QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写　适合各种版本教材

（修订版）

一本全®

新课标解题方法

高中数学

主编：李永哲

一册在手◆胜券在握

必修5

延边大学出版社

QQ教辅
QQJIAOFU

根据新课标编写　适合各种版本教材

一本全®

新课标解题方法
高中数学

必修5

主　　编：李永哲
本册主编：郭泗强
编　　委：刘德广　王雪晶　张　欣　徐　嵘
徐丽瑗　李玉珍　王春花　兰俊义
赵传娟　杨秀杰　毕淑玲　曹东雪
李大勇　王梅雪　李小华　张庆亮
郭文秀

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标解题方法·高中数学(必修5)/李永哲主编.
—延吉:延边大学出版社,2009.7
ISBN 978-7-5634-2794-9

Ⅰ.新… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课-高中-解题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第124160号

新课标解题方法·高中数学(必修5)

主编:李永哲

责任编辑:秀　豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路977号　　邮编:133002

网址:http://www.ydcbs.com

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2732435　　传真:0433-2732434

发行部电话:0433-2133001　　传真:0433-2733266

印刷:大厂回族自治县兴源印刷厂

开本:880×1230　　1/32

印张:12.625　　字数:210千字

印数:1—18500

版次:2009年8月第1版

印次:2009年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5634-2794-9

定价:20.00元

前　　言

《高中数学解题方法》是按照《新课标》体系编写出的一套解题方法丛书.这套丛书重视对数学思想方法的考查,在解答过程中都蕴含着重要的数学思维方式及解题技巧,教给学生解决问题的方法和技巧.

知识是基础,思想是深化,方法是手段.提高学生对数学思想方法的认识和应用,综合提高学生的数学解题能力是本书的宗旨.

本书的作者都是具有多年教学经验的一线特、高级教师,通过对具有代表性的例题、习题,以及历年来高考中出现的经典试题进行全面细致的分析和讲解,帮助学生探索解题规律,掌握解题技巧,提高解题能力.

下面介绍本书各栏目及其特点

一、知识梳理

通过对考点的分析、解读,使学生掌握学习重点,明确学习目标,做到有的放矢,力求使学生通过学习和思考逐步提高独立解题的能力,使解题更加迅速、准确.

二、经典及拓展例题详解

通过对经典例题的分析,帮助学生理解高中数学常用的解题方法(如:换元法、参数法、分析法、数形结合法等),认识和构建数学知识间的联系;通过对经典例题的点评,帮助学生找准解数学题的关键,避免思维误区,让学生亲身体验数学解题、发展、深化的过程,并学会建立数学模型的全过程,追求用最短的时间、最有效的方法来迅速提高学生分析问题和解决问题的能力;遵循举一反三、一通百通的原则,注重解题思路、方法、技巧的培

养，更好地领悟、归纳、概括和运用所学知识，激发学生主动学习、主动探讨、主动解题，学中求乐的积极性.

三、经典及拓展题训练

习题的编选由浅入深，涵盖内容广泛，题量充足，题型新颖、灵活、开放，体现了方法与能力训练的完美结合，使学生边学边练，夯实基础，获得能力，轻松迎考.此外，书中精选了近几年各地高考真题，并对其命题思想进行了分析.

由于编者水平所限，编写过程中疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正，以期在今后的修订中进一步完善提高.

目　　录

第一章　解三角形

一、知识网络

正弦定理 → 解三角形 → 应用举例
余弦定理 → 解三角形

二、内容与课程学习目标

(1)通过对任意三角形边长和角度关系的探索,掌握正弦定理、余弦定理,并能解决一些简单的三角形度量问题.

(2)能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

一、知识梳理

(一)正弦定理

在$\triangle ABC$中,$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($R$为$\triangle ABC$外接圆半径)

由于$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$

所以$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

在利用正弦定理解三角形时,注意运用下述关系进行分析判断:$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow \sin A>\sin B$.

(二)关于三角形面积公式

1. 已知一边和边上的高:$S=\frac{1}{2}ah_a$,$S=\frac{1}{2}bh_b$,$S=\frac{1}{2}ch_c$.

2. 已知两边及其夹角：$S=\frac{1}{2}ab\sin C$，$S=\frac{1}{2}bc\sin A$，$S=\frac{1}{2}ca\sin B$.

（三）基本方法

1. 利用正弦定理可以解决以下两类有关三角形的问题.

(1)已知两角和任一边，求其他两边和一角.

(2)已知两边和其中一边的对角，求另一边对角，从而进一步求出其他的边和角.

2. 已知两边及其中一边的对角解三角形时，由于三角形的形状不能唯一确定，会出现两解、一解和无解三种情况，可以根据"三角形中大边对大角"的定理判断解的个数.

由于已知两边和其中一边的对角，不能唯一确定三角形的形状，因此解这类三角形问题将出现两解、一解、无解三种情况，已知 a，b 和角 A 时解三角形的各种情况为：

(1) A 为锐角时，情况如图 1－1－1 所示.

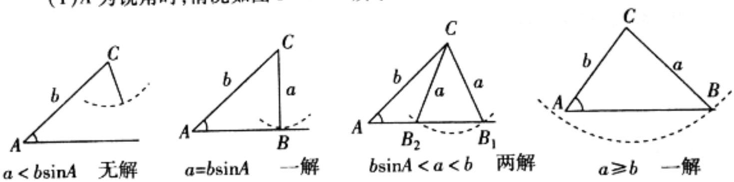

图 1－1－1

(2) A 为直角或钝角时，情况如图 1－1－2 所示.

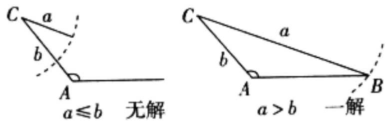

图 1－1－2

也就是说利用正弦定理解三角形，需要已知一个三角形的两个角和一条边；或者已知一个三角形的两条边和一边的对角.

①三角形有唯一解的条件：(ⅰ)已知三角形的两角和一条边；(ⅱ)已知 a，b，A，解三角形时，若 A 为钝角或直角，且 $a>b$ 时，有唯一解；若 A 为锐角，且 $a\geqslant b$ 时，有唯一解；若 A 为锐角，且 $a<b$，当 $a=b\sin A$ 时，B 为直角，有唯一解.

②三角形有两解的条件：已知 a，b，A，解三角形时，若 A 为锐角，且 $b\sin A<a<b$ 时，有两解.

③三角形无解的条件：已知 a，b，A，解三角形时，若 A 为锐角，且 $a<b\sin A$ 时无解；若 A 为钝角或直角，且 $a\leqslant b$ 时，无解.

3. 判断三角形的形状特征，必须从研究三角形的边与边的关系，角与角的关

系入手,充分利用正弦定理,由三角形的边或角的代数运算或三角运算找出边与边或角与角的关系,从而作出正确判断.

二、经典及拓展例题详解

例1 在$\triangle ABC$中,已知$AB=2$,$BC=1$,$CA=\sqrt{3}$,分别在边AB、BC、CA上,取点D、E、F,使得$\triangle DEF$为正三角形,设$\angle FEC=\alpha$,求$\triangle DEF$的最短边长.

分析

将$\triangle DEF$的边长表示为α的函数关系,然后应用求三角函数最值理论来求最小值.

解:如图1-1-3所示,$\because AB=2$,$BC=1$,$CA=\sqrt{3}$

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$,$\therefore \angle C=90°$,且$\angle A=30°$,$\angle B=60°$.

$\because \angle FEC=\alpha$ $\therefore \angle EFC=90°-\alpha$

又$\because \triangle DEF$为等边三角形,$\angle DFE=60°$

$\therefore \angle AFD=180°-60°-(90°-\alpha)=30°+\alpha$

$\angle A=30°$,$\therefore \angle ADF=180°-30°-(30°+\alpha)=120°-\alpha$.

设$CF=x$,则$AF=\sqrt{3}-x$,则由正弦定理得

$$\frac{DF}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{3}-x}{\sin(120°-\alpha)},$$

又$x=EF\sin\alpha=DF\sin\alpha$

$$\therefore \frac{DF}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{3}-DF\sin\alpha}{\sin(120°-\alpha)}.$$

化简得$DF=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sin(\alpha+\varphi)}$

$\therefore$ 当$\sin(\alpha+\varphi)=1$时,DF取得最小值$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

故最小边长为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

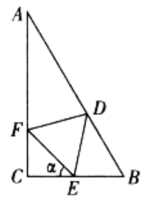

图1-1-3

点评:此题将用α表示各个线段长,在$\triangle ADF$中使用正弦定理,将边长DF用α来表示求最小值,这是求最值的常用方法.

例2 (2006·湖南)(理)如图1-1-4所示,D是直角$\triangle ABC$斜边BC上一点,$AB=AD$,记$\angle CAD=\alpha$,$\angle ABC=\beta$.

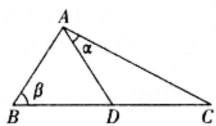

图1-1-4

(1)证明：$\sin\alpha+\cos2\beta=0$；

(2)若 $AC=\sqrt{3}DC$. 求 β 的值.

分析

(1)利用直角三角形内角关系及正弦诱导公式.

(2)在 $\triangle ADC$ 中利用正弦定理,化为含 β 的方程求解.

解:(1)如图 1-1-5 所示,因为 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\angle BAD=\frac{\pi}{2}-(\pi-2\beta)=2\beta-\frac{\pi}{2}$.

所以 $\sin\alpha=\sin(2\beta-\frac{\pi}{2})=-\cos2\beta$.

即 $\sin\alpha+\cos2\beta=0$.

(2)在 $\triangle ADC$ 中,由正弦定理得 $\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(\pi-\beta)}$,即 $\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}DC}{\sin\beta}$

所以 $\sin\beta=\sqrt{3}\sin\alpha$

由(1),$\sin\alpha=-\cos2\beta$,所以 $\sin\beta=-\sqrt{3}\cos2\beta=-\sqrt{3}(1-2\sin^2\beta)$.

即 $2\sqrt{3}\sin^2\beta-\sin\beta-\sqrt{3}=0$.

解得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

从而 $\beta=\frac{\pi}{3}$

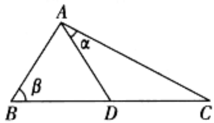

图 1-1-5

点评:使用了正弦定理及已知条件将 α 和 β 关系求出,利用(1)结果和二倍角公式化为 $\sin\beta$ 的二次方程,注意 β 是锐角.

例 3 (2006·湖北)在 $\triangle ABC$ 中,已知角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c,且满足 $\sin A=\tan B$,$a=b(1+\cos A)$.

求证:$\angle A=\angle C$.

分析

由已知及正弦定理转化为角之间的关系,由 $A+B+C=\pi$ 及诱导公式转化为 A、C 间的三角函数,再得出 $A=C$.

证明:由 $\sin A=\tan B$,得 $\sin A\cos B=\sin B$ ①

由 $a=b(1+\cos A)$ 及正弦定理得

$\sin A=\sin B(1+\cos A)$ ②

①-②得,$\sin A\cos B-\sin A=-\sin B\cos A$,即 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin A$,所以

$\sin C=\sin A$，又因 $0<C<\pi$，故 $C=A$ 或 $C=\pi-A$（舍去），即 $C=A$.

点评：用正弦定理将边之间的关系转化为角之间的关系，再利用三角函数的变换是常用方法，本题得出 $\sin C=\sin A$ 后，也可由正弦定理得出 $a=c$，从而 $A=C$.

例 4 （2007·南京）在 $\triangle ABC$ 中，A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $a\cos C, b\cos B, c\cos A$ 成等差数列.

(1) 求 B 的值；

(2) 求 $2\sin^2 A+\cos(A-C)$ 的范围.

分析

由已知将边 a,b,c 利用正弦定理转化为角，再用三角变换知识求解.

解：(1) $\because a\cos C, b\cos B, c\cos A$ 成等差数列

$\therefore a\cos C+c\cos A=2b\cos B$.

由正弦定理得 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B\cos B$

$\therefore \sin(A+C)=2\sin B\cos B$.

又 $A+B+C=\pi$ $\therefore \sin(A+C)=\sin B$

$\therefore \sin B=2\sin B\cos B$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B>0$ $\therefore \cos B=\frac{1}{2}$ $B=\frac{\pi}{3}$

(2) $\because B=\frac{\pi}{3}$ $\therefore A+C=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore 2\sin^2 A+\cos(A-C)=1-\cos 2A+\cos(2A-\frac{2\pi}{3})$

$=1-\cos 2A-\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A-\frac{3}{2}\cos 2A$

$=1+\sqrt{3}\sin(2A-\frac{\pi}{3})$

$\because 0<A<\frac{2\pi}{3}$ $\therefore -\frac{\pi}{3}<2A-\frac{\pi}{3}<\pi$.

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2A-\frac{\pi}{3})\leqslant 1$

$\therefore 2\sin^2 A+\cos(A-C)$ 的范围是 $(-\frac{1}{2},1+\sqrt{3}]$

点评：将三角形中的边化角是解三角形问题的常用手段，在(2)中将所求化为角 A 的函数，再利用正弦函数性质求得，需注意角 A 的范围.

例 5 (2008·全国Ⅱ)(文)在$\triangle ABC$中,$\cos A=-\frac{5}{13}$,$\cos B=\frac{3}{5}$.

(1)求$\sin C$的值;(2)设$BC=5$,求$\triangle ABC$的面积.

解:(1)由$\cos A=-\frac{5}{13}$得$\sin A=\frac{12}{13}$

由$\cos B=\frac{3}{5}$得$\sin B=\frac{4}{5}$.

所以$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{16}{65}$.

(2)由正弦定理得$AC=\frac{BC\times\sin B}{\sin A}=\frac{5\times\frac{4}{5}}{\frac{12}{13}}=\frac{13}{3}$.

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}\times BC\times AC\times\sin C=\frac{1}{2}\times5\times\frac{13}{3}\times\frac{16}{65}=\frac{8}{3}$.

点评:本题考查了同角三角函数间关系、诱导公式、两角和正弦公式及正弦定理和三角形面积公式.

例 6 在$\triangle ABC$中,$c=2\sqrt{2}$,$a>b$,$C=\frac{\pi}{4}$,$\tan A\tan B=6$,试求a、b及三角形的面积.

分析

由$C=\frac{\pi}{4}$及$\tan A\tan B=6$可求出三角形的两个角A、B,再由正弦定理及$c=2\sqrt{2}$可求出另两边及面积.

解:$\because\tan A+\tan B=\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)=-\tan C(1-6)=5$

又$a>b$且$\tan A\tan B=6$ $\therefore\tan A=3$,$\tan B=2$.

$\therefore\cos A=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2A}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$ $\therefore\sin A=\tan A\cos A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 同样得$\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

由正弦定理得$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$,$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$三角形面积为$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{10}}{5}\times\frac{8\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

点评:运用两角和正切公式得$\tan A+\tan B$,进而获得$\tan A$和$\tan B$.

例 7 根据条件,确定$\triangle ABC$的形状.

$a\cos B + b\cos C + c\cos A = b\cos A + c\cos B + a\cos C.$

分析

利用正弦定理,化边为角,再用两角和差公式等变型.

解:由正弦定理及已知得 $\sin A\cos B + \sin B\cos C + \sin C\cos A = \sin B\cos A + \sin C\cos B + \sin A\cos C.$

$(\sin A\cos B - \sin B\cos A) + (\sin B\cos C - \sin C\cos B) + (\sin C\cos A - \sin A\cos C) = 0$

即 $\sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A) = 0$

前两项化积得 $2\sin\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-2B+C}{2} - 2\sin\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 0.$

即 $\sin\frac{A-C}{2}(\cos\frac{A-2B+C}{2} - \cos\frac{A-C}{2}) = 0$

$\therefore \sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C-B}{2} = 0.$

又 A、B、$C \in (0, \pi)$

$\therefore A = B$ 或 $B = C$ 或 $C = A.$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

点评:本题也可用余弦定理将角化为边,然后分解因式.

例 8 在$\triangle ABC$中,三个内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c 且$\angle A = 80°$,$a^2 = b(b+c)$,求$\angle C$的度数.

分析

题设条件中有角和边的等式,目标为$\angle C$,可考虑把已知化为角.

解:由正弦定理和已知 $a^2 = b(b+c)$ 得

$\sin^2 A = \sin B(\sin B + \sin C)$

$\therefore \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B\sin C.$

而 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B).$

又 $\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C \neq 0$ $\quad\therefore \sin(A-B) = \sin B$

$\because a^2 - b^2 = bc > 0 \quad \therefore a > b \quad \therefore A > B$

又 $0° < A - B < 80°, 0° < B < 80°$

$\therefore A - B = B, B = \frac{A}{2} = 40°$

$\therefore \angle C = 180° - 80° - 40° = 60°.$

点评:本题应用 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$. 对 $\sin(A-B) = \sin B$ 也可以得 $A-B, B \in (0°, 180°)$, $A - B = B$ 或 $A - B + B = 180°$ 舍去后者即可.

例9 在$\triangle ABC$中,如果$\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$,且$B$为锐角,试判断此三角形的形状.

分析

将对数式转化为三角形中的边角关系式,利用解三角形的知识求解.

解: $\because \lg\sin B=-\lg\sqrt{2}\quad\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

又$\because B$是锐角 $\therefore B=45°$

由$\lg a-\lg c=-\lg\sqrt{2}$,得$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,根据正弦定理,得$\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

即$2\sin(135°-C)=\sqrt{2}\sin C$,

$\therefore 2(\sin135°\cos C-\cos135°\sin C)=\sqrt{2}\sin C$

$\therefore \cos C=0, C=90°$.

从而$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

点评: 要判断三角形的形状,基本思路是寻求边与边或求出角的大小.

例10 已知在$\triangle ABC$中,$BC=a, AB=c, AC=b$,且$\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\sqrt{2}c-b}{b}$,求$A$的值.

分析

切化弦,边化角,转化为三角函数式,利用公式进行三角变换从而使问题得解.

解: 由已知及正弦定理得

$$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin C-\sin B}{\sin B}$$

$\therefore \sin A\cos B=\cos A(\sqrt{2}\sin C-\sin B)$

$\therefore \sin A\cos B+\cos A\sin B=\sqrt{2}\cos A\sin C$

$\therefore \sin(A+B)=\sqrt{2}\cos A\sin C$,

$\sin(A+B)=\sin C\neq 0\quad\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because 0°<A<180°\quad\therefore A=45°$

点评: 含三角形的边和角的等式,将边化为角或将角化为边,本题求角,故应用正弦定理将边化为角.

例11 在$\triangle ABC$中,已知$a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, B=45°$,求角$A$、$C$及边$c$.

分析

这是已知两边和其中一边的对角解三角形的问题,运用正弦定理可解,但需对解的情况加以讨论.

解:由正弦定理得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because B=45^\circ<90^\circ$ 且 $b<a$ $\therefore A$ 有两解,$A=60^\circ$ 或 120°.

(1)当 $A=60^\circ$ 时,$C=180^\circ-(A+B)=75^\circ$

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

(2)当 $A=120^\circ$ 时,$C=180^\circ-(A+B)=15^\circ$,

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

点评:已知两边及一边对的角解三角形时,首先判断是否有解,如果有解,是一解还是两解.

例 12 不解三角形,判断下列三角形解的个数.

(1)$a=5,b=4,A=120^\circ$; (2)$a=7,b=14,A=150^\circ$;

(3)$a=9,b=10,A=60^\circ$; (4)$c=50,b=72,C=135^\circ$.

分析

已知 a、b、A 解$\triangle ABC$ 时,一般考虑几何法,比较 $b\sin A$ 与 a 及 b 的大小关系.

解:(1)$\because A=120^\circ,a>b$ $\therefore \triangle ABC$ 有且仅有一解.

(2)$\because A=150^\circ,a<b$ $\therefore \triangle ABC$ 无解.

(3)$\because b\sin A=5\sqrt{3}<a<b$ $\therefore \triangle ABC$ 有两解.

(4)$\because \angle C=135^\circ,c<b$ $\therefore \triangle ABC$ 无解.

例 13 在$\triangle ABC$ 中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c.

求证:$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

分析

利用 $\sin^2A-\sin^2B=\sin(A+B)\sin(A-B)$ 及正弦定理,可解此题.

证明:由正弦定理可得

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin^2C}=\frac{\frac{1}{2}(\cos2B-\cos2A)}{\sin^2C}=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2C}$$

$$=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

点评:学过余弦定理后也比较方便.

例 14 (2008·江西)在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对应的边分别为a,b,c,$a=2\sqrt{3}$,$\tan\frac{A+B}{2}+\tan\frac{C}{2}=4$,$2\sin B\cos C=\sin A$,求$A,B$及$b,c$.

解:由$\tan\frac{A+B}{2}+\tan\frac{C}{2}=4$得$\cot\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}=4$

$$\therefore \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=4 \quad \therefore \frac{1}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=4$$

$\therefore \sin C=\frac{1}{2}$,又$C\in(0,\pi)$

$\therefore C=\frac{\pi}{6}$,或$C=\frac{5\pi}{6}$

由$2\sin B\cos C=\sin A$得$2\sin B\cos C=\sin(B+C)$

即$\sin(B-C)=0 \quad \therefore B=C$

$B=C=\frac{\pi}{6}$

$A=\pi-(B+C)=\frac{2\pi}{3}$

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$得

$$b=c=a\frac{\sin B}{\sin A}=2\sqrt{3}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$$

三、经典及拓展题训练

A 组

一、选择题

1. 在$\triangle ABC$中,$AC=\sqrt{3}$,$\angle A=45^\circ$,$\angle C=75^\circ$,则BC长为 ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

2. 在分别满足下列条件的两个三角形：①$\angle B=30°$，$a=14$，$b=7$；②$\angle B=60°$，$a=10$，$b=9$，那么下面判断正确的是 ( )

A. ①只有一解，②也只有一解 B. ①、②都有两解

C. ①有两解，②有一解 D. ①有一解，②有两解

3. (2006·长沙)已知在$\triangle ABC$中，$|AC|+|BC|=10$，$|AB|=8$，则$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$的值为 ( )

A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{10}$

4. 在$\triangle ABC$中，已知$a=5\sqrt{2}$，$c=10$，$A=30°$，则$\angle C$等于 ( )

A. $135°$ B. $60°$ C. $45°$ D. $135°$或$45°$

5. (2006·全国)用长度分别为2、3、4、5、6(单位：cm)的5根细木棒围成一个三角形(允许连接，但不允许折断)，能够得到的三角形的最大面积为 ( )

A. $8\sqrt{5}\text{cm}^2$ B. $6\sqrt{10}\text{cm}^2$ C. $3\sqrt{55}\text{cm}^2$ D. 20cm^2

6. 在$\triangle ABC$中，若$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，则$\triangle ABC$是 ( )

A. 直角三角形 B. 等边三角形 C. 钝角三角形 D. 等腰直角三角形

7. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$BC=3$，则$\triangle ABC$的周长为 ( )

A. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+3$ B. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$

C. $6\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+3$ D. $6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$

8. (2006·潍坊)在$\triangle ABC$中，如果$\ln\cos A=\ln\sin C-\ln\sin B=-\ln 2$，则$\triangle ABC$的形状是 ( )

A. 等边三角形 B. 直角三角形

C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

9. 在锐角$\triangle ABC$中，a、b、c分别是三内角A、B、C的对边，设$B=2A$，则$b:a$的取值范围是 ( )

A. $(-2,2)$ B. $(0,2)$ C. $(\sqrt{2},2)$ D. $(\sqrt{2},\sqrt{3})$

10. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$BC=3$，则$\triangle ABC$面积的最大值是 ( )

A. $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ B. $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{9}{4}$

11. 在锐角$\triangle ABC$中，若$A=2B$，则下列叙述正确的是 ( )