



中華民國二十五年七月初版

(62871)

算學叢書 積分問題解法 一冊

每冊定價國幣貳元

外埠酌加運費匯費

版權所有  
翻印必究

編著者 程 凱 丞

發行人 王 雲 五  
上海河南路

印刷所 商務印書館  
上海河南路

發行所 商務印書館  
上海及各埠

◆D四〇四五

周

## 序

微分學與積分學均以極限論為基礎，然解決積分問題遠不如解決微分問題之易：一因求函數之微係數或微分有一定成法可按，惟積分則無之；二因積分為微分之反運算，猶之開方之與乘方，但開方較乘方為難，故積分亦不外是例。惟解決積分問題，亦不可不定一步驟。先將簡易函數之積分（從誘導得之）列為一表，以為解題時之準繩。被積函數之形狀若與表中某式相符者，則直接寫出其結果，否則須用各種方法變化之，使合於標準式之形。若被積函數為有理分數，則分析函數為數項。若為無理函數，則代以新變數而使之理化。若為對數函數，反三角函數，則實行分部。次數高者使之遞降，次數低者使之遞升。要之，各法所陳，無非化雜為簡，避難就易，使趨於標準化而已。

本書搜集問題五百餘條，悉為實用上常見之函數，分門別類，循序解答。每用一法，必先輸入其必要之概念及普遍之公式，此為本書之核心，似與普通詳解一類書籍有別。凡公式盡能自導，並不以機械代替為畢事也。閱讀解答之先必須自設法推演，推演不得，再閱解答，如是習一題即獲一題之益。

積分法之第二定義爲求和之極限,此定義在應用方面頗爲重要.本書之宗旨,在詳述求積分之方法,方法嫻熟,應用上當不致有所困難,故將應用問題一概略去.編者學識譴陋,尙望海內大師有以教之.

二十五年元旦凱丞識于蘇州滄廬

# 目 次

<b>第一章 緒論</b> .....	1
1. 積分學與微分學之關係 .....	1
2. 術語與記法 .....	1
3. 積分常數與不定積分 .....	2
4. 積分學中之假定 .....	3
5. 積分之驗證 .....	4
6. 求積分之法則 .....	4
<b>第二章 不定積分之標準式</b> .....	5
7. 標準式及其證明 .....	5
8. 本章問題解法 .....	13
9. 公式(1)至公式(5)之例題 .....	17
10. 公式(6)至公式(7)之例題 .....	26
11. 公式(8)至公式(17)之例題 .....	28
12. 公式(18)至公式(23)之例題 .....	34
<b>第三章 三角函數之積分法</b> .....	43
13. 三角微分 .....	43

14.	求 $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ( $m$ 或 $n$ 爲正整奇數).....	43
15.	求 $\int \tan^n x dx$ , 或 $\int \cot^n x dx$ ( $n$ 爲整數).....	44
16.	求 $\int \sec^n x dx$ , 或 $\int \csc^n x dx$ ( $n$ 爲正整偶數).....	45
17.	求 $\int \tan^m x \sec^n x dx$ , 或 $\int \cot^m x \csc^n x dx$ ( $n$ 爲偶數, 或 $m$ 爲奇數).....	45
18.	用倍角三角函數求 $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ( $m, n$ 均爲 偶數).....	46
19.	求 $\int \sin mx \cos nx dx$ , $\int \sin mx \sin nx dx$ 及 $\int \cos mx \cos nx dx$ ( $m \neq n$ ).....	47
20.	本章例題.....	48
<b>第四章 偏分積分法</b> .....		65
21.	有理分數.....	65
22.	分母之因子均爲一次式且無重複者.....	65
23.	分母之因子均爲一次式但有重複者.....	67
24.	分母有二次質因子且無重複者.....	69
25.	分母有二次質因子且係重複者.....	71
26.	本章例題.....	74
<b>第五章 代換積分法</b> .....		108
27.	代換積分法.....	108

---

28. 微分式含 $\sqrt{a^2-x^2}$ , 或 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 之代換公式.....	108
29. 微分式僅含 $x$ 之分指數之代換公式.....	111
30. 微分式僅含 $a+bx$ 之分指數之代換公式.....	112
31. 微分式僅含 $\sqrt{a+bx+x^2}$ 之代換公式.....	113
32. 微分式僅含 $\sqrt{c+bx-x^2}$ 之代換公式.....	114
33. 二項微分.....	115
34. 二項微分之可積分性之條件.....	117
35. 三角微分之代換公式.....	119
36. 代換雜例.....	121
37. 本章例題.....	124
<b>第六章 分部積分法.....</b>	<b>166</b>
38. 分部積分法之公式.....	166
39. 本章例題.....	169
<b>第七章 遞化積分法.....</b>	<b>183</b>
40. 二項微分之遞化公式.....	183
41. 三角微分之遞化公式.....	188
42. 本章例題.....	192
<b>第八章 定限積分.....</b>	<b>216</b>
43. 面積之微分.....	216
44. 定限積分.....	217

---

45. 定限積分之性質.....	218
46. 定限積分之計算法.....	219
47. 變數代換上下限亦宜代換.....	220
48. 本章例題.....	221
<b>第九章 累次積分法與偏積分法.....</b>	<b>232</b>
49. 累次積分法.....	232
50. 偏積分法.....	234
51. 本章例題.....	235



# 積分問題解法

## 第一章

### 緒論

1 積分學與微分學之關係. 既知某函數為  $F(x)$  而欲求其微係數  $F'(x)$  或求其微分  $F'(x)dx$ , 此微分學中之事也. 反之, 如已知某函數之微係數為  $F'(x)$ , 或已知其微分為  $F'(x)dx$  而欲求此函數, 此乃積分學中惟一之問題. 故積分學與微分學實係一種反運算之關係. 學者間有着重此種反運算之事實, 直稱積分曰反微分 (anti-differential).

2 術語與記法. 於微分學中, 求  $F(x)$  之微係數或求其微分之運算方法, 恆以下列二式記之:

$$(A) \quad \frac{d}{dx} F(x) = F'(x); \quad F'(x) \text{ 爲 } F(x) \text{ 之微係數.}$$

$$(B) \quad dF(x) = F'(x)dx; \quad F'(x)dx \text{ 爲 } F(x) \text{ 之微分.}$$

積分既為微分之反運算, 先將 (A), (B) 兩式逆其次序而讀之曰:

$$(C) \quad F'(x) \text{ 之積分等於 } F(x).$$

$$(D) \quad F'(x)dx \text{ 之積分等於 } F(x).$$

慣例，積分學中言函數之微分 (differential) 而不言函數之微係數 (differential coefficient). 今以  $\int F'(x)dx$  表示  $F'(x)dx$  之積分，於是 (D) 式之記法如下：

$$(E) \int F'(x)dx = F(x).$$

式中  $F(x)$  名曰  $F'(x)dx$  之積分 (integral). 名此求  $F(x)$  之方法曰積分法 (integration). 微分式前之符號  $\int$  曰積分符號 (integral sign).

### 3. 積分常數與不定積分. 從上款 (E) 式,

若命  $F(x) = x^4$ , 則因  $d(x^4) = 4x^3dx$ ,  $\therefore \int 4x^3dx = x^4$ ;

若命  $F(x) = x^4 + 2$ , 則因  $d(x^4 + 2) = 4x^3dx$ ,  $\therefore \int 4x^3dx = x^4 + 2$ ;

若命  $F(x) = x^4 - 3$ , 則因  $d(x^4 - 3) = 4x^3dx$ ,  $\therefore \int 4x^3dx = x^4 - 3$ ;

若命  $F(x) = x^4 + c$ , 則因  $d(x^4 + c) = 4x^3dx$ ,  $\therefore \int 4x^3dx = x^4 + c$ .

因常數之微分爲零，上列諸函數，其差異之點在於常數之一項，其微分皆各相同 (即均爲  $4x^3dx$ ). 然由  $4x^3dx$  求原函數，其數實屬無窮，因每次予  $c$  以一定值，即得一積分故也。此隨意常數  $c$  名曰積分之常數，實際上其值得隨原始條件 (initial condition) 以定之。又因  $c$  值爲不定，故稱  $F(x) + c$  爲  $F'(x)dx$  之不定積分 (indefinite integral). 由是得一定理如下：

[定理] 凡兩個函數之差爲一常數者，其微分恆相同。又逆定理亦正確，即兩個函數之微分相同者，其差爲一常數。

[逆定理之證明] 設兩函數爲  $\phi(x)$  及  $\psi(x)$ ，其公共之

係數爲  $f(x)$ ，求證  $\phi(x)$  與  $\psi(x)$  之差爲一常數。

[證] 命兩函數之差爲  $F(x)$ ；

$$(1) \quad \text{即 } F(x) = \phi(x) - \psi(x).$$

兩邊求微係數，得

$$(2) \quad F'(x) = \frac{d}{dx} [\phi(x) - \psi(x)] = f(x) - f(x) = 0. \quad (\text{假設})$$

由中值定理，

$$(3) \quad F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta x F'(x + \theta \cdot \Delta x), \quad 0 < \theta < 1$$

由 (2) 式，不論  $x$  之值爲何， $F(x)$  之微係數終必爲零，

故 (3) 式中之  $F'(x + \theta \cdot \Delta x)$  爲零，

$$\text{即 } F(x + \Delta x) - F(x) = 0,$$

$$(4) \quad \text{故 } F(x + \Delta x) = F(x).$$

設知  $x$  若取一微差  $\Delta x$ ，(1) 式中之  $F(x)$  並不改變其值；換言之， $\phi(x)$  與  $\psi(x)$  之差僅爲一常數。 Q. E. D.

將上款 (E) 式，兩邊求微分，

$$(F) \quad d \int F'(x) dx = d F(x) = F'(x) dx,$$

設知將  $F'(x) dx$  先求其積分次求其微分，結果仍爲  $F'(x) dx$ ；實行求積分時，縱有積分常數之存在，終因最後之求微分以消去，故  $d$  若在  $\int$  之前，此兩記號恆可互相抵銷不論

4. 積分學中之假定。於初等積分學中，假定每一綿續函數必有一個不定積分可求，其嚴確之證明，非本編之目的，故不贅。

5. 積分之驗證. 求得函數之積分後, 欲知其結果是否正確, 可將求得之積分重復求其微分, 視其是否等於原來之函數即可. 此種驗證適用於一般不定積分, 其理由根據於積分為微分之反運算一語, 固不待言.

6. 求積分之法則. 求函數之微係數, 有普通法則可守(即四步法則), 惟求積分則無之. 由每一求微分之結果, 恆可誘導一求積分之公式, 故積分法重在試探. 先將簡易函數之積分列為一表, 名曰不定積分之標準式 (standard form). 運算時可將微分式與表中比較之; 若發現與表中某一標準式相當者, 其積分不難立即求得. 若無相當者, 須用各種方法展變之, 使合於標準式之形.

## 第二章

### 不定積分之標準式

#### 7. 標準式及其證明.

##### 標準式

$$(1) \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw.$$

$$(2) \int a \, dv = a \int dv.$$

$$(3) \int dx = x + c.$$

$$(4) \int v^n \, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c. \quad n \neq -1$$

$$(5) \int \frac{dv}{v} = \log v + c.$$

$$(6) \int a^v \, dv = \frac{a^v}{\log a} + c.$$

$$(7) \int e^v \, dv = e^v + c.$$

$$(8) \int \sin v \, dv = -\cos v + c.$$

$$(9) \int \cos v \, dv = \sin v + c.$$

$$(10) \int \sec^2 v \, dv = \tan v + c.$$

$$(11) \int \csc^2 v \, dv = -\cot v + c.$$

$$(12) \int \sec v \tan v \, dv = \sec v + c.$$

$$(13) \int \csc v \cot v \, dv = -\csc v + c.$$

$$(14) \int \tan v \, dv = \log \sec v + c.$$

$$(15) \int \cot v \, dv = \log \csc v + c.$$

$$(16) \int \sec v \, dv = \log(\sec v + \tan v) + c.$$

$$(17) \int \csc v \, dv = \log(\csc v - \cot v) + c.$$

$$(18) \int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{v}{a} + c.$$

$$(19) \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{v-a}{v+a} + c.$$

$$(20) \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin \frac{v}{a} + c.$$

$$(21) \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \log(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + c.$$

$$(22) \int \frac{dv}{\sqrt{2av - v^2}} = \operatorname{arc vers} \frac{v}{a} + c.$$

$$(23) \int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc sec} \frac{v}{a} + c.$$

以上諸標準式均由微分法公式得來；其證明可將各式右邊之積分再求其微分，結果必與左邊積分記號後之微分式相等。

公式(1)之證明：

$$d \left[ \int du + \int dv - \int dw \right] = d \int du + d \int dv - d \int dw = u + v - w,$$

$$\therefore \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw.$$

式(2)之證明:

$$\therefore d \left[ a \int dv \right] = a dv,$$

$$\therefore \int a dv = a \int dv.$$

式(3)之證明:

$$\therefore d(x+c) = dx,$$

$$\therefore \int dx = x + c.$$

式(4)之證明:

$$\therefore d \left( \frac{v^{n+1}}{n+1} + c \right) = v^n dv,$$

$$\therefore \int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c.$$

式除  $n = -1$  外, 恆能成立, 因若  $n = -1$ , 則

$$\int v^{-1} dv = \frac{v^{-1+1}}{-1+1} + c = \frac{1}{0} + c = \infty + c,$$

不可能. 若  $n = -1$  時, 宜歸屬於公式(5)一類中.

式(5)之證明:

$$\therefore d(\log v + c) = \frac{dv}{v},$$

$$\therefore \int \frac{dv}{v} = \log v + c.$$

公式(6)之證明:

$$\because d\left(\frac{a^v}{\log a} + c\right) = a^v dv,$$

$$\therefore \int a^v dv = \frac{a^v}{\log a} + c.$$

公式(7)之證明:

$$\because d(e^v + c) = e^v dv,$$

$$\therefore \int e^v dv = e^v + c.$$

公式(8)之證明:

$$\because d(-\cos v + c) = \sin v dv,$$

$$\therefore \int \sin v dv = -\cos v + c.$$

公式(9)之證明:

$$\because d(\sin v + c) = \cos v dv,$$

$$\therefore \int \cos v dv = \sin v + c.$$

公式(10)之證明:

$$\because d(\tan v + c) = \sec^2 v dv,$$

$$\therefore \int \sec^2 v dv = \tan v + c.$$

公式(11)之證明:

$$\because d(-\cot v + c) = \csc^2 v dv,$$

$$\therefore \int \csc^2 v dv = -\cot v + c.$$



證證明:

$$d(\sec v + c) = \sec v \tan v \, dv,$$

$$\int \sec v \tan v \, dv = \sec v + c.$$

例(13)之證明:

$$\because (-\csc v + c) = \csc v \cot v \, dv,$$

$$\therefore \int \csc v \cot v \, dv = -\csc v + c.$$

例(14)之證明:

$$\because (\log \sec v + c) = \frac{d(\sec v)}{\sec v} = \frac{\sec v \tan v \, dv}{\sec v} = \tan v \, dv,$$

$$\therefore \int \tan v \, dv = \log \sec v + c = -\log \cos v + c.$$

例(15)

$$\begin{aligned} \int \tan v \, dv &= \int \frac{\sin v \, dv}{\cos v} = -\int \frac{-\sin v \, dv}{\cos v} = -\int \frac{d(\cos v)}{\cos v} \\ &= -\log \cos v + c = \log \sec v + c. \end{aligned}$$

例(15)之證明:

$$\because d(\log \sin v + c) = \frac{d(\sin v)}{\sin v} = \frac{\cos v \, dv}{\sin v} = \cot v \, dv,$$

$$\therefore \int \cot v \, dv = \log \sin v + c.$$

例(16)

$$\int \cot v \, dv = \int \frac{\cos v \, dv}{\sin v} = \int \frac{d(\sin v)}{\sin v} = \log \sin v + c.$$

例(16)之證明: