 …… 21
提炼升华 …… 21
轻松一刻 …… 21
集合习题课 …… 22
知识点归纳 …… 22
知识结构框图 …… 22
观例题学方法 …… 22
阶段测试(一) …… 23
§1.4 绝对值不等式的解法(第一课时) …… 25
预习导引 …… 25
重点剖析 …… 25
典型例题 …… 25
基础知识检测 …… 26
综合运用检测 …… 27
妙题诊断 …… 28
提炼升华 …… 28
轻松一刻 …… 28
§1.4 绝对值不等式的解法(第二课时) …… 29
预习导引 …… 29
重点剖析 …… 29
典型例题 …… 29
基础知识检测 …… 30
综合运用检测 …… 30
妙题诊断 …… 31
提炼升华 …… 31
轻松一刻 …… 31
§1.5 一元二次不等式的解法(第一课时) …… 32
预习导引 …… 32
重点剖析 …… 32
典型例题 …… 32
基础知识检测 …… 33
综合运用检测 …… 34
妙题诊断 …… 35
提炼升华 …… 35
轻松一刻 …… 35
§1.5 一元二次不等式的解法(第二课时) …… 36
预习导引 …… 36
重点剖析 …… 36
典型例题 …… 36
基础知识检测 …… 37
综合运用检测 …… 38
妙题诊断 …… 38
提炼升华 …… 39
轻松一刻 …… 39
含有绝对值的不等式和一元二次不等式的解法习题课 …… 40
知识点归纳 …… 40
知识结构框图 …… 40
典型例题 …… 40
基础知识检测 …… 41
综合运用检测 …… 42
妙题诊断 …… 42
§1.6 逻辑联结词(第一课时) …… 43
预习导引 …… 43
重点剖析 …… 43
典型例题 …… 43
基础知识检测 …… 44
综合运用检测 …… 45
妙题诊断 …… 46
提炼升华 …… 46
轻松一刻 …… 46
§1.6 逻辑联结词(第二课时) …… 47
预习导引 …… 47
重点剖析 …… 47
典型例题 …… 47
基础知识检测 …… 48
综合运用检测 …… 49
妙题诊断 …… 50
提炼升华 …… 50
轻松一刻 …… 50
§1.7 四种命题(第一课时) …… 51
预习导引 …… 51
重点剖析 …… 51
典型例题 …… 51
基础知识检测 …… 52
综合运用检测 …… 53
妙题诊断 …… 54

目录 Contents

提炼升华 …… 54
轻松一刻 …… 54
§1.7　四种命题(第二课时) …… 55
预习导引 …… 55
重点剖析 …… 55
典型例题 …… 55
基础知识检测 …… 56
综合运用检测 …… 57
妙题诊断 …… 58
提炼升华 …… 58
轻松一刻 …… 58
§1.8　充分条件与必要条件(第一课时) …… 59
预习导引 …… 59
重点剖析 …… 59
典型例题 …… 59
基础知识检测 …… 60
综合运用检测 …… 61
妙题诊断 …… 62
提炼升华 …… 62
轻松一刻 …… 62
§1.8　充分条件与必要条件(第二课时) …… 63
预习导引 …… 63
重点剖析 …… 63
典型例题 …… 63
基础知识检测 …… 64
综合运用检测 …… 65
妙题诊断 …… 66
提炼升华 …… 66
轻松一刻 …… 66
简易逻辑习题课 …… 67
知识点归纳 …… 67
知识结构框图 …… 67
例题解析 …… 67
基础知识检测 …… 68
综合运用检测 …… 69
轻松一刻 …… 70
阶段测试(二) …… 71
第一章测试卷 …… 73
本章高考题回放 …… 75
第一次月考测试卷 …… 77
第2章　函数
本章概览 …… 79
学法指导 …… 79
考纲要求 …… 80
§2.1　函数(第一课时) …… 80
预习导引 …… 80
重点剖析 …… 80
典型例题 …… 81
基础知识检测 …… 82
综合运用检测 …… 83
妙题诊断 …… 84
提炼升华 …… 84
轻松一刻 …… 85
§2.1　函数(第二课时) …… 85
预习导引 …… 85
重点剖析 …… 85
典型例题 …… 86
基础知识检测 …… 86
综合运用检测 …… 87
妙题诊断 …… 88
提炼升华 …… 89
轻松一刻 …… 89
§2.2　函数的表示法(第一课时) …… 90
预习导引 …… 90
重点剖析 …… 90
典型例题 …… 90
基础知识检测 …… 91
综合运用检测 …… 91
妙题诊断 …… 92
提炼升华 …… 92
轻松一刻 …… 92
§2.2　函数的表示法(第二课时) …… 93
预习导引 …… 93
重点剖析 …… 93
典型例题 …… 93
基础知识检测 …… 95
综合运用检测 …… 96
妙题诊断 …… 97
提炼升华 …… 98
轻松一刻 …… 98
§2.2　函数的表示法(第三课时) …… 98
预习导引 …… 98
重点剖析 …… 98
典型例题 …… 99
基础知识检测 …… 100
综合运用检测 …… 101
妙题诊断 …… 102
提炼升华 …… 102
轻松一刻 …… 102
§2.3　函数的单调性(第一课时) …… 103
预习导引 …… 103
重点剖析 …… 103
典型例题 …… 103
基础知识检测 …… 104
综合运用检测 …… 105
妙题诊断 …… 106
提炼升华 …… 106
轻松一刻 …… 106
§2.3　函数的单调性(第二课时) …… 107
预习导引 …… 107
重点剖析 …… 107
典型例题 …… 107
基础知识检测 …… 108
综合运用检测 …… 108
妙题诊断 …… 109
提炼升华 …… 110
轻松一刻 …… 110
§2.4　反函数(第一课时) …… 110
预习导引 …… 110
重点剖析 …… 110
典型例题 …… 111
基础知识检测 …… 112
综合运用检测 …… 112
妙题诊断 …… 113
提炼升华 …… 113
轻松一刻 …… 114
§2.4　反函数(第二课时) …… 115
预习导引 …… 115
重点剖析 …… 115
典型例题 …… 115
基础知识检测 …… 116
综合运用检测 …… 117
妙题诊断 …… 118
提炼升华 …… 118
轻松一刻 …… 118
函数习题课 …… 119
知识点归纳 …… 119
知识结构框图 …… 119
例题解析 …… 119
基础知识检测 …… 120
综合运用检测 …… 121
妙题诊断 …… 121

Contents 目录

函数单元检测题 …… 122
§2.5 指数(第一课时) …… 124
预习导引 …… 124
重点剖析 …… 124
典型例题 …… 124
基础知识检测 …… 125
综合运用检测 …… 126
妙题诊断 …… 127
提炼升华 …… 127
轻松一刻 …… 127
§2.5 指数(第二课时) …… 128
预习导引 …… 128
重点剖析 …… 128
典型例题 …… 128
基础知识检测 …… 129
综合运用检测 …… 130
妙题诊断 …… 131
提炼升华 …… 131
轻松一刻 …… 131
§2.6 指数函数(第一课时) …… 132
预习导引 …… 132
重点剖析 …… 132
典型例题 …… 132
基础知识检测 …… 133
综合运用检测 …… 134
妙题诊断 …… 134
提炼升华 …… 135
轻松一刻 …… 135
§2.6 指数函数(第二课时) …… 135
预习导引 …… 135
重点剖析 …… 135
典型例题 …… 136
基础知识检测 …… 137
综合运用检测 …… 137
妙题诊断 …… 138
提炼升华 …… 138
轻松一刻 …… 139
§2.6 指数函数(第三课时) …… 139
预习导引 …… 139
重点剖析 …… 139
典型例题 …… 139
基础知识检测 …… 140
综合运用检测 …… 141
妙题诊断 …… 142
提炼升华 …… 142
轻松一刻 …… 142
期中检测卷(一) …… 143
期中检测卷(二) …… 145
§2.7 对数(第一课时) …… 147
预习导引 …… 147
重点剖析 …… 147
典型例题 …… 147
基础知识检测 …… 148
综合运用检测 …… 149
妙题诊断 …… 149
提炼升华 …… 149
轻松一刻 …… 150
§2.7 对数(第二课时) …… 151
预习导引 …… 151
重点剖析 …… 151
典型例题 …… 151
基础知识检测 …… 152
综合运用检测 …… 153
妙题诊断 …… 153
提炼升华 …… 154
轻松一刻 …… 154
§2.7 对数(第三课时) …… 155
预习导引 …… 155
重点剖析 …… 155
典型例题 …… 155
基础知识检测 …… 156
综合运用检测 …… 156
妙题诊断 …… 157
提炼升华 …… 157
轻松一刻 …… 157
§2.8 对数函数(第一课时) …… 158
预习导引 …… 158
重点剖析 …… 158
典型例题 …… 158
基础知识检测 …… 159
综合运用检测 …… 160
妙题诊断 …… 160
提炼升华 …… 160
轻松一刻 …… 161
§2.8 对数函数(第二课时) …… 161
预习导引 …… 161
重点剖析 …… 161
典型例题 …… 161
基础知识检测 …… 162
综合运用检测 …… 163
妙题诊断 …… 164
提炼升华 …… 164
轻松一刻 …… 164
§2.8 对数函数(第三课时) …… 165
预习导引 …… 165
重点剖析 …… 165
典型例题 …… 165
基础知识检测 …… 166
综合运用检测 …… 167
妙题诊断 …… 168
提炼升华 …… 168
轻松一刻 …… 168
指数、对数习题课 …… 169
知识点归纳 …… 169
知识结构框图 …… 169
例题解析 …… 169
基础知识检测 …… 171
综合运用检测 …… 171
§2.9 函数的应用举例 …… 172
预习导引 …… 172
重点剖析 …… 172
典型例题 …… 172
基础知识检测 …… 173
综合运用检测 …… 174
§2.10 指数函数习题课 …… 175
预习导引 …… 175
重点剖析 …… 175
典型例题 …… 175
基础知识检测 …… 176
综合运用检测 …… 177
提炼升华 …… 178
阶段测试卷 …… 178
第二章测试卷 …… 181
本章高考题回放 …… 183
第3章 数列
本章概览 …… 185
学法指导 …… 185
考纲要求 …… 185
§3.1 数列(第一课时) …… 186
预习导引 …… 186

目录 Contents

重点剖析 …… 186
典型例题 …… 186
基础知识检测 …… 187
综合运用检测 …… 188
妙题诊断 …… 189
提炼升华 …… 189
轻松一刻 …… 189
§3.1 数列(第二课时) …… 190
预习导引 …… 190
重点剖析 …… 190
典型例题 …… 190
基础知识检测 …… 191
综合运用检测 …… 192
妙题诊断 …… 193
提炼升华 …… 193
轻松一刻 …… 193
§3.2 等差数列(第一课时) …… 194
预习导引 …… 194
重点剖析 …… 194
典型例题 …… 194
基础知识检测 …… 195
综合运用检测 …… 196
妙题诊断 …… 197
提炼升华 …… 197
轻松一刻 …… 197
§3.2 等差数列(第二课时) …… 198
预习导引 …… 198
重点剖析 …… 198
典型例题 …… 198
基础知识检测 …… 199
综合运用检测 …… 199
妙题诊断 …… 200
提炼升华 …… 201
轻松一刻 …… 201
§3.3 等差数列的前n项和(第一课时) …… 202
预习导引 …… 202
重点剖析 …… 202
典型例题 …… 202
基础知识检测 …… 203
综合运用检测 …… 204
妙题诊断 …… 204
提炼升华 …… 205
轻松一刻 …… 205
§3.3 等差数列的前n项和(第二课时) …… 205
预习导引 …… 205
重点剖析 …… 205
典型例题 …… 206
基础知识检测 …… 207
综合运用检测 …… 208
妙题诊断 …… 209
提炼升华 …… 209
轻松一刻 …… 209
等差数列习题课 …… 210
知识点归纳 …… 210
例题解析 …… 211
基础知识检测 …… 212
综合运用检测 …… 212
妙题诊断 …… 213
提炼升华 …… 214
轻松一刻 …… 214
§3.4 等比数列(第一课时) …… 215
预习导引 …… 215
重点剖析 …… 215
典型例题 …… 215
基础知识检测 …… 216
综合运用检测 …… 217
妙题诊断 …… 217
提炼升华 …… 218
轻松一刻 …… 218
§3.4 等比数列(第二课时) …… 219
预习导引 …… 219
重点剖析 …… 219
典型例题 …… 219
基础知识检测 …… 221
综合运用检测 …… 221
妙题诊断 …… 222
提炼升华 …… 222
轻松一刻 …… 223
§3.5 等比数列的前n项和(第一课时) …… 223
预习导引 …… 223
重点剖析 …… 223
典型例题 …… 224
基础知识检测 …… 225
综合运用检测 …… 226
妙题诊断 …… 227
提炼升华 …… 227
轻松一刻 …… 227
§3.5 等比数列的前n项和(第二课时) …… 228
预习导引 …… 228
重点剖析 …… 228
典型例题 …… 228
基础知识检测 …… 230
综合运用检测 …… 230
妙题诊断 …… 231
提炼升华 …… 231
轻松一刻 …… 232
等差数列和等比数列综合运用习题课 …… 233
知识点归纳 …… 233
知识结构框图 …… 233
典型例题 …… 233
基础知识检测 …… 234
综合运用检测 …… 235
妙题诊断 …… 235
研究性学习课题:数列在分期付款中的应用 …… 236
预习导引 …… 236
重点剖析 …… 236
典型例题 …… 236
基础知识检测 …… 238
专题一 几种常用的求数列的通项公式的方法 …… 240
专题二 如何对数列进行求和 …… 243
阶段测试卷 …… 247
第三章综合测试卷 …… 249
本章高考题回放 …… 251
期末测试卷(一) …… 253
期末测试卷(二) …… 255
综合练习(一) …… 257
综合练习(二) …… 259
综合练习(三) …… 261
综合练习(四) …… 263
综合练习(五) …… 266
参考答案 …… 269

第1章
集合与简易逻辑

本章概览

本章内容按知识结构大致可分为两个部分：第一部分是集合的初步知识及含绝对值不等式和一元二次不等式的解法即第一节至第五节，集合的初步知识包括集合的有关概念、集合的表示以及集合与集合间的关系，含绝对值不等式和一元二次不等式的解法是在初中已有知识的基础上应用集合的方法表示两类不等式的解集. 第二部分是简易逻辑知识，即第六节至第八节，简易逻辑主要介绍逻辑联结词“或”“且”“非”的意义，用“真值表”判断复合命题的真假，四种命题及其相互关系和充要条件的有关知识.

“集合与简易逻辑”是高中数学的起始章，也是整个中学数学的基础. 它的基础性体现在两个方面：首先，集合的思想、集合的语言和集合的符号在高中数学的很多章节如函数、数列、轨迹、方程和不等式、立体几何、解析几何中都被广泛地使用；其次，数学离不开变换（等价的或不等价的）和推理，而变换与推理又离不开四种命题、充要条件、逻辑联结词等逻辑概念，因为它们是全面理解概念、正确推理运算、准确表述判断的重要工具.

集合与逻辑不仅是中学数学的基础，也是支撑现代数学大厦的柱石之一. 高等数学的许多分支和数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等都建立在集合与逻辑的理论基础之上.

本章的知识点在集合与逻辑的理论中都是最基本的，但其中蕴含的数学思想都很丰富，如集合的思想、函数的思想、转化的思想、分类讨论的思想、数形结合的思想等.

学法指导

集合中子集、交集、并集、补集等概念均是用“元素”来定义的，因此抓“元素”是理解与使用这些概念的关键，遇到集合问题首先要弄清集合里的元素是什么，在学习中可采用对比法找概念间的主要区别. 例如：子集、真子集，集合相等的区别，集合运算中找交集、并集的不同点.

充分条件和必要条件清楚地提示了命题的条件和结论之间的逻辑关系，用它来指导证明数学题可少走弯路，为了证明一个命题的结论为真，只要找到这个命题成立的一个充分条件即可，而要否定一个命题是真的只要找到这个命题的一个必要条件不成立就可以了，要想进行等价转化，就要寻找命题的充要条件.

本章是高中数学的起始章，学习本章知识对于顺利学习高中数学意义重大，学习时应注意如下几点：

(1)注意与初中数学知识的衔接，这就需要认真整理初中数学知识，在此基础上根据本章知识特点较快地吸取新的知识形成新的知识结构.

(2)认真理解、反复推敲，思考本章各知识点，容易混淆的知识仔细辨别，逐步建立与集合和简易逻辑知识结构相适应的理论体系和思考方法.

(3)通过本章学习要努力培养观察、比较抽象概括能力、初步形成运用集合和简易逻辑知识准确地表述数学问题和实际问题的意识和能力.

(4)注意数形结合的思想和分类讨论思想等数学思想的运用，如集合中韦恩图不等式中的数轴平面直角坐标系的应用均体现了数形结合思想，在解含参数的不等式方程的相关问题中，能否进行正确的分类讨论，往往是解决问题的关键.

考纲要求

集合与简易逻辑是高考中考基础、考能力和考查进一步学习的潜力的很好的命题材料.

近年来，高考中关于集合与简易逻辑的试题可分为两大类：一类是集合、条件、命题本身的基本题，这类题多为选择、填空题；另一类是集合、条件、命题与其他知识的综合题.

在上面第二类题中又有两种情形：一种是用集合、条件和命题来表述的题（因为用集合、条件、命题的语言来表述的数学概念和数学判断往往具有简明性和精确性），这种题实质上就是代数、几何或三角题，大部分属中档难度题；另一种情形是需要用集合的思想或者从条件的重要性来思考的数学题，这时解题的思想往往很深刻，因而也较难.

§1.1　集合(第一课时)

预习导引

1. 不等式 $2x-3>1$ 的解能否组成一个集合?

2. 圆是平面内到定点的距离等于定长的点的________.

3. 某些________就成为集合,简称________,集合是数学中不加定义的基本概念.

4. 集合中的每个________叫做这个集合的元素,集合中的元素具有________、________、________.

5. 元素与集合的关系是________或________,分别用符号________或________表示.

6. 专用集合符合:$\mathbf{N}$ 表示________;$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 表示________;$\mathbf{Z}$ 表示________;$\mathbf{Q}$ 表示________;$\mathbf{R}$ 表示________.

重点剖析

1. 集合的概念

集合是数学中最原始的不加定义的概念,只能给出描述性说明:一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集.集合中的每个对象叫做这个集合的元素,集合通常用大写字母 $A,B,C\cdots$ 表示,集合元素通常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

集合是一个确定的整体,因此对集合也可以这样描述:具有某种共同特征的对象的全体组成一个集合.其中的"共同特征"就是我们判定研究对象是否在集合内的依据.

属于与不属于:元素 a 属于集合 A,记作 $a\in A$;元素 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in}A$.

2. 集合中元素的特征

(1)确定性:集合中元素必须是确定的,如"我们班级里高个子的同学"就不能组成一个集合,因为组成它的对象是不确定的.

(2)互异性:同一个集合中的元素必须是互不相同的,如 2^2,4,只能算某一个集合的一个元素.

(3)无序性:集合中的所有元素不讲次序,如由1,2,3和3,2,1组成的集合是同一个集合.

3. 集合的分类

集合按元素个数多少可分为:无限集(集合中元素的个数是无限的);有限集(集合中元素的个数是有限的);空集(集合中不含有任何元素).

典型例题

[例1]　考察下列每组对象能否构成一个集合:

(1)著名的数学家;

(2)某校2006年在校的所有高个子同学;

(3)不超过20的非负数;

(4)方程 $x^2-9=0$ 在实数内的解;

(5)直角坐标平面内第一象限的一些点.

[解析]　集合是一组对象的全体,因此观察一组对象能否构成集合,关键是看这组对象是否是确定的.

对(1)"著名的数学家"无明确的标准,对于某个人是否"著名"无法客观的判断,因此"著名的数学家"不能构成一个集合,类似地(2)也不能构成集合.对(3)任给一个实数 x,可以明确地判断是不是"不超过20的非负数",即"$0\leqslant x\leqslant 20$"与"$x>20$,或 $x<0$",两者必居其一,且仅居其一,故"不超过20的非负数"能构成集合,类似地(4)也能构成集合.对(5)"一些点"无明确的标准,对于某个点是否在"一些点"中无法确定,因此"直角坐标平面内第一象限的一些点"不能构成集合.

[答案]　(3)(4)能构成集合,(1)(2)(5)不能构成集合.

[评析]　一些对象构成的集合必须具有以下两个特点:一是整体性,二是确定性,其中"集在一起"一语,说明集合是指某些事物的整体而不是指其中个别事物,这就是集合的整体性"指定的对象"一语,说明集合是由属于它的元素所完全确定的,一个对象要么是它的一个元素,要么不是它的一个元素,二者必居其一,这就是集合的确定性.

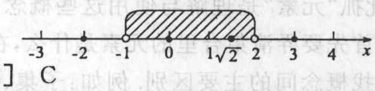
由此可见,只要对象是确定的,能够看做一个整体,便形成一个集合,否则,不然.

[例2]　已知:集合 $A=\{x|-1<x<2\}$,给出下列关系:①$-2\notin A$;②$-1\in A$;③$0\notin A$;④$\sqrt{2}\in A$;⑤$2\notin A$;⑥$3\in A$,其中正确的个数为　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

[解析]　把集合 A 及各数在数轴上表示出来,如下图,故①④⑤是正确的,②③⑥是错误的.



[答案]　C

[评析]　研究数与数集的关系,应首先明确是什么数集,再判断数与数集的关系.

[例3]　设 $A=\{x-2,2x^2+5x,12\}$,已知 $-3\in A$,求 x.

[解析]　$-3\in A$,说明 $x-2=-3$ 或 $2x^2+5x=-3$.

由集合互异性可知 $x-2\neq 2x^2+5x$,

$\therefore x\neq -1$,$\therefore x-2\neq -3$.

故只有 $2x^2+5x=-3$,解得 $x=-\dfrac{3}{2}$.

[答案]　$x=-\dfrac{3}{2}$

[评析] 如果直接由 $x-2=-3$ 或 $2x^2+5x=-3$ 分别求解，很容易产生增根，其剔除增根的方法是代入到集合中进行检验.

[例 4] 实数集 A 满足条件：$1\notin A$；若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$.

(1)若 $2\in A$，求 A 中一定还有哪些数；

(2)集合 A 能否为单元素集？若能，求出 A；若不能，说明理由；

(3)求证：$1-\frac{1}{a}\in A$.

[解析] 本题叙述较长，但是首先要树立信心，牢记已知条件，循环使用已知条件，多试几次，必能逐个解决问题.

(1)解：若 $2\in A$，由于 $2\neq 1$，则 $\frac{1}{1-2}\in A$，即 $-1\in A$.

$\because -1\in A, -1\neq 1$，$\therefore \frac{1}{1-(-1)}\in A$，即 $\frac{1}{2}\in A$.

$\because \frac{1}{2}\in A, \frac{1}{2}\neq 1$，$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\in A$，即 $2\in A$.

由以上可知，若 $2\in A$，则 A 中还有另外两个数 -1 和 $\frac{1}{2}$.

(2)解：不妨设 A 是单元素的实数集.

则有 $a=\frac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$.

$\because \Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$，

$\therefore$ 方程 $a^2-a+1=0$ 没有实数根.

$\therefore A$ 不是单元素的实数集.

(3)证明：$\because$ 若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$，

$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\in A$，即 $1-\frac{1}{a}\in A$.

[评析] (1)注意单元素集是指集合中只有一个元素.

(2)注意已知条件的结构特点，只要有 $a\in A$，必有 $\frac{1}{1-a}\in A$. 可以想象为：若□$\in A$，则 $\frac{1}{1-□}\in A$，在□中分别填入数字或式子即可，这是一种整体的思想.

(3)第(2)问的解答，用直接法不易说明，因此采用先假设符合条件的结论存在的方法，然后化简求解，这是解这类探索性问题的一般方法.

基础知识检测

一、选择题

1. ①"全体著名文学家"构成一个集合；②集合{0}中不含元素；③{1,2}，{2,1}是不同的集合.
上面三个叙述中，正确的个数是 ( )
A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

2. 若 a 是 $\mathbf{R}$ 中的元素，但不是 $\mathbf{Q}$ 中的元素，则 a 可以是 ( )
A. 3.14　B. -5　C. $\frac{3}{7}$　D. $\sqrt{7}$

3. 已知集合 $M=\{(2,-2),2,-2\}$，则集合 M 中元素的个数是 ( )
A. 2　B. 3　C. 4　D. 6

4. 给出下面五个关系：$\sqrt{3}\in\mathbf{R}$，$0.7\notin\mathbf{Q}$，$0\in\{0\}$，$0\in\mathbf{N}$，$3\in\{(2,3)\}$，其中正确的个数是 ( )
A. 5　B. 4　C. 3　D. 1

二、填空题

5. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：

2 ________ $\mathbf{N}$，-1 ________ $\mathbf{N}$，$\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{N}$，π ________ $\mathbf{N}$，

2 ________ $\mathbf{Z}$，-1 ________ $\mathbf{Z}$，$\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{Z}$，π ________ $\mathbf{Z}$，

2 ________ $\mathbf{Q}$，-1 ________ $\mathbf{Q}$，$\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{Q}$，π ________ $\mathbf{Q}$，

2 ________ $\mathbf{R}$，-1 ________ $\mathbf{R}$，$\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{R}$，π ________ $\mathbf{R}$.

6. 数集 $\{2a,a^2-a\}$ 中的 a 的取值范围是________.

三、解答题

7. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+px+q=0\}=\{2\}$，求 p^2+q^2+pq 的值.

综合运用检测

一、选择题

1. 给出以下四个句子，其中能构成集合的个数为 ( )
①某中学的大胖子；
②你所在班中身高超过 1.80 米的高个子；
③2008 年北京奥运会中的比赛项目；
④{1,1,3,5}
A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

2. 给出下面四个关系：$\pi\in\mathbf{R}$，$\frac{1}{3}\notin\mathbf{Q}$，$0\in\{0\}$，$0\in\mathbf{N}^*$. 其中正确的个数是 ( )
A. 4 个　B. 3 个　C. 2 个　D. 1 个

3. 已知集合 $M=\{$大于 -2 且小于 1 的实数$\}$，则下列关系式正确的是 ( )
A. $\sqrt{5}\in M$　B. $0\notin M$
C. $1\in M$　D. $-\frac{\pi}{2}\in M$

4. 已知 a,b,c 为非零实数，代数式 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的值所组成的集合为 M，则下列判断中正确的是 ( )

A. $0\notin M$　　B. $-4\notin M$

C. $2\in M$　　D. $4\in M$

5. 只要具有下述性质的 x 都是集合 M 中的元素. $x=a+b\sqrt{2}$，$a,b\in\mathbf{Q}$，请判断下列元素中不属于集合 M 的元素个数是 ( )

①$x=3+2\sqrt{2}\pi$　　②$x=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$

③$x=-1$　　④$x=2\sqrt{2}$

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

[解析] ①$\because\pi\notin\mathbf{Q}$，$\therefore 3+2\sqrt{2}\pi\notin M$，

②$x=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}\in M$，

③$x=-1=-1+0\times\sqrt{2}\in M$

④$x=2\sqrt{2}=0+2\sqrt{2}\in M$，故选 B.

二、填空题

6. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

(1) 1 ________ $\{1\}$　　(2) a ________ $\{a,b,c\}$

(3) e ________ $\{a,b\}$　　(4) 0 ________ $\mathbf{N}^*$

(5) π ________ $\mathbf{Q}$　　(6) $\sqrt{3}$ ________ $\mathbf{R}$

7. 已知方程 $x^2+mx+n=0$ $(m、n\in\mathbf{R})$ 的解集为 $\{-2,-1\}$，则 $m=$ ________，$n=$ ________. 若解集为 $\{-2\}$，则 $mn=$ ________.

8. 设集合 $A=\{1,0,-1,2\}$，$B=\{y|y=|x|,x\in A\}$，则 $B=$ ________.

三、解答题

9. 设 A 表示集合 $\{2,3,a^2+2a-3\}$，B 表示集合 $\{|a+3|,2\}$，若已知 $5\in A$，且 $5\notin B$，求实数 a 的值.

10. 当正整数集合 A 满足："若 $x\in A$，则 $10-x\in A$"时，则

(1) 试写出只有一个元素的集合 A；

(2) 试写出只有两个元素的集合 A；

(3) 这样的集合 A 至多有多少个元素？

11. 已知 $A=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $-3\in A$，求实数 a 的值；

(2) 当 a 为何值时，集合 A 的表示不正确？

妙题诊断

1. (2006·辽宁高考题) 设 $\oplus$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个运算，A 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 若对任意 $a,b\in A$ 有 $a\oplus b\in A$，则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不为零)四则运算都封闭的是 ( )

A. 自然数集　　B. 整数集

C. 有理数集　　D. 无理数集

2. (2006·广东高考题) 对于任意的两个实数对 (a,b) 和 (c,d)，规定：$(a,b)=(c,d)$ 当且仅当 $a=c,b=d$；运算"$\otimes$"为：$(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$；运算"$\oplus$"为：$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$. 设 $p,q\in\mathbf{R}$，若 $(1,2)\otimes(p,q)=(5,0)$，则 $(1,2)\oplus(p,q)=$ ( )

A. $(0,-4)$　　B. $(0,2)$

C. $(4,0)$　　D. $(2,0)$

提炼升华

本节主要学习了如下一些内容：

1. 集合的概念：某些指定的对象集在一起就构成一个集合，集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 集合中元素的性质(或称三要素)是：①确定性：$x\in A$ 与 $x\notin A$，二者必居其一；②互异性：$x_1\in A$ 且 $x_2\in A$，则 $x_1\neq x_2$；③无序性：集合中每一个元素是"平等"的，无先后次序之分.

如集合$\{0,1,2\}$与$\{2,0,1\}$是同一个集合.

2. 元素与集合之间的关系只有属于和不属于两种关系，分别用符号$\in$和$\notin$表示，即对于元素a与集合A，它们之间只有$a\in A$或$a\notin A$这两种关系.

轻松一刻

集合论简介

初中毕业升入高一级学校的同学们会一致发现自己所学的第一个数学概念都是：集合. 这门研究集合的数学理论在现代数学中被恰当地称为集合论. 它是数学的一个基本分支，在数学中占据着一个极其独特的地位，其基本概念已渗透到数学的所有领域. 如果把现代数学比作一座无比辉煌的大厦，那么可以说集合论正是构成这座大厦的基石，由此可见它在数学中的重要性. 其创始人康托尔也以其集合论的成就被誉为对二十世纪数学发展影响最深的学者之一. 下面就让我们一起去探究一下这门独特而重要的数学理论的来龙去脉，追觅它所走过的曲折历程吧.

集合论是德国著名数学家康托尔于19世纪末创立的.

十七世纪数学中出现了一门新的分支：微积分. 在之后的一二百年中这一崭新学科获得了飞速发展并结出了丰硕成果. 其推进速度之快使人来不及检查和巩固它的理论基础. 十九世纪初，许多迫切问题得到解决后，出现了一场重建数学基础的运动. 正是在这场运动中，康托尔开始探讨了前人从未碰到的实数点集，这是集合论研究的开端. 到1874年康托尔开始一般地提出"集合"的概念. 他对集合所下的定义是：把若干确定的有区别的(不论是具体的或抽象的)事物合并起来，看作一个整体，就称为一个集合，其中各事物称为该集合的元素. 人们把康托尔于1873年12月7日给戴德金的信中最早提出集合论思想的那一天定为集合论诞生日.

§1.1　集合(第二课时)

预习导引

1. 集合的三种表示方法为，________、________、________.

2. 把集合中的元素一一列举出来，写在________内的表示集合的方法叫________；把集合中的元素的________描述出来，写在________内表示集合的方法叫________；画封闭曲线用它的内部表示集合的方法叫________.

3. 集合按所含元素的个数可分为________、________，其中把不含任何元素的集合叫________，用字母________表示.

4. 用列举法表示集合$A=\{x|-2<x<4,x\in \mathbf{Z}\}$是________.

重点剖析

1. 列举法

在用列举法表示集合时应注意以下六点：

(1)元素间用分隔号"，"；

(2)元素不重复；

(3)不考虑元素顺序；

(4)集合的元素必须是明确的；

(5)集合的元素可以表示任何事物；

(6)对于含有较多元素的集合，如果构成该集合的元素有明显规律，可用列举法，但是必须把元素间的规律显示清楚后方能用省略号.

2. 描述法

使命题$P(x)$为真的A中各元素的集合记为：$\{x\in A|P(x)\}$. 其中x为该集合中元素的代号，它表明了该集合中的元素是"谁"，是"什么"；A是特定条件；$P(x)$为该集合中元素特有的公共属性、特征.

在使用描述法时，应注意以下六点：

(1)写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表示的元素符号)；

(2)说明该集合中元素的性质；

(3)当题目中用了其他字母来描述元素所具有的属性时，要对新字母说明其含义或指出其取值范围；

(4)多层描述时，应当准确使用"或"、"且"、"非"；

(5)所有描述的内容都要写在集合括号内；

(6)用于描述的语句力求简明、确切.

3. 空集

空集记作$\varnothing$，要注意$0,\{0\},\varnothing,\{\varnothing\}$的不同意义.

4. 图示法

为了形象地表示集合，我们常常画一条封闭的曲线，用它的内部表示一个集合. 由于这种方法是英国逻辑学家Venn(韦恩，1834～1923年)首先提出并提倡采用的. 图示法也可称为韦恩图法或称文恩图法、文氏图法.

5. 各自的优点

用列举法表示集合的优点是：可以明确地表示出集合中的具体元素和元素的个数，给人一目了然的感觉.

描述法的优点是突出了元素的共同特性，具有抽象简洁的特点.

图示法的优点是形象直观.

重点掌握根据集合特点选择表示方法：当集合中的元素较少，且易写出时适合用列举法；当集合中元素较多或无穷多时，适合用其元素性质或表达式去描述，适合用描述法；当元素间关系复杂或需要直观形

象展现时，适合用韦恩图法.

典型例题

[例1]　已知集合 $M=\{a,b,c\}$ 中的三个元素可以构成某一个三角形的三边长，那么此三角形一定不是(　　)

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

[解析]　由于构成三角形三边有三个元素，由 $M=\{a,b,c\}$ 中三个元素互异，由它们组成的三角形一定不是等腰三角形. 故本题是用集合中元素的互异性来进行判断的.

[答案]　D

[例2]　用适当的方法表示下列集合.

(1)方程 $(x+1)(x-\frac{2}{3})^2(x^2-2)(x^2+1)=0$ 的有理根的集合 A；

(2)坐标平面内，不在第一、三象限的点的集合；

(3)方程组 $\begin{cases}2x-3y=0,\\3x-y=7\end{cases}$ 的解集；

(4)到两坐标轴距离相等的点.

[解析]　(1)由 $(x+1)(x-\frac{2}{3})^2(x^2-2)(x^2+1)=0$，得 $x=-1\in\mathbf{Q}$，$x=\frac{2}{3}\in\mathbf{Q}$，$x=\pm\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$.

$\therefore A=\{-1,\frac{2}{3}\}$.

(2)坐标平面内在第一、三象限的点的特点是纵、横坐标同号，所以不在第一、三象限的点的集合可表示为 $\{(x,y)\,|\,xy\leqslant 0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

(3) $\{(x,y)\,|\begin{cases}2x-3y=0\\3x-y=7\end{cases}\}=\{(3,2)\}$.

(4) $\{(x,y)\,|\,|y|=|x|,x\in\mathbf{R}\}$.

[评析]　用列举法表示集合时，必须注意如下几点：(1)元素与元素之间必须用“,”隔开；(2)集合的元素必须是明确的；(3)不必考虑元素出现的先后顺序；(4)集合的元素不能重复；(5)集合的元素可以表示任何事物.

[例3]　设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,6+\sqrt{3}<x\leqslant 10\}$.

(1) A 是有限集还是无限集？

(2) $3+\sqrt{10}$ 是不是集合 A 中的元素？$5\sqrt{3}$ 呢？

[解析]　(1)$\because$ 大于 $6+\sqrt{3}$ 且小于或等于 10 的实数有无限多，也就是 A 中有无限多个元素，

$\therefore$ 集合 A 是无限集.

(2)$\because 3+\sqrt{10}<7<6+\sqrt{3}$，$\therefore 3+\sqrt{10}\notin A$，即 $3+\sqrt{10}$ 不是集合 A 中的元素. 又 $6+\sqrt{3}<8<5\sqrt{3}<10$，$\therefore 5\sqrt{3}\in A$，即 $5\sqrt{3}$ 是集合 A 中的元素.

[评析]　判断一个对象是不是某个集合的元素，就是判断这个对象是否具有集合元素所具有的属性. 由于集合多种多样，因此判断方法也多种多样，因题而异.

[例4]　已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,ax^2-3x+2=0\}$.

(1)若 $A=\varnothing$，求实数 a 的取值范围；

(2)若 A 是单元素集，求 a 的值及集合 A；

(3)求集合 $P=\{a\in\mathbf{R}\,|\,a$ 使得 $A\neq\varnothing\}$.

[解析]　因为集合 A 是方程 $ax^2-3x+2=0$ 的解集，则(1)、(2)、(3)是求分别使方程无实根、有且仅有一个实根、有实根的 a 的取值范围.

(1) A 是空集，即方程 $ax^2-3x+2=0$ 无解.

若 $a=0$，方程有一根 $x=\frac{2}{3}$，不合题意，则 $a\neq 0$.

若 $a\neq 0$，要使方程 $ax^2-3x+2=0$ 无实体解，则 $\Delta=9-8a<0$，即 $a>\frac{9}{8}$.

故使 $A=\varnothing$ 的 a 的取值范围是 $a>\frac{9}{8}$.

(2)当 $a=0$ 时，由(1)可知 $A=\{\frac{2}{3}\}$，符合题意；当 $a\neq 0$ 时，要使方程有两个相等的实根，则 $\Delta=9-8a=0$，即 $a=\frac{9}{8}$，此时 $A=\{\frac{4}{3}\}$.

综上所述，当 $a=0$ 时，$A=\{\frac{2}{3}\}$；

当 $a=\frac{9}{8}$ 时，$A=\{\frac{4}{3}\}$.

(3)由上知，当 $a=0$ 时，$A=\{\frac{2}{3}\}\neq\varnothing$；

当 $a\neq 0$ 时，要使方程有实根，则 $\Delta=9-8a\geqslant 0$，即 $a\leqslant\frac{9}{8}$.

综上所述，$P=\{a\in\mathbf{R}\,|\,a$ 使得 $A\neq\varnothing\}=\{a\,|\,a\leqslant\frac{9}{8}\}$.

[评析]　解决集合问题的关键在于把抽象问题具体化、形象化，也就是把用描述法表示的集合用列举法来表示，或用图示法来表示，或用图形表示集合. 例如，用数轴来表示集合；再如，当集合的元素为有序实数对时，可用平面直角坐标系中的图形表示相关的集合等. 此例就是将集合符号语言转化为文字语言来解决的.

基础知识检测

一、选择题

1. 给定如下四个集合，其中无限集的是(　　)

①{我国2000年实行高一版新教材改革试验的省市}；

②{小于 π 的正有理数}；

③{全日制普通高级中学教科书(试验本)数学第一册中的汉字}；

④{河北省第一中学高一年级的学生}；

A. ①④　　B. ②

C. ②④　　D. ①②

2. 下列集合中表示空集的是(　　)

A. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x+5=5\}$　　B. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x+5>5\}$

C. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2=0\}$　　D. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2+x+1=0\}$

3. 集合$A=\{x^2,3x+2,5y^3-x\}$,$B=\{$周长等于20 cm的三角形$\}$,$C=\{x\in\mathbf{R}|x-3<2\}$,$D=\{(x,y)|y=x^2-x-1\}$,其中用描述法表示的集合个数为 ( )

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

4. 方程组$\begin{cases}3x+y=2\\2x-3y=27\end{cases}$的解集是 ( )

A. $\begin{cases}x=3\\y=-7\end{cases}$

B. $\{x,y|x=3$且$y=-7\}$

C. $\{3,-7\}$

D. $\{(x,y)|x=3$且$y=-7\}$

二、填空题

5. 实数$a,-a,|a|,\sqrt{a^2},-\sqrt[3]{a^3}$组成的集合中,元素最多有______个.

6. 函数$y=x^2-5x+6$的值组成的集合,可以表示为______;函数$y=x^2-5x+6$图象上所有点组成的集合,可以表示为______.

三、解答题

7. 设x,y都是实数,观察下列四个集合:$A=\{y=x^2+1\}$;$B=\{x|y=x^2+1\}$;$C=\{y|y=x^2+1\}$;$D=\{(x,y)|y=x^2+1\}$.它们所表示的意义是否相同?为什么?

综合运用检测

一、选择题

1. 已知集合$M=\{m|m=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbf{Q}\}$,则下列四个元素中属于集合$M$的元素的个数是 ( )

①$m=1+\sqrt{2}\pi$;　②$m=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$;

③$m=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$;　④$m=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

2. 集合$P=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,$Q=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$R=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,若$a\in P,b\in Q$,则有 ( )

A. $a+b\in P$

B. $a+b\in Q$

C. $a+b\in R$

D. $a+b$不属于P,Q,R中的任意一个

3. 方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x+z=3,\\y+z=2\end{cases}$的解集为 ( )

A. $(1,0,2)$　　B. $\{1,0,2\}$

C. $\{(1,0,2)\}$　　D. $\{(x,y,z)|1,2,3\}$

4. (学科综合)坐标轴上的点的集合可表示为 ( )

A. $\{(x,y)|x=0,y\neq0$,或$x\neq0,y=0\}$

B. $\{(x,y)|x^2+y^2=0\}$

C. $\{(x,y)|xy=0\}$

D. $\{(x,y)|x^2+y^2\neq0\}$

5. 设集合$A=\{x|x=(-1)^n,n\in\mathbf{N}\}$,$B=\{2,4,6,8,\cdots\}$,$C=\{(x,y)|3x+2y=16,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$,$D=\{x|1<x<2,x\in\mathbf{Q}\}$,$E=\{$等腰直角三角形$\}$,其中无限集的个数是 ( )

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

二、填空题

6. 把下列集合用另一种方法表示出来:

(1)$\{$不在第二、四象限内的点$\}$表示为______;

(2)$\{$非负偶数$\}$表示为______;

(3)$\{x\in\mathbf{N}|-5<x<5\}$表示为______;

(4)$\{x\in\mathbf{R}|x^2+5x-14=0\}$表示为______.

7. 将集合$\{(x,y)|2x+3y=16,x,y\in N\}$用列举法表示为______.

8. 若$1\in\{x|x^2+ax+b=0\}$,$3\in\{x|x^2+bx+a=0\}$,则$a=$______,$b=$______.

三、解答题

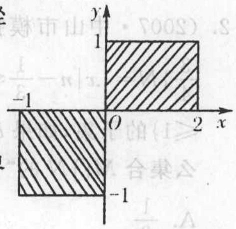
9. 下列各组对象能否构成一个集合?指出其中的集合是无限集还是有限集?并用适当的方法表示出来:

(1)直角坐标平面内横坐标与纵坐标互为相反数的点;

(2)高一数学课本中所有的难题;

(3)方程$x^2-x+1=0$的实数根;

(4)右图中阴影部分的点(含边界上的点).



10. 已知集合 $A=\left\{x\in N\left|\frac{9}{10-x}\in \mathbf{N}\right.\right\}$,

$B=\left\{\frac{9}{10-x}\in \mathbf{N}\left|x\in \mathbf{N}\right.\right\}$,试问集合 A 与 B 共有几个相同的元素,并写出由这些"相同元素"组成的集合.

11. 已知集合 $A=\{x|x=m+n\sqrt{2},m,n\in \mathbf{Z}\}$.

(1)证明任何整数都是 A 的元素;

(2)设 $x_1,x_2\in A$,求证:$x_1\cdot x_2\in A$.

妙题诊断

1.(2001·全国卷)如下图,小圆点表示网络的结点,结点之间的连线表示它有网线相联,连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量,现从结点 A 向结点 B 传递信息,信息可以分开沿不同的路线同时传递,则单位时间内传递的最大信息量是 ( )

A. 26 B. 24 C. 20 D. 19

2.(2007·中山市模拟题)设集合 $M=\{x|m\leqslant x\leqslant m+\frac{3}{4}\}$ $N=\{x|n-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant n\}$ 且 M、N 都是集合 $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的子集,如果 $b-a$ 叫集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 的长度,那么集合 $M\cap N$ 的"长度"最小值是 ( )

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{5}{12}$

提炼升华

1. 集合的表示方法重要的有列举法、描述法,要掌握这两种方法在表示集合时的格式,会把数学语言、图形语言与集合语言相互转化.

2. 一般情况下,无限集不宜采用列举法,例如"由大于5的实数组成的集合"就不宜用列举法表示,因为不能将这个集合中的元素一一列举出来,这个集合可用描述法表示.

3. 用描述法表示集合,要特别注意这个集合中的元素是什么,它应该符合什么条件,从而准确理解集合的意义.

4. 表示集合的列举法和描述法,在使用中各有利弊.一般地,列举法使人对集合的元素及其属性一目了然,但对含有无限个元素的集合不便使用;描述法虽然既可用于只有有限个元素的集合,也可用于含有无限个元素的集合,但对其中元素属性的描述有时不够明了,不仅使人不易理解,而且有时还容易使人在理解上出现差错.对于含有较多元素的集合,如果构成该集合的元素有明显规律,可用列举法,但是必须把元素间的规律显示清楚后才能用省略号.

轻松一刻

为集合论的创立而疯的数学家——康托

康托,德国人.1845 年生于俄国彼得堡,父亲是个富商.1856 年全家迁居德国法兰克福.康托先后就学于苏黎世大学、哥廷根大学、法兰克福大学和柏林大学,主要学习哲学、数学和物理.

康托是在研究微积分理论的逻辑基础问题时开始着手创立集合论的.康托用集合的观点重新考察各种数量关系,特别是无穷数量关系.他发现:"伽利略怪论",并不是什么"怪论",完全是正确的.任何两组东西,只要能相互一一对应.就是一样多."部分小于全体"这条规律只在有限情况下正确.在无限情况下,"部分可以等于全体".他发现了有限集与无限集的本质区别:有限集不可能与其真子集等价,而无限集却可以与其真子集等价.这样,他给出无限集的合理定义,也就是现在经常采用的定义:如果一个集合能与它的真子集等价,这个集合就叫做无限集,否则就叫有限集.

康托在集合论方面的创造性工作富有创新性、革命性,推翻了许多前人的错误看法,但违反了当时人们的常识,遭到一些人的反对、攻击甚至谩骂.包括 F·克莱因、庞加莱、韦尔等著名数学家也对康托的集合论持激烈的反对态度.把康托本人称作"疯子".其中康托在柏林大学时的老师克罗内克攻击得最为激烈,甚至不承认康托是他的学生.

来自数学权威们的巨大精神压力终于摧垮了康托,使他心力交瘁,患了精神分裂症,被送进精神病医院.但在精神病发作的间歇阶段.康托仍然顽强地坚持集合论的研究.而且当每次从精神病发作中恢复过来的时候,他都感到自己的脑子变得格外清晰.他在集合论方面许多非常出色的成果,都是在精神病发作的间歇时期获得的.

真金不怕火炼,康托的思想终于大放光彩.1897 年在苏黎世举行的第一次国际数学家大会上.阿达玛等多位数学家站出来指出了康托集合论中超限数理论在分析学中的重要应用.希尔伯特也是最支持康托理论的数学家之一,他大声疾呼:"没有人能把我们从康托为我们创造的乐园中赶走."并撰写文章赞誉康托的超限算术为"数学思想的最惊人的产物,在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现".然而,长期的精神折磨所造成的危害毕竟是不容忽视的,此时的康托不仅不能从人们的崇敬中得到安慰和喜悦,健康状况却逐渐恶化,1918 年 1 月 6 日病逝于哈勒的一家精神病医院,终年 73 岁.