積分問題解法

中華民國二十五年七月初版

(52871)

算學叢書 積分問題解法一冊

每冊定價國幣貳元

外埠酌加運費匯費

版權所有
翻印必究

編著者 程凱丞

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

✤D四〇四五

周

序

微分學與積分學均以極限論爲基礎,然解決積分問題遠不如解決微分問題之易:一因求函數之微係數或微分有一定成法可按,惟積分則無之;二因積分爲微分之反運算,猶之開方之與乘方,但開方較乘方爲難,故積分亦不外是例.惟解決積分問題,亦不可不定一步驟.先將簡易函數之積分(從誘導得之)列爲一表,以爲解題時之準繩.被積函數之形狀若與表中某式相符者,則直接寫出其結果,否則須用各種方法變化之,使合於標準式之形.若被積函數爲有理分數,則分析函數爲數項.若爲無理函數,則代以新變數而使之理化.若爲對數函數,反三角函數,則實行分部.次數高者使之遞降,次數低者使之遞升.要之,各法所陳,無非化雜爲簡,避難就易,使趨於標準化而已.

本書搜集問題五百餘條,悉爲實用上常見之函數,分門別類,循序解答.每用一法,必先輸入其必要之概念及普遍之公式,此爲本書之核心,似與普通詳解一類書籍有別.凡公式皆能自導,並不以機械代替爲畢事也.閱讀解答之先必須自謀按法推演,推演不得,再閱解答,如是習一題即獲一題之益.

積分法之第二定義爲求和之極限,此定義在應用方面頗爲重要.本書之宗旨,在詳述求積分之方法,方法嫺熟,應用上當不致有所困難,故將應用問題一概略去.編者學識譾陋,尙望海內大師有以敎之.

二十五年元旦凱丞識于蘇州滄廬

目　次

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

積分問題解法

第一章

緒論

1 積分學與微分學之關係. 既知某函數爲 $F(x)$ 而欲求其微係數 $F'(x)$ 或求其微分 $F'(x)dx$, 此微分學中之事也反之, 如已知某函數之微係數爲 $F'(x)$, 或已知其微分爲 $F'(x)dx$ 而欲求此函數, 此乃積分學中惟一之問題. 故積分學與微分學實係一種反運算之關係. 學者間有着重此種反運算之事實, 直稱積分曰反微分 (anti-differential).

2. 術語與記法. 於微分學中, 求 $F(x)$ 之微係數或求其微分之運算方法, 恆以下列二式記之:

(A) $\dfrac{d}{dx}F(x)=F'(x)$; $F'(x)$ 爲 $F(x)$ 之微係數.

(B) $dF(x)=F'(x)dx$; $F'(x)dx$ 爲 $F(x)$ 之微分.

積分既爲微分之反運算, 先將 (A), (B) 兩式逆其次序而讀之曰:

(C) $F'(x)$ 之積分等於 $F(x)$.

(D) $F'(x)dx$ 之積分等於 $F(x)$.

慣例,積分學中言函數之微分 (differential) 而不言函數之微係數 (differential coefficient). 今以 $\int F'(x)dx$ 表示 $F'(x)dx$ 之積分,於是 (D) 式之記法如下:

$$(E)\quad \int F'(x)dx = F(x).$$

式中 $F(x)$ 名曰 $F'(x)dx$ 之積分 (integral). 名此求 $F(x)$ 之方法曰積分法 (integration). 微分式前之符號 $\int$ 曰積分符號 (integral sign).

3. 積分常數與不定積分. 從上款 (E) 式,

若命 $F(x)=x^4$, 則因 $d(x^4)=4x^3dx$, $\therefore \int 4x^3dx=x^4$;

若命 $F(x)=x^4+2$, 則因 $d(x^4+2)=4x^3dx$, $\therefore \int 4x^3dx=x^4+2$;

若命 $F(x)=x^4-3$, 則因 $d(x^4-3)=4x^3dx$, $\therefore \int 4x^3dx=x^4-3$;

若命 $F(x)=x^4+c$, 則因 $d(x^4+c)=4x^3dx$, $\therefore \int 4x^3dx=x^4+c$.

因常數之微分爲零,上列諸函數,其差異之點在於常數之一項,其微分皆各相同 (卽均爲 $4x^3dx$). 然由 $4x^3dx$ 求原函數,其數實屬無窮,因每次予 c 以一定值,卽得一積分故也. 此隨意常數 c 名曰積分之常數,實際上其值得隨原始條件 (initial condition) 以定之. 又因 c 值爲不定,故稱 $F(x)+c$ 爲 $F'(x)dx$ 之不定積分 (indefinite integral). 由是得一定理如下:

[定理] 凡兩個函數之差爲一常數者,其微分恆相同. 又逆定理亦正確,卽兩個函數之微分相同者,其差爲一常數.

[逆定理之證明] 設兩函數爲 $\phi(x)$ 及 $\psi(x)$, 其公共之

係數爲 $f(x)$, 求證 $\phi(x)$ 與 $\psi(x)$ 之差爲一常數.

[證] 命兩函數之差爲 $F(x)$;

(1) 即 $F(x)=\phi(x)-\psi(x)$.

兩邊求微係數,得

(2) $$F'(x)=\frac{d}{dx}[\phi(x)-\psi(x)]=f(x)-f(x)=0. \qquad (\text{假設})$$

由中值定理,

(3) $$F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta x\,F'(x+\theta\cdot\Delta x). \quad 0<\theta<1$$

由 (2) 式,不論 x 之值爲何, $F(x)$ 之微係數終必爲零,

故 (3) 式中之 $F'(x+\theta\cdot\Delta x)$爲零,

即 $F(x+\Delta x)-F(x)=0$,

(4) 故 $F(x+\Delta x)=F(x)$.

故知 x 若取一微差 Δx, (1) 式中之 $F(x)$ 並不改變其值;換言之, $\phi(x)$ 與 $\psi(x)$ 之差僅爲一常數. *Q.E.D.*

將上款 (E) 式,兩邊求微分,

(F) $$d\int F'(x)dx=dF(x)=F'(x)dx,$$

故知將 $F'(x)dx$ 先求其積分次求其微分,結果仍爲 $F'(x)dx$;實行求積分時,縱有積分常數之存在,終因最後之求微分以消去,故 d 若在 $\int$ 之前,此兩記號恆可互相抵銷不論

4. 積分學中之假定 於初等積分學中,假定每一綿續函數必有一個不定積分可求,其嚴確之證明,非本編之目的,故不贅.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

5. 積分之驗證. 求得函數之積分後,欲知其結果是否正確,可將求得之積分重復求其微分,視其是否等於原來之函數卽可.此種驗證適用於一般不定積分,其理由根據於積分爲微分之反運算一語,固不待言.

6. 求積分之法則. 求函數之微係數,有普通法則可守(卽四步法則),惟求積分則無之.由每一求微分之結果,恆可誘導一求積分之公式,故積分法重在試探.先將簡易函數之積分列爲一表,名曰不定積分之標準式(standard form).運算時可將微分式與表中比較之;若發現與表中某一標準式相當者,其積分不難立卽求得.若無相當者,須用各種方法展變之,使合於標準式之形.

第 二 章

不定積分之標準式

7. 標準式及其證明.

標 準 式

(1) $\int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw.$

(2) $\int a\,dv=a\int dv.$

(3) $\int dx=x+c.$

(4) $\int v^n\,dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+c.\quad n\neq -1$

(5) $\int\frac{dv}{v}=\log v+c.$

(6) $\int a^v\,dv=\frac{a^v}{\log a}+c.$

(7) $\int e^v\,dv=e^v+c.$

(8) $\int\sin v\,dv=-\cos v+c.$

(9) $\int\cos v\,dv=\sin v+c.$

(10) $\int\sec^2 v\,dv=\tan v+c.$

(11) $\int \csc^2 v\, dv = -\cot v + c.$

(12) $\int \sec v \tan v\, dv = \sec v + c.$

(13) $\int \csc v \cot v\, dv = -\csc v + c.$

(14) $\int \tan v\, dv = \log \sec v + c$

(15) $\int \cot v\, dv = \log \sin v + c.$

(16) $\int \sec v\, dv = \log(\sec v + \tan v) + c.$

(17) $\int \csc v\, dv = \log(\csc v - \cot v) + c.$

(18) $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{v}{a} + c.$

(19) $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{v - a}{v + a} + c.$

(20) $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{v}{a} + c.$

(21) $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \log(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + c.$

(22) $\int \frac{dv}{\sqrt{2av - v^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{vers} \frac{v}{a} + c.$

(23) $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \frac{v}{a} + c.$

以上諸標準式均由微分法公式得來;其證明可將各式右邊之積分再求其微分,結果必與左邊積分記號後之微分式相等.

公式(1)之證明:

$$d\left[\int du+\int dv-\int dw\right]=d\int du+d\int dv-d\int dw=u+v-w,$$

$$\therefore\quad \int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw.$$

式(2)之證明:

$$\because\quad d\left[a\int dv\right]=a\,dv,$$

$$\therefore\quad \int a\,dv=a\int dv.$$

式(3)之證明:

$$\because\quad d(x+c)=dx,$$

$$\therefore\quad \int dx=x+c.$$

式(4)之證明:

$$\because\quad d\left(\frac{v^{n+1}}{n+1}+c\right)=v^n\,dv,$$

$$\therefore\quad \int v^n\,dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+c.$$

式除$n=-1$外,恆能成立,因若$n=-1$,則

$$\int v^{-1}\,dv=\frac{v^{-1+1}}{-1+1}+c=\frac{1}{0}+c=\infty+c,$$

不可能.若$n=-1$時,宜歸屬於公式(5)一類中.

式(5)之證明:

$$\because\quad d(\log v+c)=\frac{dv}{v},$$

$$\therefore\quad \int\frac{dv}{v}=\log v+c.$$

公式(6)之證明:

$$\because \quad d\left(\frac{a^v}{\log a}+c\right)=a^v\,dv,$$

$$\therefore \quad \int a^v\,dv=\frac{a^v}{\log a}+c.$$

公式(7)之證明:

$$\because \quad d(e^v+c)=e^v\,dv,$$

$$\therefore \quad \int e^v\,dv=e^v+c.$$

公式(8)之證明:

$$\because \quad d(-\cos v+c)=\sin v\,dv,$$

$$\therefore \quad \int \sin v\,dv=-\cos v+c.$$

公式(9)之證明:

$$\because \quad d(\sin v+c)=\cos v\,dv,$$

$$\therefore \quad \int \cos v\,dv=\sin v+c.$$

公式(10)之證明:

$$\because \quad d(\tan v+c)=\sec^2 v\,dv,$$

$$\therefore \quad \int \sec^2 v\,dv=\tan v+c.$$

公式(11)之證明:

$$\because \quad d(-\cot v+c)=\csc^2 v\,dv,$$

$$\therefore \quad \int \csc^2 v\,dv=-\cot v+c.$$

[illegible]證明:

$$d(\sec v+c)=\sec v\tan v\,dv,$$

$$\int \sec v\tan v\,dv=\sec v+c.$$

[illegible])之證明:

$\because\quad (-\csc v+c)=\csc v\cot v\,dv,$

$\therefore\quad \int \csc v\cot v\,dv=-\csc v+c.$

(14) 之證明:

$\because\quad (\log\sec v+c)=\dfrac{d(\sec v)}{\sec v}=\dfrac{\sec v\tan v\,dv}{\sec v}=\tan v\,dv,$

$\therefore\quad \int\tan v\,dv=\log\sec v+c=-\log\cos v+c.$

[illegible]

$$\int\tan v\,dv=\int\frac{\sin v\,dv}{\cos v}=-\int\frac{-\sin v\,dv}{\cos v}=-\int\frac{d(\cos v)}{\cos v}$$

$$=-\log\cos v+c=\log\sec v+c.$$

[illegible](15)之證明:

$\because\quad d(\log\sin v+c)=\dfrac{d(\sin v)}{\sin v}=\dfrac{\cos v\,dv}{\sin v}=\cot v\,dv,$

$\therefore\quad \int\cot v\,dv=\log\sin v+c.$

[illegible]

$$\int\cot v\,dv=\int\frac{\cos v\,dv}{\sin v}=\int\frac{d(\sin v)}{\sin v}=\log\sin v+c.$$

(16)之證明:

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com