- 大学数学应用与提高丛书
- 丛书主编 蔡光兴 李子强

高等数学

——应用与提高

（第二版）

主 编 李逢高 郑 列
副主编 方 瑛 张凯凡

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学应用与提高丛书

丛书主编　蔡光兴　李子强

高等数学应用与提高

（第二版）

主　编　李逢高　郑　列
副主编　方　瑛　张凯凡

科学出版社
北　京

内　容　简　介

本书为《大学数学应用与提高丛书》之一，第二版依照新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和研究生入学考试高等数学大纲进行修订和重编，是与高等数学通用教材同步的辅助教材．本书共十三章，除第十三章外每章含有教学基本要求、内容提要、典型例题、疑难解答、应用与提高、练习题与自测题．第十三章为数学实验内容．书末附有习题参考答案，以及两套研究生入学数学考试模拟试题．

本书具有丛书共同特点：重视数学方法、注重学生应用能力的培养与提高，通过典型例题介绍各种解题思路、方法和计算技巧，通过内容提要、疑难解答帮助读者把高等数学中的概念予以融合贯通，通过应用与提高、练习题训练、数学实验训练进一步拓展解题思路，提高综合应用能力．

本书为高等学校本、专科学生的高等数学课程辅助教材，也可供成人教育和自学高等数学的学生学习使用，对报考硕士研究生的考生来说，本书无疑具有重要的参考价值．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学应用与提高(第二版)/李逢高，郑列主编．—北京：科学出版社，2009
(大学数学应用与提高丛书)
ISBN 978-7-03-025365-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.①李…②郑…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 149554 号

责任编辑：王雨舸/责任校对：李磊东
责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002 年 9 月第　一　版
2009 年 8 月第　二　版　开本：787×1092　1/16
2009 年 8 月第三次印刷　印张：21 3/4
印数：15 001—20 000　字数：538 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《大学数学应用与提高丛书》编委会

第二版前言

《高等数学应用与提高》自 2002 年出版以来，深受广大读者喜爱.据读者反映，本书的体系结构科学合理、例题经典丰富，既适合初学者巩固提高，也适合参加研究生考试的学生使用.

本次修订，将“微分方程”一章移到前面作为第七章；依照新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和研究生入学考试大纲对内容提要进行了重写；对典型例题、应用与提高部分的例题进行了少量更新和补充；对练习题、自测题做了部分调整；并附录了两套硕士研究生入学数学考试模拟试题.

本书第二版主编李逢高、郑列，副主编方瑛、张凯凡.第二版修订工作由方瑛、张水坤、李逢高、闻卉、张凯凡、郑列、贺方超、朱莹、耿亮、肖岸纯、熊淑艳、黄毅、朱永松完成.蔡光兴教授审阅了修订稿.

由于编者水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，敬请广大读者指正.

编　者

2009 年 6 月

前　言

《大学数学应用与提高丛书》是与高等学校学生必修的三门大学数学课程：高等数学、线性代数、概率统计相配套的辅助教材．编写这套丛书主要基于三方面的原因：第一，高等教育改革的实施，这三门大学数学课程授课时数在减少，受到时间的限制，概念的深入探讨、知识的融会贯通、知识面的扩展必受到一定影响，因此，学生们渴望有一套弥补上述不足、切合实际的辅助教材；第二，后续课程及研究生入学考试对三门大学基础数学课程在教学大纲范围内有深化趋势，因此，对大批报考硕士研究生的学生而言，他们渴望有一套针对性强的考研复习资料；第三，进入21世纪，社会对人才提出了更高要求，大学数学教育的作用不再仅仅是学习基础知识，为后续课程或其他科学打基础、提供工具，更重要的是传授数学思路、数学方法，培养学生的创新意识，提高学生的数学素养、数学思维能力、计算数学能力和应用数学能力．为此，我们组织了一批有着丰富教学经验和开拓创新精神的教师编写了这套辅助教材．丛书分三册：《高等数学应用与提高》、《线性代数应用与提高》、《概率统计应用与提高》，丛书主编为蔡光兴、李子强，副主编为郑列、李逢高、朱永松、方瑛．在内容上，丛书各册每章含有：

(1) 教学基本要求．是每章教学的基本要求．

(2) 内容提要．是每章基本概念、理论、方法的归纳，在学习或复习中起提纲挈领的作用．

(3) 典型例题．根据章节知识点，给出若干典型例题，介绍各种解题思路、方法和计算技巧．通过例题，使读者做到举一反三，提高独自解题能力．

(4) 疑难解答．提出若干疑难问题，并给予解答，帮助读者正确理解概念、理论与方法，培养学生正确思考问题、解决问题的能力．

(5) 应用与提高．结合本章知识内容，给出在实际应用中的实例及本章中难度较高的综合题或研究生考试题．

(6) 练习题．作为基本训练，训练学生各种能力．

(7) 自测题．用于自我检测，及时了解掌握程度．

(8) 上机实验．上机实验都集中放在书末，学生可在教师指导下上机练习或自学用，以增强学生计算应用能力．

本套丛书具有如下共性：

(1) 立足基础．通过教学要求、内容提要、典型例题、疑难解答，使学生对本章所要求掌握的基本概念、基本方法做到融会贯通．

(2) 重视数学思想方法、综合应用数学能力的训练与培养．通过典型例题、提高题、训练题来培养学生的数学解题能力和数学知识的综合运用能力．

(3) 突出应用与数学建模思想．通过实例，培养学生将实际问题转化为数学问题的数学建模能力，并运用数学知识加以解决的应用能力．

(4) 设置了数学实验，注重数学软件在高等数学、线性代数、概率统计中操作与应用，以提高学生学习兴趣，培养学生运用软件与数学知识解决实际问题能力．

《高等数学应用与提高》作为《大学数学应用与提高丛书》之一，具有丛书的共同特点

与章节编写体系，每章含教学基本要求、内容提要、典型例题、疑难解答、应用与提高以及练习题与自测题，并在书末专门用一章讲述高等数学实验.通过这些内容的教学，使学生对基本概念、基本方法做到融会贯通，并能将实际问题转化为数学模型，再运用数学知识与数学软件解决实际问题的能力及综合运用能力.

本书由蔡光兴、郑列主编，李逢高、方瑛任副主编.参加编写工作的有：郑列(第一章)，蔡光兴(第二章)，陈水林(第三章)，方瑛(第四章)，胡汉儒(第五章)，李子强(第六章)，柯云(第七章)，周启元(第八章)，杨策平(第九章)，黄斌(第十章)，刘磊(第十一章)，李逢高(第十二章)，朱永松、许松林(数学实验).最后由蔡光兴、胡汉儒、杨策平统稿，蔡光兴定稿.

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免有不妥甚至错误之处，恳请广大读者提出批评指正，以便再版时予以修订.

编　者

2002年6月

目 录

第一章　函数与极限

一、教学基本要求

(1) 理解函数的概念及函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

(2) 理解复合函数和反函数的概念.

(3) 熟悉基本初等函数的性质及其图形;会建立简单实际问题中的函数关系.

(4) 理解极限概念(对极限的 ε-N,ε-δ 定义可在学习过程中逐步加深理解,对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求),掌握极限的四则运算法则及换元法则.

(5) 理解极限的夹逼准则,了解单调有界准则,会用两个重要极限求极限.

(6)了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限.

(7) 理解函数在一点连续和在一个区间上连续的概念,了解间断点的概念,并会判断间断点的类型.

(8) 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大、小值定理和介值定理).

二、内 容 提 要

(一) 映射的有关概念

1. 映射

设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记为

$$f: X\to Y$$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的像,并记为 $f(x)$,即

$$y=f(x)$$

元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个原像. 集合 X 称为映射 f 的定义域,记为 D_f,即 $D_f=X$;X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域,记为 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$$

构成映射的三个要素:集合 X,即定义域 $D_f=X$;集合 Y,即值域 $R_f\subset Y$;对应法则 f,使对每个 $x\in X$,有唯一确定的 $y=f(x)$与之对应.

对每个 $x\in X$,元素 x 的像 y 是唯一的;而对每个 $y\in R_f$,元素 y 的原像不一定是唯一的;映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集,即 $R_f\subset Y$.

2. 满射及单射

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $R_f=Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的

像,则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射;若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$,它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 的单射;若映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为一一映射或双射.

3. 逆映射

设 f 是 X 到 Y 的单射,则由定义,对每个 $x \in R_f$,有唯一的 $x \in X$,适合 $f(x)=y$. 于是,我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g,即

$$g: R_f \to X$$

对每个 $y \in R_f$,规定 $g(y)=x$,这 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射,记为 f^{-1},其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$,值域 $R_{f^{-1}}=X$.

所以,只有单射才存在逆映射.

4. 复合映射

设有两个映射

$$g: X \to Y_1, \quad f: Y_2 \to Z$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则,它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$. 显然,这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射,这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射,记为 $f \circ g$,即

$$f \circ g: X \to Z$$

$$(f \circ g)(x)=f[g(x)], \ x \in X$$

应当注意,映射 g 和 f 构成复合映射的条件是:g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内,即 $R_g \subset D_f$;否则,不能构成复合映射. 由此可知,映射 g 和 f 的复合是有顺序的,$f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义,复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

(二) 函数的概念与性质

1. 函数

从实数集(或其子集)X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数,即设数集 $D \subset \mathbf{R}$,则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,通常简记为

$$y=f(x), \ x \in D$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记为 D_f,即 $D_f=D$.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记为 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

2. 函数的特性

(1) 函数的有界性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$. 如果存在数 K_1,使得

$$f(x) \leqslant K_1$$

对任一 $x\in I$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界,而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界. 如果存在数 K_2,使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任一 $x\in I$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有下界,而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个下界. 如果存在正数 M,使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in I$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界. 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 I 上无界;这就是说,如果对于任何正数 M,总存在 $x_1\in I$,使 $|f(x_1)|>M$,那么函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

函数 $f(x)$ 在 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上即有上界又有下界.

(2) 函数的单调性. 若函数 $y=f(x)(x\in D)$ 对于 D 内的区间 I 上任意两点 x_1、x_2:当 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加;当 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调减少.

(3) 函数的奇偶性. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即 $x\in D$)时,必有 $-x\in D$),且对于 D 内任意一点 x,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为偶函数;若恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

(4) 函数的周期性. 若函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义且存在一个非零常数 l,使得对 D 中任意 x,有 $x+l\in D$,而且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期. 函数的周期通常是指最小正周期,但有些周期函数不一定存在最小正周期.

3. 反函数

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}:(D)\to D$,称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数. 即:对每个 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,于是有

$$f^{-1}(y)=x$$

4. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数称为基本初等函数.

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义,且 $g(D)\subset D_1$,则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\ x\in D$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D,变量 u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$,即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$$

与复合映射一样,g 与 f 能构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是:函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D_f 内,即 $g(D)\subset D_f$. 否则,不能构成复合函数.

(三) 函数的极限

1. 数列及其极限

(1) 数列. 数列是无穷有序的数组，而其第 n 项称为一般项，数列 $\{a_n\}$ 中取无穷且保持原有次序而构成的数列称为 $\{a_n\}$ 的子列.

(2) 数列的极限. 对于数列 $\{a_n\}$，若存在数 a，满足：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$，有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 极限存在或收敛，并把 a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

若数列 $\{a_n\}$ 的极限不存在，则称数列 $\{a_n\}$ 发散.

(3) 几何意义. 数列 $\{a_n\}$ 的极限为 a，则 a 的任一邻域内含有数列 $\{a_n\}$，几乎所有的项，即除至多有限项外的所有项都在该邻域中.

2. 函数极限(当 $x\to x_0$ 时)定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,r)$ $(r>0)$ 内有定义，若存在数 A，满足：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ $(\delta<r)$，对于满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的任意 x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当 $x\to x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限存在且极限为 A，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

3. 单侧极限(左、右极限)

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 (x_0-r,x_0) $((x_0,x_0+r))$ $(r>0)$ 有定义，若存在数 A，满足：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0(\delta<r)$，对于满足 $0<x_0-x<\delta$ $(0<x-x_0<\delta)$ 的任意 x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则 $A=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$ $(A=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+))$ 称为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限(右极限).

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件为其左右极限存在且相等.

4. 函数极限(当 $x\to\infty$ 时)定义

设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>X_0$ (其中 $X_0>0$) 内有定义，若存在数 A，满足 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$ $(X>X_0)$，对于满足 $|x|>X$ 的任意 x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限存在且极限为 A，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

设函数 $y=f(x)$ 在 $x>X_0$ $(x<-X_0)$ (其中 $X_0>0$) 内有定义，若存在数 A 满足：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0(X>X_0)$，对于满足 $x>X(x<-X)$ 的任意 x，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限存在且极限为 A，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\lim_{x\to-\infty}f(x)=A)$$

注 1 给定的一个数列 $\{a_n\}$ 可以看做定义在自然数集 $\mathbf{N}$ 上的函数 $f(n)$，因此数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 就是函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbf{N}}}f(x)$，从而数列极限与函数极限都具有下面的性质.

5. 极限的性质

(1) 唯一性. 若极限存在，则极限唯一.

(2) 有界性. 若极限存在，则函数有界(所谓有界，对函数来说是指局部有界，即在自变量变化过程中的某邻域或某无穷区间内函数有界).

(3) 归并性.

① 数列收敛于 A 的充分必要条件为其任一子列收敛于 A.

② 函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 的极限为 A 的充分必要条件是：对任意数列 x_n，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ (其中 $x_n\neq x_0$)(或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$)，则数列 $f(x_n)$ 收敛于 A.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$ (或 $A<0$)，则存在 x_0 的某个去心邻域，在此去心邻域内，有 $f(x)>A/2$ (或 $f(x)<A/2$). 若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$ (或 $f(x)\leqslant 0$)，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$ (或 $A\leqslant 0$).

注 2 此性质也适用于其他极限过程和 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 等(包括单侧极限，其结论只需根据极限过程改动使不等式成立的自变量范围即可).

6. 极限运算法则

设在自变量同一变化过程中 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，则：

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ (其中 $\lim g(x)\neq 0$)

(4) $\lim f(x)=0$，$g(x)$ 有界，则 $\lim f(x)g(x)=0$

(5) (复合函数) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且在 x_0 的某一去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$$

7. 极限存在的两个准则及两个重要极限

准则 I 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足：① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则 I′ 若函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在同一极限过程中满足：① $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；② $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$.

准则 II 单调有界数列必收敛.

两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

(四) 无穷小与无穷大

(1) 若$\lim f(x)=0$,则称在这极限过程中 $f(x)$为无穷小(量);若$\lim f(x)=\infty$,则称在这极限过程中 $f(x)$为无穷大(量).

(2) (无穷小与无穷大的关系)在同一极限过程中,若 $f(x)$为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大;若 $f(x)$为无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小.

(3) (无穷小与极限的关系)在某一极限过程中,$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件为 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 为同一过程中的无穷小量.

(4) (无穷小的比较)设在同一极限过程中,α,β为无穷小量:

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ $(\alpha\neq 0)$或$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$ $(\beta\neq 0)$,则称 β 为 α 的高阶的无穷小量,记为 $\beta=o(\alpha)$,或称 α 是β 的低阶无穷小量;

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,则称 β 和 α 为同阶无穷小量,特别若 $c=1$ 时,则称 β 与 α 是等价无穷小量,记为 $\beta\sim\alpha$;

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$ $(k>0)$,则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

(5) (无穷小的运算法则)在同一极限过程中,有限多个无穷小的和与积仍是无穷小,有界变量与无穷小量之积仍是无穷小.

(6) (无穷小的替换性质)设 α,β 为同一极限过程的无穷小量,且 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在$(\alpha\neq 0,\alpha'\neq 0)$,则$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$存在,且$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

(7) 常用重要等价无穷小:

当 $x\to 0$ 时

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},$$

$$(1+x)^a-1\sim ax,\quad a^x-1\sim x\ln a\quad (a>0,\ a\neq 1)$$

(五) 函数的连续性与间断点

(1) 设函数 $f(x)$在 x_0 的某邻域内有定义,函数 $f(x)$在 x_0 点连续的几个等价定义:

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$(极限值等于函数值);

② $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$(左极限=右极限=函数值);

③ 当自变量增量为 Δx,相应的函数增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$;