科學圖書大庫

微積分與解析幾何

譯者　趙良五　趙寶瑜

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

微積分與解析幾何

譯者 趙良五 趙寶琦

徐氏基金會出版

序　　言

微積分是一門應用日廣，講求觀念與實務融合，且須經常演習運用之基本數學。因此本書特別著重各種題材之選集，其範圍包括工程科學、自然科學、商學、經濟學、生活科學之最新應用實例以及數學基本理論與演算作業。

本書內容包含解析幾何，單一變數函數，無窮級數，以及微分方程，對教材之選擇側重學生程度與學習之配合。本書力求結構嚴謹，層次分明。譬如，書中對於一個於封閉且有界區間內連續之函數於該區間內必有一極大值之事實雖未證明，但引述了此定理，以便用之證明均值定理。

前三章介紹單一變數函數之導數計算，包括定義、公式及應用之發展演進。四、五兩章介紹函數之積分與應用。積分之最新應用包括心臟輸出之估算，閃光燈光度之計算，商業每日庫存量之決定，以及利用 Delesse 規則以分析人體組織之形成等等。

第六章除介紹正弦與餘弦外亦介紹了其他四個三角函數，以及對數函數與指數函數。若隨即介紹雙曲線函數，則第七章之積分公式可包含 9-5 節中 XXVII′ 至 XXXII′ 之微分公式。否則，若略去雙曲線函數之討論，則第九章亦可略去。

第八章（平面解析幾何）及第十章（極坐標）介紹圓錐曲線、心臟線之性質及基本有關題材，包括面積及弧長。

第十一章（向量及參數方程式）介紹向量幾何、向量函數及其導數。第十二章（無窮級數）首先介紹數列與級數之區別，特別加強估算之技巧，並介紹估算 π 之最新及最簡捷之方法（Salamin 對數法）。對冪級數之微分與積分處理可導致估算許多無法利用基本公式以計算之定

積分值。

第十三章（微分方程）包括未定係數法之介紹。有許多實例及應用均於本章中討論，諸如電路、振動、碳－14估計時期、細菌之成長、以及血糖之測定等等問題。

本書末將代數、幾何、及三角等預修課程之基本公式彙編成附錄以供參考。本書大部分問題均附有解答，可供讀者參考。

本書承蒙許多同事、同學之鼎力相助，謹此深致謝忱；匆促成書，缺失勢難避免，尚祈先進同道不吝指教！

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　　　　發行人　呂幻非

科學圖書大庫

中華民國七十四年四月十七日初版

微積分與解析幾何

基本定價8.40

譯者　趙良五　銘傳商專商業數學科主任
　　　趙寶琦　銘傳商專講師

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。　謝謝惠顧

局版臺業字第3033號

出版者	財團法人 徐氏基金會出版部	臺北市郵政信箱 13-306 號	電話 9221763 9271575 9271576 9286842
發行者	財團法人 徐氏基金會出版部	郵政劃撥帳戶 00157952 號	
承印者	大原彩色印製有限公司	台北市武成街三五巷九號	電話 3070998

目　　錄

第一章　函數之變率……………………………………………1

1-1　導　言……………………………………………1
1-2　坐　標……………………………………………2
1-3　增　量……………………………………………5
1-4　直線之斜率……………………………………8
1-5　直線方程式……………………………………15
1-6　函數與圖形……………………………………22
1-7　曲線之斜率……………………………………43
1-8　函數之導數……………………………………48
1-9　速度與變率……………………………………56
1-10　極限之性質……………………………………63
1-11　極限定理之證明………………………………77

第二章　微　分……………………………………………87

2-1　導　言……………………………………………87
2-2　多項式函數及其導數…………………………88
2-3　有理函數及其導數……………………………97
2-4　反函數及其導數………………………………107
2-5　隱函數及其導數………………………………112
2-6　函數之增量……………………………………119
2-7　解方程式之牛頓法……………………………122
2-8　合成函數及其導數……………………………126

2-9 三角之複習……132
2-10 正弦及餘弦函數之微分……143
2-11 連續性……152
2-12 微　分……167
2-13 導數及相關微分之公式……170

第三章　應　用……180

3-1 一級導數之符號且應用於曲線之作圖……180
3-2 相關變率……183
3-3 二階導數符號之重要性……189
3-4 曲線畫法……193
3-5 極大值與極小值理論……199
3-6 極大值與極小值之問題……202
3-7 樂爾（Rolle）定理……217
3-8 均值定理（The Mean-value Theorem）……221
3-9 不定型與L'Hôpital 規則……226
3-10 均值定理之推廣……234
3-11 均值定理於曲線軌跡之應用……236

第四章　積　分……249

4-1 導　言……249
4-2 定積分……249
4-3 不定積分之應用……256
4-4 正弦與餘弦之積分……261
4-5 曲線下方之面積……265
4-6 以極限計算面積……271
4-7 由微積分求面積……278
4-8 定積分與積分基本定理……284
4-9 求積分近似值的法則……298
4-10 符號之一些註釋……311

第五章　定積分之應用……322

5-1　導　言……322
5-2　二曲線間之面積……322
5-3　距　離……325
5-4　體積（切片法）……330
5-5　體積（柱殼法或墊圈法）……338
5-6　近似值……346
5-7　平面曲線的長度……350
5-8　旋轉曲面面積……359
5-9　函數之平均值……367
5-10　力矩與質量中心……372
5-11　形心與重心……381
5-12　帕卜定理……385
5-13　液態靜壓……389
5-14　功……395

第六章　超越函數……408

6-1　三角函數……408
6-2　反三角函數……415
6-3　反三角函數之導數……423
6-4　自然對數……428
6-5　ln x 之導數……431
6-6　自然對數之性質……436
6-7　$y = \ln x$ 之圖形……438
6-8　指數函數……441
6-9　a^u 函數……448
6-10　函數 $\log_a u$……455
6-11　複利及指數成長……458

第七章　積分方法……468

7-1　基本公式……468
7-2　三角函數之乘冪……474
7-3　正弦與餘弦之偶數乘冪……481
7-4　有關 $\sqrt{a^2-u^2}$，$\sqrt{a^2+u^2}$，$\sqrt{u^2-a^2}$，a^2+u^2 及 a^2-u^2 之積分……485
7-5　有關 ax^2+bx+c 之積分……494
7-6　利用部分分式之原理積分……499
7-7　分部積分法……508
7-8　$\sin x$ 及 $\cos x$ 之有理函數及其他三角函數之積分……516
7-9　其他代換法……520
7-10　廣義積分……525

第八章　平面解析幾何……546

8-1　曲線與方程式……546
8-2　切線及法線……554
8-3　兩點間之距離，方程式……563
8-4　圓……565
8-5　拋物線……571
8-6　橢　圓……582
8-7　雙曲線……594
8-8　二次曲線……605
8-9　不變式與判別式……610
8-10　圓錐曲線……613

第九章　雙曲線函數……625

9-1　導　言……625
9-2　定義及恆等式……625
9-3　導數及積分……630
9-4　雙曲線弳度之重要性……638

9-5 反雙曲線函數……………………………………………………………640
9-6 懸吊之纜線……………………………………………………………647

第十章　極坐標……………………………………………………………654

10-1 極坐標系……………………………………………………………654
10-2 極坐標方程式之圖形……………………………………………………659
10-3 圓錐曲線及其他曲線之極坐標方程式………………………………………664
10-4 向徑與切線之夾角 ϕ ……………………………………………………671
10-5 極坐標平面區域之面積…………………………………………………677

第十一章　向量及參數方程式………………………………………………685

11-1 向量之分量與單位向量 **i** 和 **j** ………………………………………685
11-2 動力學上之參數方程式…………………………………………………690
11-3 幾析幾何中之參數方程式………………………………………………695
11-4 向量函數之導數…………………………………………………………706
11-5 速度和加速度……………………………………………………………711
11-6 切向量……………………………………………………………………717
11-7 曲率及法向量……………………………………………………………721
11-8 速度和加速度之切線分量法線分量………………………………………727
11-9 極坐標……………………………………………………………………732

第十二章　無窮級數…………………………………………………………741

12-1 導　言……………………………………………………………………741
12-2 數　列……………………………………………………………………742
12-3 常見之極限問題…………………………………………………………754
12-4 無窮級數…………………………………………………………………759
12-5 正項級數之收斂檢驗法…………………………………………………774
12-6 絕對收斂…………………………………………………………………794
12-7 交錯級數、條件收斂……………………………………………………797
12-8 函數之冪級數……………………………………………………………805

12-9 帶餘式之泰勒定理：正弦、餘弦、及 e^x ······813
12-10 進一步之計算，對數，反正切，及 π ······826
12-11 不定型······837
12-12 冪級數之收斂；積分及微分······841

第十三章 微分方程式······860

13-1 導 言······860
13-2 解······862
13-3 一級微分方程式：變數分離······863
13-4 一級微分方程式：齊次······866
13-5 一級微分方程式：線性······869
13-6 一級正合微分方程式······872
13-7 特殊類型之二級微分方程式······876
13-8 常係數線性方程式······878
13-9 線性、二級、齊次、常係數微分方程式······879
13-10 線性、二級、非齊次、常係數微分方程式······883
13-11 振 動······894

附 錄······904

A. 基本公式······904
B. 表······909

答 案······922

第一章　函數之變率

1-1 導　言

微積分是探索變化及運動之數學，無論今昔，在對物體運動，成長演變，與外力作用而產生加速度等研究，它都是適切必要之數學工具。在應用上，微積分可用來估測星球軌道；設計慣性導航系統，廻旋加速器與雷達系統；探究太空航行問題；測試海流及空氣動力之科學理論；且可對人類經濟、社會及心理行爲予以模式化。甚而對商學、生物學、醫學、畜牧學及政治學上各種問題亦予以模式化，其應用更有增廣之趨勢。雖然科學家不只需要數學，數學亦不只微積分，但無疑的，微積分是非常重要有用之工具，亦是研習各種高等數學之預修科目。

本世紀偉大數學家諾以曼（John von Neumann 1903～57)曾力言："微積分是近代數學第一項成就，其重要性顯而易見，無須高估，其亦最足以定義近代數學之開端，微積分邏輯推衍之數理分析系統一直是正確思維之最前進技術。"*

微積分可解決下面兩類問題，第一類是尋求變量之變率。當物體作直線運動時，其與起點之距離隨時間改變，吾人可求知任一瞬時間物體運行之速度。本書微分部分即是處理此類問題。

第二類問題，當運行物體之每一瞬間速度已知時，吾人可尋求運行距離與時間之函數關係。本書積分部分即是處理當變率已知時之函數問題。

見諾以曼所著 "The Mathematician," Vol. 4, World of Mathematics, pp. 2053-2063.

現代理工科學均藉微積分精確之數學式來表示物理定律，並研究這些定律之重要性。因有微積分，牛頓（Sir Isaac Newton 1642-1727）方能解釋地球環繞太陽運轉之道理，此乃物理假定之結果，亦即今日熟知之萬有引力定律。克皮耳（Kepler 1571-1630）花費近二十年時間觀測所得之數據並以經驗法則歸納發明了克皮耳三大定律：

(a) 每個行星繞太陽運行之軌道係以太陽為一焦點而成之橢圓形。

(b) 行星與太陽之聯線在相等時間內掃過之區域亦相等。

(c) 行星環繞太陽旋轉之週期平方與它距太陽之平均距離立方成正比。

以微積分為主要之數學工具，利用牛頓之引力及運動定律即可輕易導出上述三定律。

德國數學及哲學家萊普尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz 1946-1716）完成了微積分大部份內容之開發工作，其詮釋比牛頓註解更廣被接受。

解析幾何構成本書第三部份，其由幾個數學家所共同創作 *。兩名法國數學家笛卡兒（Rene′ Descartes 1596-1650）及費馬（Pi-erre de Fermat 1601-1665）為解析幾何兩大創始人。利用與兩個互相垂直坐標軸間之距離以標定平面上一點位置之觀念係創自笛卡兒，故將此坐標命為"笛卡兒坐標"以資追念。本章1-2節討論坐標。解析幾何最重要之特性在於利用代數方法及方程式來解釋幾何問題。相反地，亦將代數方程式繪成幾何圖形，再藉著幾何之技巧解決代數問題。微積分大部分理論皆可以幾何式表之，故將微積分與解析幾何合併研習，收益最大。

1-2 坐 標

解板幾何中代數與幾何關係係建立於平面上點與有序數對（x，y）間之1-1對應關係。其間關係之建立有許多方法，而下述者為最常用者。

* 參閱 *World of Mathematics*, Vol. 1, "Commentary on Descartes and Analytical Geometry," pp. 235-37. 以及1949年1月份之 *Scientific American*上 Carl B. Boyer，所著 "The Invention of Analytic Geometry,"

平面上定義一條可左右無限延伸之直線爲水平線，並稱之爲 x - 軸或橫軸（見圖 1-1）。在此直線上選定一原點 O，並決定一單位長。然後以此長度刻劃度數。數字 0 即位於原點 O，數字 $+a$ 表 O 點右方距離原點 a 個單位之點；而數字 $-a$ 表 O 點左方與 $+a$ 所表之點相對稱於原點之點。因而在此規定下，x - 軸與實數集合間建立 1-1 對應之關係。

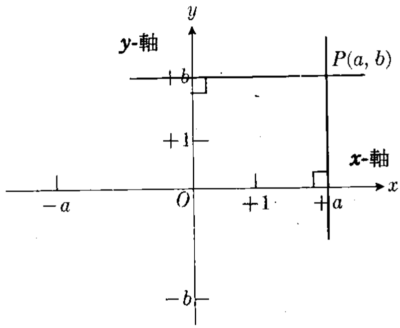

圖 1-1　通過 a 與 x-軸垂直之直線與通過 b 與 y-軸垂直之直線交於點 $P(a, b)$

通過 O 點在此平面上做另一條可向上下無限延伸之鉛垂直線。此線稱爲 y - 軸，或縱軸。在 y - 軸上用以代表 $+1$ 之單位長並無需與 x - 軸上代表 $+1$ 之單位長相等。在 y - 軸上亦依單位長刻度，正數 $+b$ 表 O 點上方 b 單位遠之點，而負數 $-b$ 即表於 O 點下方 b 單位之對稱點。

現對平面上之任意點均可指定一數對。若有一直線經由 a 點與 x - 軸垂直，另有一直線經由 b 點與 y - 軸垂直，則此二直線之交點即坐標爲 $P(a, b)$。而 a 爲 P 之 x - 坐標，b 爲 P 之 y - 坐標。數對 (a, b) 則爲點 P 之坐標對。此處應注意 (a, b) 爲有序數對；即 x - 坐標於先，而 y - 坐標於後。

爲確保平面上之點均無漏失，吾人亦可對平面上任一點做兩條通過此點並與二坐標軸垂直之直線。若其垂直線通過 x 與 y 軸於分別於 a 與 b 點，則此點 P 之坐標數對爲 (a, b)。

通過 $P(a, b)$ 而與坐標軸垂直之直線必通過軸上之 a 與 b，故每一點均僅有一坐標對。

此二坐標軸將平面分成四個象限，稱之爲第一、第二、第三、及第四象限。見圖 1-2。

測度 x 軸與 y 軸之單位無需一致。譬如，若 y 爲一潛水者在 x 米深度下能

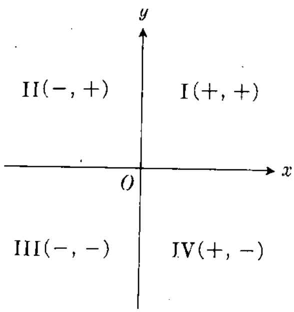

圖 1-2　四象限

持續最長時間之分數，則 x 軸上之"1"代表 1 米，而 y 軸上之"1"代表 1 分鐘。因此，由原點所做之刻度，在二坐標上無需相同，但在一坐標軸上，應相同。

但於某些情況下，譬如測量，南北方向測量 1 步當與東西方向測量 1 步相同。基於此原因，在三角中通常規定在兩坐標軸上之單位長相等。而在解析幾何中亦常有此規定。

本書中若已知點之坐標，而無單位刻劃時，均規定二軸之坐標刻度相同。在特殊情況下，當處理有關兩線間之夾角，或不與坐標軸平行之線段長等問題時，亦有此規定。

習題1-2

在下列各問題（1-12）中，先繪一對坐標軸，然後標出已知點 $P(a, b)$ 並且標出：

(a) Q 點以使 PQ 垂直於 x - 軸並被其平分。寫出 Q 之坐標。（P 與 Q 對稱於 x - 軸）。

(b) R 點以使 PR 垂直於 y - 軸並被其平分。寫出 R 之坐標。（P 與 R 對稱於 y - 軸）。

(c) S 點以使 PS 被原點平分。寫出 S 之坐標。（P 與 S 對稱於原點）。

(d) T 點以使 PT 垂直於平分第一及第三象限之 45°線 L，並且 PT 被線 L 平分。寫出 T 之坐標。假設坐標軸之單位長相等。（P 與 T 對稱於 L）。

1. $(1, -2)$	**2.** $(2, -1)$	**3.** $(-2, 2)$
4. $(-2, 1)$	**5.** $(0, 1)$	**6.** $(1, 0)$
7. $(-2, 0)$	**8.** $(0, -3)$	**9.** $(-1, -3)$
10. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	**11.** $(-\pi, -\pi)$	**12.** $(-1.5, 2.3)$

13. 若$P=P(x,y)$，則上述(a)中之Q點坐標爲$(x,-y)$。試將R，S，及T亦以x與y表示之。

在14～17問題中，將二坐標之單位長取爲相等。

14. 一直線通過點$(0,0)$及點$(1,1)$。試求其與正x-軸所夾之銳角。並繪圖。

15. 以$(-1,1)$，$(2,0)$，及$(2,3)$爲頂點可構成三個平行四邊行。試繪其圖，並寫出另外之頂點坐標。

16. 第二象限內一圓與二坐標軸相切。切y-軸於$(0,3)$。

(a)與x-軸切於何點？並繪圖。

(b). 圓心之坐標爲何？

17. 一直線通過點$(1,1)$及$(2,0)$並交y-軸於點$(0,b)$。試利用相似三角形求b。

1-3 增　量 (Increments)

若一質點開始於一點$P_1(x_1,y_1)$，然後至一新位置$P_2(x_2,y_2)$，則其坐標改變，而有一增量Δx（讀做delta x）與Δy（讀做delta y）。譬如，若一質量由$A(1,-2)$移至$B(6,7)$，如圖1-3，則增量爲

$$\Delta x = 5, \qquad \Delta y = 9.$$

在坐標所產生之增量爲其淨變量，即

$$\Delta x = (\text{終點之}x) - (\text{始點之}x)$$

及

$$\Delta y = (\text{終點之}y) - (\text{始點之}y)。$$

若一質點之始點爲$P_1(x_1,y_1)$，其終點爲$P_2(x_2,y_2)$，則增量Δx與Δy依下式計算之：

$$\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta y = y_2 - y_1.$$

增量爲任意實數：正値、負値、或零。例如在圖1-4中，由$C(2,5)$至$D(2,-3)$之增量爲

$$\Delta x = 2-2=0, \qquad \Delta y = -3-5=-8.$$

由C至D，x之淨變量爲零。由C移至D y-坐標減少8。

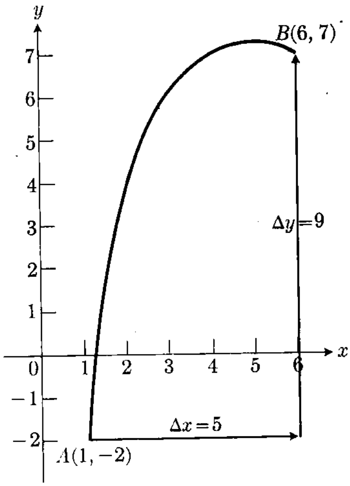

圖 1-3 當一質點由一點移至另一點時，Δx 及 Δy 可由其始點及終點之坐標計算得之：

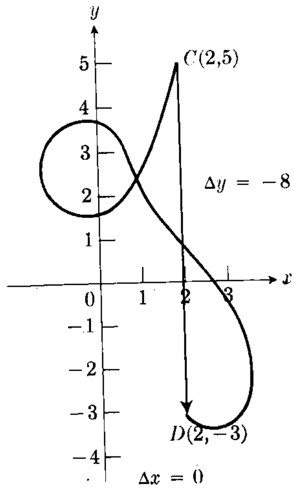

圖 1-4 由 $C(2,5)$ 至 $D(2,-3)$ x 坐標之淨變量為零。

$$\Delta x = 6 - 1 = 5, \qquad \Delta y = 7 - (-2) = 9.$$

質點由始點至終點所經之路線與其淨變量無關。

若二坐標軸之度量單位長相等，則平面上之距離可以其共同之單位位長表之。見圖 1-5，利用畢氏定理（ Pythagorean theorem ），兩點 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 間之距離 d 即為直角三角形之斜邊。其計算如下：

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

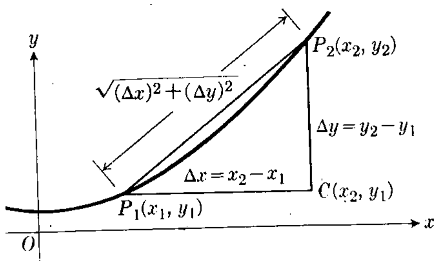

圖 1-5 距離應用畢氏定理計算之