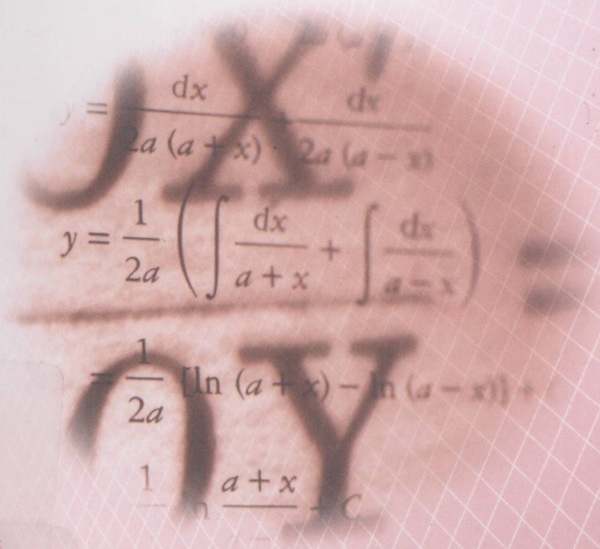
21世纪应用型本科院校规划教材

高等数学习题课教程

GAODENGSHUXUE XITIKE JIAOCHENG

主 编 薛巧玲 王顺凤 夏大峰



南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

高等数学习题课教程

主　编　薛巧玲　王顺凤　夏大峰

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/薛巧玲,王顺凤,夏大峰主编.
南京:南京大学出版社,2008.10
21 世纪应用型本科院校规划教材
ISBN 978-7-305-05562-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①薛…②王…③夏… Ⅲ.高等数学一高等学校一习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 149639 号

出 版 者 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
网 址 http://press.nju.edu.cn
出 版 人 左 健

丛 书 名 21 世纪应用型本科院校规划教材
书 名 高等数学习题课教程
主 编 薛巧玲 王顺凤 夏大峰
责任编辑 吴 汀 编辑热线 025-83686531

照 排 南京南琳图文制作有限公司
印 刷 南京人民印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 13.5 字数 329 千
版 次 2008 年 10 月第 1 版 2008 年 10 月第 1 次印刷
印 数 1～5000
ISBN 978-7-305-05562-1
定 价 24.50 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 sales@press.nju.edu.cn(销售部)
nupress1@public1.ptt.js.cn

前言

高等数学习题课是高等数学教学的重要组成部分,其目的在于培养学生的解题能力,以提高教学质量.一本上好的高等数学习题课教材,可作为教师掌握该课深广度的依据和选取内容的借鉴.编者根据多年的教学经验和长期积累的资料,编写成了这本书,供高等数学教师在进行习题课教学时参考,同时,给学生在学习高等数学时提供指导,也为报考研究生的考生复习高等数学时提供一定的帮助.

本书根据高等数学通行的教学大纲要求,按照高等数学通用教材的顺序,编写了二十三讲的习题课教学内容.根据理论与实践结合、讲解与练习结合、课内练习与课外练习结合的原则,每讲由内容提要、典型例题分析、课内练习及课外练习四个部分组成,并附答案.所选典型例题既具有广泛性又有代表性,解题方法力求灵活多样,部分例题能够一题多解,注重解题过程的分析和解题方法的总结,富于启发性.课内练习题的选取,主要着眼于培养学生基本的解题技能,使学生通过练习能更好地掌握基本概念和基本方法.课外练习题的选取主要侧重于培养学生综合运用所学知识独立解决问题的能力.

本书一至三讲由王顺凤编写,四至七讲由吴亚娟编写,八至十一讲及十六至十九讲由薛巧玲编写,十二至十五讲由朱杏华编写,二十至二十一讲由朱凤琴编写,二十二至二十三讲由陈纪波编写.全书由薛巧玲、王顺凤和夏大峰负责统稿.学校数学系的老师给予了大力支持和帮助,在此表示感谢!

由于我们水平所限,书中缺点和错误在所难免,恳请专家、同行和广大读者批评指正.

编者

2008 年 9 月

目　录

第一讲　函数的概念与性质

一、内容提要

1. 函数定义

设有两个变量 x,y,D 是一个给定的数集，如果对于 $\forall x\in D$，按照一定的法则总有确定的数值 y 与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作：$y=f(x)$. 数集 D 称为函数的定义域.

2. 函数的四条重要性质

设 D 为函数 $f(x)$ 的定义域，$I\subset D$.

性质 1:奇偶性　若对任意的 $x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对任意的 $x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，奇(偶)函数的图像关于原点(y 轴)对称.

性质 2:周期性　若存在 $l\neq 0$，使得当 $x\in D$，且 $x+l\in D$，都有 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为以 l 为周期的周期函数.

性质 3:单调性　若对 I 内任意的 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(或减少).

性质 4:有界性　若存在 $M>0$，使得对任一 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界，否则无界.

3. 反函数定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，若对于任意的 $y\in W$，在 D 上可以确定 x 与 y 对应，且满足 $y=f(x)$，则称新函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯记为 $y=f^{-1}(x)$.

4. 复合函数定义

若 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，$u=g(x)$ 的定义域为 D_2，当 $g(x)$ 的值域落在 $f(u)$ 的定义域内 D_1 时，称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合成的复合函数.

5. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的并用一个解析式表达的函数，称为初等函数.

二、典型例题分析

例 1　设 $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$ 的定义域.

解　由不等式组 $\begin{cases}\dfrac{2+x}{2-x}>0\\ 2-x\neq 0\end{cases}$，得函数 $f(x)$ 的定义域为 $D_1=\{x\,\big|\,|x|<2\}$.

令$\dfrac{2}{x}\in D_1$，即$\left|\dfrac{2}{x}\right|<2$，解得：$|x|>1$，即$D_2=\left\{x \,\middle|\, |x|>1\right\}$.

故所求的定义域为

$$D=D_1\cap D_2=\left\{x \,\middle|\, 1<|x|<2\right\}\text{，或 } D=(-2,-1)\cup(1,2).$$

例 2 设 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域.

解 由题意知，要使 $f(x+a)+f(x-a)$有意义，只要

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\text{，即}\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}.$$

由于 $a=\max\{-a,a\}$，$1-a=\min\{1-a,1+a\}$，
当 $a<1-a$ 时，$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[a,1-a]$；

当 $a=1-a$，即 $a=\dfrac{1}{2}$时，其定义域为$\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$；

当 $a>1-a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$时，其定义域为空集.

小结 求复合函数的定义域时，内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内.

例 3 已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

解

［法一］ 先求 $f(x)$，再求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

由 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$，

令 $u=\sin\dfrac{x}{2}$，得 $f(u)=2(1-u^2)$，

于是
$$f(x)=2(1-x^2).$$
故
$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

［法二］ 也可以先将 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$化为 $f\left(\sin\dfrac{t}{2}\right)$的形式，再利用题设即可.

由于
$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]=f\left(\sin\frac{\pi-x}{2}\right),$$
又
$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x.$$
故
$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=f\left(\sin\frac{\pi-x}{2}\right)=1+\cos(\pi-x)=1-\cos x.$$

例 4 已知 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\0 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1\\2 & |x|>1\end{cases}$，求 $f[g(x)]$与 $g[f(x)]$的表达式.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & |g(x)|\leqslant 1\\0 & |g(x)|>1\end{cases}$，而 $g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1\\2 & |x|>1\end{cases}$，于是，
当$|x|>1$ 时，$g(x)=2$，即$|g(x)|>1$；
当$|x|<1$ 时，$g(x)=2-x^2$ 即 $1<g(x)\leqslant 2$，且 $g(1)=1$，$g(-1)=1$.

因此当$|x|\neq 1$时,$|g(x)|>1$;当$|x|=1$时,$|g(x)|=1$.

所以　$f[g(x)]=\begin{cases}1 & |g(x)|\leqslant 1\\ 0 & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1 & |x|=1\\ 0 & |x|\neq 1\end{cases}.$

同样,$g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x) & |f(x)|\leqslant 1\\ 2 & |f(x)|>1\end{cases}$,而 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$,

于是　$\forall x\in\mathbf{R}$,均有$|f(x)|\leqslant 1$.

所以
$$g[f(x)]=2-f^2(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}.$$

例 5　设函数 $f(x)$满足 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$,$a$ 为常数,证明:$f(x)$是奇函数.

证明　令$\dfrac{1}{x}$代换原式中的 x,得
$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=ax.$$
原式乘以 2,得
$$4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=2\,\frac{a}{x}.$$
两式相减,得
$$f(x)=\frac{a}{3}\left(\frac{2}{x}-x\right).$$
由于
$$f(-x)=\frac{a}{3}\left(\frac{2}{-x}+x\right)=-\frac{a}{3}\left(\frac{2}{x}-x\right)=-f(x),$$
所以 $f(x)$是奇函数.

例 6　证明:定义于$(-a,a)$上函数 $f(x)$总能表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

证明　因为在$(-a,a)$上函数 $f(x)$总可写为
$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$
记 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,

则
$$f(x)=g(x)+h(x).$$
由于
$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),$$
$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-h(x),$$
所以 $g(x)$是偶函数,$h(x)$是奇函数.即 $f(x)$总能表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

例 7　设 $f(x)$为定义在$(-\infty,\infty)$内的偶函数,且图形关于直线 $x=2$ 对称.试证明 $f(x)$为周期函数.

证明　要证 $f(x)$为周期函数,关键是要找出其周期.由题设可知,该函数的图像关于 y 轴及直线 $x=2$ 对称,可猜得该函数的周期可能为 4.

因为函数的图像关于 y 轴对称,则$\forall x\in(-\infty,\infty)$有 $f(-x)=f(x)$.

又函数的图像关于直线 $x=2$ 对称,则$\forall x\in(-\infty,\infty)$有 $f(2+x)=f(2-x)$.

所以对于$\forall x\in(-\infty,\infty)$，有

$$f(x+4)=f[2+(2+x)]=f[2-(2+x)]=f(-x)=f(x),$$

故 $f(x)$是以 $l=4$ 为周期的周期函数.

三、课内练习

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\ln(x+1)}$；(2) $f(x)=\sqrt{\arcsin x+\dfrac{\pi}{4}}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(x-1)$，$f[f(x)]$.

3. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

4. 求 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & x\geqslant 0\\ x+1 & x<0\end{cases}$的反函数.

5. 判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；(2) $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$；(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

6. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，$\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

7. 证明：$f(x)=x-[x]\,(x\in(-\infty,+\infty))$是以 1 为周期的周期函数，并作出其图形.

8. 设函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in\overline{Q}\end{cases}$，其中 Q 为有理数集，$\overline{Q}$为无理数集，求 $D\left(-\dfrac{7}{5}\right)$，$D(1-\sqrt{2})$，并讨论函数 $D[D(x)]$的性质.

四、课外练习

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases}x & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

2. 设 $f(x)=x+3$，求函数 $g(x)$使得 $f[g(x)]=\sqrt{\dfrac{5x+1}{x}}$.

3. 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，已知 $y=1$ 时，$z=x$，求函数 $f(x)$.

4. 已知 $f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)=2f(x)+x$，求函数 $f(x)$.

5. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & 0<x<1\\ x^2 & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$的反函数.

6. 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x+\dfrac{3}{x}$，且 $f(0)\neq 0$，$|a|\neq|b|$. 证明：$f(x)$为奇函数.

7. 已知 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$均为单调增加函数，且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，证明：

$$g(g(x))\leqslant f(f(x))\leqslant h(h(x)).$$

8. 证明：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos x$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内无界.

第二讲　极限的概念及计算

一、内容提要

1. 数列极限定义

对于 $\forall \varepsilon>0$,总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限,或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

否则,就称数列是发散的.

2. 函数极限定义

对于 $\forall \varepsilon>0$,总存在 $X>0$,使得当 $|x|>X$ 时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

对于 $\forall \varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

对于 $\forall \varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 时,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限(右极限),记作 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ $\left(f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\right)$.

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小和无穷大的定义

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷小.

对于 $\forall M>0$,存在 $X>0(\delta>0)$,当 $|x|>X(0<|x-x_0|<\delta)$ 时,总有 $|f(x)|>M$,则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty(x\to x_0)$ 时为无穷大,记为 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}f(x)=\infty$.

(2) 无穷小的性质

① 有限个无穷小的代数和是无穷小.

② 有限个无穷小的乘积是无穷小.

③ 无穷小与有界函数的乘积是无穷小.

(3) 无穷小与无穷大的关系

在自变量的某个变化过程中,无穷大的倒数是无穷小,非零无穷小的倒数是无穷大.

4. 函数极限存在的充要条件

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

5. 极限存在的判别准则

(1) 单调有界数列必收敛.

(2) (夹逼准则)若在 x_0 的某一去心邻域内,恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

6. 极限四则运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,

$\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ (C 为任意常数);

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0\right)$.

上述极限四则运算法则对自变量的其他变化过程下的极限同样成立.

7. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

8. 无穷小比较,等价无穷小替换

(1) 设 $\lim\alpha=0$, $\lim\beta=0$,

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记为 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\ (C\neq 0)$,则称 β 与 α 是同阶无穷小.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记为 $\beta\sim\alpha$.

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta}{x^k}=C\ (C\neq 0,k>0)$,则称 β 是 x 的 k 阶无穷小.

(2) 设 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$, $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

当 $x\to 0$ 时,有下列一些常用的等价无穷小:

$\sin x\sim x$ $\tan x\sim x$ $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

$\arctan x\sim x$ $\arcsin x\sim x$ $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$

9. 求函数极限的一些常用方法

(1) 利用极限的四则运算及复合运算法则;

(2) 利用函数极限存在的充要条件;

(3) 利用无穷小与无穷大的性质；

(4) 利用极限存在的两个准则；

(5) 利用两个重要极限；

(6) 利用等价无穷小代换.

二、典型例题分析

例 1　计算下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0.$$

(2) 先求出数列的一般项的表达式：

$$x_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdots\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n+1}{2n},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

(3) 先求出数列的一般项的表达式：

令 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，则 $\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，

于是
$$x_n-\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

即
$$\frac{1}{2}x_n=1+\frac{1}{2^2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

即
$$x_n=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

所以
$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right]=\frac{3}{2}.$$

(4) 利用夹逼准则：

由于　$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1.$$

故由夹逼准则可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

小结　求数列极限，当项数与 n 有关时，不能直接用极限法则，先要求出数列的通项，再求极限. 若通项不易得时，可利用极限的存在准则求极限.

例 2　讨论下列函数当 $x\to 0$ 时的极限：

(1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+1 & x<0 \\ 1+x^2 & x>0 \end{cases}$；(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

解　(1) 考虑在分段点 $x=0$ 处的左极限与右极限.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}+1\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0^-}1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+x^2)=1,$$

由于
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=1,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$

(2) 考虑在 $x=0$ 处的左极限与右极限.

当 $x\to 0^+$ 时，$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$，

当 $x\to 0^-$ 时，$e^{\frac{1}{x}}\to 0$，故 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 不存在.

小结　分段函数分界点处的极限，要用左右极限来求，有些函数在特殊点处的极限也必须考虑左右极限.

例 3　计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$；(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

解　(1) 当 $x\to 0$ 时分子与分母的极限均为 0，且含有无理式，先对分子进行有理化，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}.$$

(2) 当 $x\to 0$ 时分子与分母的极限均为 0，先对分子进行因式分解，于是

$$\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)]$$

$$=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

例 4 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^{30}(2x+3)^{70}}{(5x-9)^{100}}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解 (1) 当 $x\to\infty$ 时，分子与分母趋向 ∞，先对分子分母同除以分母中的最高次幂 x^{100}，于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^{30}(2x+3)^{70}}{(5x-9)^{100}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{30}\left(2+\frac{3}{x}\right)^{70}}{\left(5-\frac{9}{x}\right)^{100}}=\frac{2^{70}}{5^{100}}.$$

(2) 先用三角函数恒等式进行化简，于是

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0.$$

小结 求函数极限时，常出现 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$ 等情况，都不能直接运用极限运算法则，必须对原式进行恒等变换、化简，然后再求极限. 常使用的化简方法有：通分，分子、分母有理化，分子、分母进行因式分解，消去公因式，利用三角函数的公式，分子分母同时除以某因式等.

例 5 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+x^3}}$；(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\sin^2x}$；(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

解 (1) 当 $x\to+\infty$ 时分子极限不存在，但 $\sin x$ 是有界函数，即 $|\sin x|\leqslant1$，

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}}=0$，即 $\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ 为无穷小($x\to+\infty$)，

因此，由无穷小性质，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+x^3}}=0.$$

(2) 当 $x\to0$ 时分子与分母的极限均为 0，可利用等价无穷小替换方法，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln(1+x^2)}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

小结 利用等价无穷小代换求某些多个因式乘积的极限时比较简便，但用等价无穷小代换极限时要慎重.如此例中的(2)若$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$，即得错误结果.

例 6 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$.

解

(1) 先对分子用和差化积公式变形，然后再用重要极限公式求极限.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\sin 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(4\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=1\times4=4.$$

(2)

[法一]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^2}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x}\right]^{-2}}=e^4.$$

[法二]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot4+2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^4\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^2=e^4\cdot1=e^4.$$

小结 利用两个重要极限公式求极限时，往往用三角公式或代数公式进行恒等变形或作变量代换，使之成为重要极限的标准形式.

例 7 设 $x_0>0,x_1=1+\frac{x_0}{1+x_0},\cdots,x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由题设可知：$x_n>0,x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}<2$，故数列$\{x_n\}$有界，又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n}{1+x_n}-\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}.$$

由于$(1+x_n)(1+x_{n-1})>0$，故 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号.

由此递推下去，得知 $x_{n+1}-x_n$ 的符号与 x_1-x_0 的符号是相同的，

若 $x_1-x_0<0$，则 $x_{n+1}-x_n<0\quad(n=0,1,2,\cdots)$，

若 $x_1-x_0>0$，则 $x_{n+1}-x_n>0\quad(n=0,1,2,\cdots)$，

因此，数列$\{x_n\}$必是单调的，即数列$\{x_n\}$是单调有界的，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对递推公式两边求极限，得

$$A=1+\frac{A}{1+A},$$

解得 $A=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

因为 $A>0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 8　已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$，求常数 a、b 的值.

解　因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，故只有当 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$ 时才能使 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}$ 存在，由此得 $1+a+b=0$，即 $b=-1-a$，将其代入左边，有

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1+a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1+a)=a+2.$$

于是 $a+2=3$，得 $a=1$，所以 $b=-2$.

例 9　证明 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界，且当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大量.

证明　对于 $\forall M>0$，取正整数 n，使 $\bar{x}=2n\pi>M$，而

$$f(\bar{x})=2n\pi\cos(2n\pi)=2n\pi>M,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

又取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n=1,2,\cdots)$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=+\infty$，

且
$$f(x_n)=f\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

所以当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大量.

三、课内练习

1. 选择题：

(1) 下列极限存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}4^x$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{3x^3-1}$　　C. $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$　　D. $\lim\limits_{x\to1}\sin\dfrac{1}{x-1}$

(2) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 有定义　　B. 极限存在　　C. 左极限存在　　D. 右极限存在

(3) 下列函数中当 $x\to+\infty$ 时，为无穷小量的是(　　).

A. $\dfrac{1}{x}\sin x$　　B. $e^{\frac{1}{x}}$　　C. $\ln(x+1)$　　D. $x\sin\dfrac{1}{x}$

(4) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=8$，则 a 的值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt[5]{8}$　　D. 均不对

(5) 当 $x\to0$ 时，$f(x)=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，则 $g(x)=$ (　　).

A. $\tan x-\sin x$　　B. $1-\cos x$　　C. $\sqrt{x}$　　D. x

2. 计算下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$　$(|x|<1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^n$.

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{x}\right)^{-x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.

4. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+ax+b}{2x^3+3x^2-1}=c$，求 a,b,c 的值.

6. (1) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\tan ax}{x} & x<0\\ x+2 & x\geqslant0\end{cases}$，已知$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在，求 a 的值.

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-x+1})$存在且不等于零，求 a 的值.

7. 设 $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，证明数列$\{a_n\}$收敛.

8. 设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四、课外练习

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{2}{x}\right]$，其中$[x]$表示 x 的取整函数；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x^5-2x^4+1}-x)$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+2\sin^2x}}{\tan^2x}$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}}{2}\right)^n$；