

山地农机通讯
增刊

倾斜动线法犁体曲面数学 解析的实践与认识

232

贵州省山地农业机械研究所

一九七七年二月



目 录

一、南方水田通用型犁体的创型实践及其曲面设计特点	(1)
二、犁体曲面的数学解析	(2)
三、通一20、通一25犁体曲面规律性的探索	(4)
四、犁体组合曲面之一——斜螺旋面的犁翼	(6)
五、从螺旋面的自锁临界状态探讨螺旋犁面的设计参数	(7)
六、通用 A 型犁体犁胸曲面之几何性质	(12)
七、犁铧曲面近似于二次锥面	(20)
八、犁铧用二次锥面逼近的另外两个方案	(23)

倾斜动线法犁体曲面数学解 析的实践与认识

犁体曲面是铧式犁设计的核心问题，犁体曲面工作性能的好坏，直接反映在农业产量、机组生产率和燃油消耗上；铧式犁的需要量又是一个庞大的数字。可见犁体曲面的研究设计具有重要的意义。

犁体曲面是以土壤为工作对象，但土壤动力学的研究工作，比起空气动力学和水力学来差得多，土壤的物理机械性质又随其组合成份和含水量而复杂多变，犁体设计牵连的因素太多（除了情况多变的土壤因素外，还有作物、耕作制度、农艺要求等方面的因素，以及配套动力、制造材料、结构等方面的因素），以致关于犁体曲面的设计理论至今尚未圆满解决。

苏联定为国家标准的水平元线法，属于经验设计的范畴。水平元线法在构成扭柱面的熟地型犁体上是较成功的经验设计；对于螺旋面用它构成就不合乎曲面的几何原理，用它设计的“半螺旋型”犁体也不甚合乎理想。

历史上许多前人试图用简单数学曲面表达犁面的事例，但实际上都没有应用于犁体曲面的设计，它往往只是接近于某种犁体的某一部分曲面，他们的工作就没有继续下去了。这样表达的曲面也没有回到实践中去验证，由于理论与实际没有很好结合，往往不能满足农业技术要求。

我们要批判地继承和发展前人对犁体曲面设计原理的研究，不要重蹈理论脱离实际的覆辙，遵循毛主席的教导，以《实践论》为指针，走我们自己的道路。

一、南方水田通用型犁体的创型实践及其曲面设计特点

我国南方水田犁是在群众性的广泛实践基础上“三结合”创型的。它综合了我国传统“窜垡型”犁与国内外“滚垡型”犁的工作原理，使土垡沿犁面的运动是“窜滚结合，以滚为主”。即是说土垡的运动不是原地滚翻，而是沿犁面窜升起一定高度并滚翻覆盖。

实践证明：按此设计意图，经过反复试验修改创型的通用型犁体曲面，在水田地区的水、旱耕作中，比苏联熟地型犁体的翻土覆盖性能好，又比美英的螺旋型犁体断条短和架空性能好。一般情况下，覆盖性能与架空性能往往发生矛盾，顾此失彼。国外引进的一些犁体在水田地区试验结果是：难于二者得兼。但我国水田通用型犁体具有能使土垡窜起的犁胸和使土垡滚翻的犁翼，从而断条、架空性能与翻土、覆盖性能四者得兼，具有良好的水、旱通用性。

这种犁面具有“凸胸扭翼”的特点，即是说其犁壁的水平截面线大部份不是直线，而是犁胸部向前凸起、犁翼部向后弯曲的曲线，所以称为“凸胸扭翼”。因而这种犁面不能

采用水平直元线法构成。

那么这种具有凸胸扭翼特点的犁面用什么方法构成呢？既然我国南方十三省（市、自治区）集中优势兵力打开灭战，经过六、七年的广泛试验，在实践中创造了这样优良的犁体，受到广大贫下中农的欢迎，现已定型生产，我们就应该将从实践中来的感性认识，提高到理性认识，再到实践中去，探求曲面的构成方法和设计原理，把数学和犁体曲面的设计、试制、试验结合起来，进一步探索在实践中形成的规律性。

在各级党组织的领导和关怀下，我们开展了跨专业和学科间的社会主义大协作，实行生产、科研和教学三结合，开门办学、开门办科研，与工农相结合，奋战在工厂、田间。通过实践与认识的几次反复，证明这种通用型犁面可用“倾斜动线法”构成，是一种“非展直纹面构成的组合曲面”。

我们课题组又设计了系列化的通用A型犁体，按照实践中产生的规律性，用数学解析法来设计，再回到实践中去验证，请工人、贫下中农共同鉴定，共同研究，改进提高，初步收到预期的效果。

二、犁体曲面的数学解析

用倾斜动线法构成的犁体曲面，可以用组合的直纹面来分片表达，但分片不宜过多，除犁铤自成一叶片外，犁壁可分为犁胸和犁翼两片，如图1所示。



图1 组合曲面

1. 犁翼 2. 犁铤 3. 犁胸

倾斜动线设计法的特点之一是：通过犁胸的元线（即母线）可以不通过犁翼，通过犁翼的元线可以不通过犁胸。所以比水平元线法较便于按犁胸、犁翼片的不同要求来分片设计，构成组合的犁体曲面。

动直线扫描成直纹面的方法是：以动直线的一端沿准线移动，同时动直线在空间的方向按一定的规律变动，其变动规律可用动直线在两个座标面上的投影角的变化来表达。

1. 水平迹线方程

水平迹线即是动直线与XOY座标面（即犁体支承水平面）的交线，它可作为准线来构成直纹面，如图2所示。

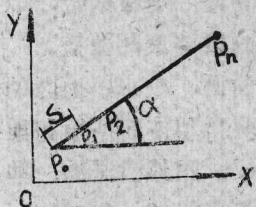


图2

点P沿水平迹线移动，从起点到终点，以间距S分为若干等分，各等分点加以编号称为“水平迹点”。

水平迹线可以为直线或曲线，但一般用直线或折线较为简单（由于犁体轮廓线所决定的工作面翼边线高于水平座标面，故折点部份不在工作面内，不致影响工作面的光滑性）。

现以直线作水平迹线为例。

设计给定：1. 水平迹线端点坐标 (x_0, y_0) 。2. 水平迹线之斜率 k （或与X轴之倾角 α ）。3. 相邻水平迹点之间距S。

以 n 为参数， n 表示水平迹点号（即元线号）。

水平迹线方程：

$$\begin{cases} x = X_0 + nS\cos\alpha, \\ y = Y_0 + nS\sin\alpha. \end{cases}$$

式中: $\alpha = \text{tg}^{-1}k$, $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

令 $S\cos\alpha = a$, $S\sin\alpha = b$, $X_0 = c$, $Y_0 = d$,

上式可化为:

$$\begin{cases} x = an + c, \\ y = bn + d, \quad (b/a = k). \end{cases}$$

2. 动直线方程

动直线一端点即为水平迹点 $P(X_n, Y_n, 0)$ 。

一般直线方程:

$$\frac{x - X_n}{\cos\alpha} = \frac{y - Y_n}{\cos\beta} = \frac{z - 0}{\cos\gamma}。$$

工程制图以用三个投影角 δ_n , λ_n , ϕ_n 表示较便, 如图 3 所示。

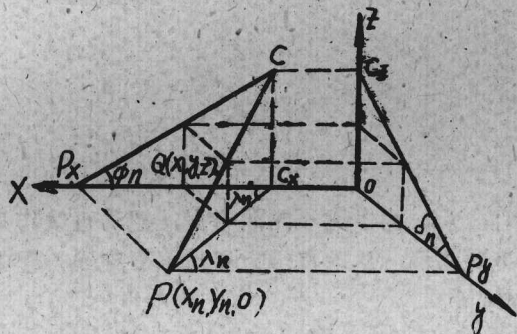


图 3 动直线之投影

在动直线 PC 上有一任意点 $Q(x, y, z)$ 按图三位置可见:

$$x < X_n, y < Y_n, z > 0。$$

$$\frac{z - 0}{y - Y_n} = -\text{tg}\delta_n,$$

$$\frac{y - Y_n}{x - X_n} = \text{tg}\lambda_n,$$

$$\frac{z - 0}{x - X_n} = -\text{tg}\phi_n。$$

可知 $\text{tg}\phi_n = \text{tg}\lambda_n \cdot \text{tg}\delta_n$ 。

从直线一般方程及投影角之关系可得:

$$\frac{y - Y_n}{x - X_n} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \text{tg}\lambda_n,$$

$$\frac{z - 0}{y - Y_n} = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} = -\text{tg}\delta_n,$$

PC 为动直线, $P(X_n, Y_n, 0)$ 为水平迹点。 C 为动直线穿过 xoz 座标面之点。 P_x , P_y 分别为 P 点在 x 轴与 y 轴上之投影, C_x , C_z 分别为 C 点在 x 轴与 z 轴上之投影。

PC 在 yoz 座标面上之投影为 $P_y C_z$, PC 在 xoy 座标面上之投影为 $P C_x$, PC 在 xoz 座标面上之投影为 $P_x C$;

$P_y C_z$ 与 y 轴之正向夹角为 $180^\circ - \delta_n$, $P C_x$ 与 x 轴之正向夹角为 $180^\circ - \lambda_n$, $P_x C$ 与 x 轴之正向夹角为 $180^\circ - \phi_n$ 。

$$\frac{z-0}{x-X_n} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\phi_n.$$

以 $\cos\alpha = \cos\beta \cdot \operatorname{ctg}\lambda_n$, $\cos\gamma = -\cos\beta \operatorname{tg}\delta_n$ 代入动直线之一般方程得:

$$\frac{x-X_n}{\operatorname{ctg}\lambda_n} = \frac{y-Y_n}{1} = -\frac{z-0}{\operatorname{tg}\delta_n}. \quad \dots\dots\dots(1)$$

随着 n 以一系列之数值代入, 则得一系列之直线, 此方程表示一直线族, 式中 X_n , Y_n , δ_n , λ_n 均为 n 之函数。

引进参数 $u = Y_n - y$, 方程 (1) 可写为以下参数方程形式:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_n - u \operatorname{ctg}\lambda_n, \\ y &= Y_n - u, \\ z &= u \operatorname{tg}\delta_n. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2)$$

又以 $\cos\alpha = -\cos\gamma \operatorname{ctg}\phi_n$, $\cos\beta = -\cos\gamma \operatorname{ctg}\delta_n$ 代入动直线方程得:

$$\frac{x-X_n}{\operatorname{ctg}\phi_n} = \frac{y-Y_n}{\operatorname{ctg}\delta_n} = -z \quad \dots\dots\dots(3)$$

引进参数 v , 令 $v = z$, 方程 (3) 可写为以下参数方程的形式:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_n - v \operatorname{ctg}\phi_n, \\ y &= Y_n - v \operatorname{ctg}\delta_n, \\ z &= v. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

3. 曲面的参数方程

点 $P(X_n, Y_n, 0)$ 是动直线与水平迹线共有之点, 为了建立曲面方程, 把动直线作为母线, 把水平迹线作为准线, 以 (x, y, z) 为流动座标, 从动直线方程与水平迹线方程中消去 $X_n, Y_n, Z_n (Z_n = 0)$, 便得所求的曲面方程。

令 $X_n = x = an + c$, $Y_n = y = bn + d$ 代入 (2) 式得:

$$\left. \begin{aligned} x &= an + c - u \operatorname{ctg}\lambda_n, \\ y &= bn + d - u, \\ z &= u \operatorname{tg}\delta_n. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

式中: $\delta_n = \delta(n)$, $\lambda_n = \lambda(n)$ 。

(5) 式表示以 u, n 为参数的曲面方程。

如以 $X_n = x = an + c$, $Y_n = y = bn + d$ 代入 (4) 式得:

$$\left. \begin{aligned} x &= an + c - v \operatorname{ctg}\phi_n, \\ y &= bn + d - v \operatorname{ctg}\delta_n, \\ z &= v. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

式中: $\phi_n = \phi(n)$, $\delta_n = \delta(n)$ 。

(6) 式表示以 v, n 为参数的曲面方程。

三、通—20、通—25 犁体曲面规律性的探索

南方水田通用型犁的两种犁体, 耕宽分别为 20 和 25 厘米, 用倾斜动线扫描修整后, 犁翼曲面表现了粗略的规律性。这是实践中产生的客观规律, 并非我们头脑中固有的东西。

当我们提升到理性认识后，找到了进一步改进提高的途径。

这两种犁体的水平迹线都有与X坐标轴平行的一段，沿着此段水平迹线移动并同时在空间转动的元线所扫描出的曲面究竟属于什么类型的几何曲面？这是需要我们从本质上去认识的问题。

动直线PC与X轴之正向夹角为 α ，因水平迹线与X轴平行，故PC与水平迹线之夹角亦为 α 。

从图4可见：

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{PA}, \quad \cos\delta = \frac{AB}{AC}, \quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{AB}{PA},$$

$$\therefore \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\lambda / \cos\delta.$$

通—20的 $n=7\sim 12$ 这一片曲面，为犁翼片曲面，水平迹点沿水平迹线移动每一个元线号之间距为20毫米，即 $X_{n+1} - X_n = 20$ 毫米；动直线在YOZ座标面上之投影与X轴之夹角为 δ_n 。

经过我们将通—20和通—25的设计参数进行计算结果发现^[1]：

(1)通—20的 δ_n 增量与 X_n 的增量接近于正比，即是说当水平迹点以等间距20毫米沿迹线移动时， δ_n 角近似于以等角差 7.1° 转动(7.1° 为其平均值，实际情况稍有波动)。

(2)动直线与水平迹线的夹角 α 基本保持不变，其平均值为 $106^\circ 15'$ 。

(3)通—25的 $n=4\sim 10$ 段曲面(相当于犁胸和犁翼之大部分) δ_n 的增量与 X_n 的增量成正比，即是说当水平迹点以等间距30毫米沿迹线移动时， δ_n 角以等角差 8.4° 转动。

(4)动直线与水平迹线的夹角基本保持不变，其平均值为 $106^\circ 46'$ 。

特别引起我们注意的是：a,两种用“泥塑犁模法”分别设计的犁体^[2]计算结果：此片曲面形成母线与水平迹线交角的平均数只有半度之差。

b,通—20的 $n=7\sim 11$ 段，各母线与水平迹线的交角与其平均值只有几分之差。

c,通—25的 $n=4\sim 9$ 段， δ_n 与 X_n 的增量成正比。

对照螺旋面的几何条件：

螺旋面的母线与螺旋的“轴”相交，并保持一定角，当交点P移动时，母线绕轴旋转，其转动角和P点移动的距离成正比(正螺旋面可视为螺旋面的一种，而由垂直于旋转轴的直线段旋转而成)。

可见此两种犁体的组合曲面均有这样一片很近似于斜螺旋面的曲面。如果按照斜螺旋面的规律进一步调整其参数，有可能简化设计并有利于从“作为上堡约束面的犁面”的几何特性进行力学分析。

考察螺距与耕宽的关系：

$$\text{通—20 之平均螺距 } t_{20} = \frac{360}{7.1} \times 20 = 1014 \text{ 毫米,}$$

通—25之平均螺距 $t_{25} = \frac{360}{8.4} \times 30 = 1286.9$ 毫米。

设四分之一螺距与单铧幅宽之比为 K_r , $K_r = \frac{t}{4B}$ 。

通—20: $K_r = 1.26 \approx 1.3$, 通—25: $K_r = 1.29 \approx 1.3$ 。

一般国外螺旋犁面的设计是整个犁壁采用正螺旋面, 其经验数据为 $K_r = 2 \sim 2.5$ 。

我国南方水田犁的设计是独特的: 第一、斜螺面只作为犁体组合曲面的一部份 (通—20是犁翼部份, 通—25是犁胸和犁翼的大部份) 而非全部。第二、我们采用的不是正螺面, $\alpha \approx 107^\circ$ 。第三、四分之一螺距与铧宽之比较小, $K_r \approx 1.3$ 。即螺距为铧宽的5.2倍。第四、螺旋“轴”即水平迹线与X轴平行, 二者距离略等于铧宽, 通—20为20.7厘米, 通—25为25.5厘米。

四、犁体组合曲面之一——斜螺旋面的犁翼

南方水田通用型犁面的犁翼曲面表现了上述规律性, 将它用函数关系表达, 再代入一般直线方程, 就得到了斜螺面。

平行于X轴的水平迹线:

$$\begin{cases} y = d, \\ x = an + c. \end{cases}$$

式中: $a = s$ (水平迹点间距为s)。

动直线的转动与水平迹点的移动成正比, 即在YOZ座标面上的投影角 δ_n 与参数 n 为线性关系,

$$\therefore \delta_n = \delta_i + D(n - i).$$

动直线与水平迹线的夹角 $\pi - \alpha$ 为常数。

$$\text{令 } \text{ctg}(\pi - \alpha) = k.$$

在第三节已推得:

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = \text{tg} \lambda / \cos \delta.$$

以 $\text{ctg} \lambda_n = k / \cos \delta_n$ 代入动直线方程:

$$\frac{x - X_n}{\text{ctg} \lambda_n} = \frac{y - Y_n}{1} = -\frac{z}{\text{tg} \delta_n},$$

$$\text{得: } \frac{X_n - x}{k} = \frac{Y_n - y}{\cos \delta_n} = \frac{z}{\sin \delta_n}.$$

引入参数 ω , 令 $\omega = z / \sin \delta_n$, 表示动直线上任意一点与水平迹点在YOZ面上之投影距离。

$$\text{又以 } \begin{cases} X_n = an + c, \\ Y_n = d \end{cases} \text{ 代入,}$$

则得到:

$$\left. \begin{aligned} x &= -k\omega + an + c, \\ y &= -\omega \cos \delta_n + d, \\ z &= \omega \sin \delta_n. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

此式表示一般螺旋面, 当 $\alpha=90^\circ$, $k=\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=0$, 表示正螺旋面。

为了验证用斜螺面代替原犁翼曲面的性能, 我们进行了试制、试验, 与工人、贫下中农一起用实践来检验过上述理论, 在进行设计、试制之前, 我们还进行了一系列的绘图、分析和计算工作。

a) 用样板曲线与原犁面的样板作了对照, 详见^[3]。

b) 用三族截面曲线即性能参数曲线——翻土曲线、碎土曲线和等高曲线进行对比和经验分析, 详见^[3]。

c) 对比了“土粒运动参考曲线”(用斜螺面、原曲面及介于二者之间的“变形斜螺面”三种曲面来计算)。

d) 验算了斜螺面犁翼与原犁胸曲面交界处的光滑性, 详见^[4]。

验证结论: 通过作图、分析计算和试制、试验证明: 用斜螺面代替原曲面是可行的。

a)、b)和c)几族曲线均与原曲面近似, 并有改善趋势, 试验也证实了预期效果。光滑性也符合要求。理论与实践均可证实斜螺面具有良好的翻土、覆盖性能。

良好的犁翼曲面可采用斜螺面来设计——这个发现在犁体曲面的设计方法上不仅简单明瞭、方便计算及作图, 而且证实了“凸胸扭翼”的特点, 为南方水田通用犁的设计思想——“窄滚结合, 以滚为主”找到了依据, 为我们从“犁面的几何、力学性质上探求设计的规律性”提供了基础。

五、从螺旋面的自锁临界状态探讨螺旋犁面的设计参数

为了分析国内外螺旋犁面的主要设计参数——螺距等选用的“经验数据”, 探讨其理论依据, 本文从螺旋面的自锁临界状态进行分析。着重总结我国创型的南方水田通用犁犁体的实践经验, 通过数理解析说明斜螺面的优越性, 并提供设计参考。

人所共知, 当向土壤中旋转一螺旋钻头, 它即沿轴线方向前进, 反之, 沿地面按螺旋轴的方向推动一螺旋面, 则土粒将围绕轴线旋转而沿螺旋面运动。但如螺距过短将产生“自锁现象”, 即由驱动力所产生的有用切线分力不足以克服其同时产生的摩擦阻力, 不论驱动力如何大, 切线分力均为摩擦阻力所平衡。这种现象称为自锁状态。

螺旋犁面的设计属于传动螺旋, 必然应避免发生自锁现象。从而对螺距的选用给定了下限。

1. 螺旋面方程

$$\begin{cases} x' = -k\omega + an + c, \\ y' = -\omega \cos \delta_n + d, \\ z' = \omega \sin \delta_n. \end{cases}$$

移轴, 令 $x=x'-c$, $y=y'-d$, $z=z'$ 。并以: $K=\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$ 及 $an=\frac{t\delta_n}{2\pi}$

$=E\delta_n$ (式中: t 为螺距, 其它代号意义同前, 令 $E=\frac{t}{2\pi}$)代入简化得:

$$\left. \begin{aligned} x &= \omega \operatorname{ctg} \alpha + E \delta_n, \\ y &= -\omega \cos \delta_n, \\ z &= \omega \sin \delta_n. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式中: ω, δ_n 为参数, ω 表示动直线上任一点与水平迹点之距离, 在 YOZ 座标面上之投影。 δ_n 为动直线在 YOZ 座标面上之投影与 y 轴之负向夹角, δ_n 又是 n (动线编号) 的线性函数。 α 为母线与螺旋轴线 (平行于 X 轴) 的正向夹角, α 之范围为 $90^\circ \sim 120^\circ$ 。

(8) 式中的 ω 值若以常数 γ 代入, 即令 $\omega = \gamma$, 则得到一条螺旋线。

2. 斜螺旋面与正螺旋面摩擦阻力的比较

以下分析中, 作用力 P 仅取作用于螺面上任意点之轴向力 (即平行于 X 轴之力), 这即是简化为在耕作层土壤中沿螺旋轴向推动一螺旋面的近似受力状态。

螺旋面法线之方向余弦为: $[\omega/R, -\frac{1}{R}(E \sin \delta_n - \omega \operatorname{ctg} \alpha \cos \delta_n), -\frac{1}{R}(E \cos \delta_n + \omega \operatorname{ctg} \alpha \sin \delta_n)]$ 。

式中: $R = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\sin \alpha}\right)^2 + E^2}$ 。

在螺旋面上任意点 ($\omega = \gamma, \delta_n = \delta_n$) 的正压力为:

$$P_n = P \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha}\right)^2 + E^2}}。$$

类摩擦阻力为: $P_F = P_n \cdot f = P \frac{\gamma f}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha}\right)^2 + E^2}}。$

式中 f 为土壤与犁面之类摩擦系数。

推论:

90° 为正螺面: $P_F = \frac{P \gamma f}{\sqrt{\gamma^2 + E^2}}。$

$\alpha \neq 90^\circ$ 为斜螺面: $P_F = \frac{P \gamma f}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha}\right)^2 + E^2}}。$

可见斜螺面之类摩擦阻力比正螺面的小。

3. 土粒沿斜螺面之最易滑动方向——在轴向力 P 之作用下

此即 P 力在着力点切平面上的投影的方向。

从几何学可知, 包含“斜螺面法线和 P 力的平面”与“切平面”的交线, 就是最易滑动方向 (证明见附录一)。

最易滑动方向矢量 $\vec{K}$ 的方向数为:

$[(\omega^2 \cos^2 \alpha + E^2 \sin^2 \alpha), -(\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha), \omega E \sin^2 \alpha]$ 。

令螺旋线切矢用 $\vec{\tau}$ 表示, 求最易滑动方向与螺线切线间之夹角:

$$\cos(\vec{K}, \vec{\tau}) = E \sqrt{\frac{\omega^2 + E^2 \sin^2 \alpha}{(\omega^2 + E^2 \sin^2 \alpha) E^2 + \omega^4 \cos^2 \alpha}}。$$

推论：当 α 愈趋近于直角时，则最易滑动方向愈趋近于螺旋线之切线。当 $\alpha=90^\circ$ 为正螺面， $\cos(\vec{K}, \vec{r})=1$ 。说明正螺面之最易滑动方向就是螺旋线切线方向。

又令母线方向单位矢为 $\vec{r}$ ，求最易滑动方向与母线之夹角。

$$\vec{r}=(\cos\alpha\vec{i}-\sin\alpha\vec{j}),$$

$$\text{则}\cos(\vec{K}, \vec{r})=\sqrt{\frac{\omega^2+E^2\sin^2\alpha}{\omega^2+E^2\lg^2\alpha}} \quad (\text{详见附录一})。$$

推论： α 愈趋近于直角则最易滑动方向与母线之夹角愈趋近于直角，当 $\alpha=90^\circ$ 时，为正螺面，最易滑动方向与母线垂直。

α 值之选用须适当，因它与土粒沿犁面运动的轨迹有关， α 偏离直角过多时，土粒将从翼边下滑落于犁沟之中，不能“啗滚结合”。我国南方水田通用型犁之 α 采用 107° 可供参考。

4. 轴向力 P 沿最易滑动方向之切向分力

轴向力单位矢： $\vec{P}=1\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$ ， $\vec{P}$ 与最易滑动方向单位矢 $\vec{K}$ 之夹角为：

$$\cos(\vec{P}, \vec{K})=\frac{\sqrt{\omega^2\cos^2\alpha+E^2\sin^2\alpha}}{\sqrt{\omega^2+E^2\sin^2\alpha}}$$

轴向力 P 作用点为 $(\omega=\gamma, \delta_n=\delta_n)$ ， P 在过此点的切面（螺面的）之投影，就是在最易滑动方向的切线分力 P_t 。

$$P_t=P\cos(\vec{P}, \vec{K})=P\sqrt{\frac{\gamma^2\cos^2\alpha+E^2\sin^2\alpha}{\gamma^2+E^2\sin^2\alpha}}=P\sqrt{\frac{\gamma^2\text{ctg}^2\alpha+E^2}{\gamma^2\text{csc}^2\alpha+E^2}}。$$

推论：对于一般螺旋犁面之参数来说， α 之值最大不超过 120° ，即 $90^\circ\leq\alpha\leq120^\circ$ 。

$$\text{当}\alpha=120^\circ\text{时}, P_t/P=\sqrt{\frac{\gamma^2+3E^2}{4\gamma^2+3E^2}}。$$

$$\text{当}\alpha=90^\circ\text{时}, P_t/P=\sqrt{\frac{E^2}{\gamma^2+E^2}}。$$

$$\text{而}\frac{\gamma^2+3E^2}{4\gamma^2+3E^2}\bigg/\frac{E^2}{\gamma^2+E^2}=\frac{4E^2\gamma^2+3E^4+\gamma^2}{4E^2\gamma^2+3E^4}>1, \text{可见正螺面的 } P_t/P \text{ 比斜螺面的}$$

小。

又 $E=\frac{t}{2\pi}$ ，故正螺面之切向分力为：

$$P_t=P\frac{t}{\sqrt{(2\pi\gamma)^2+t^2}}=P\sin\theta,$$

θ 为展开螺旋线之升角。

$$\text{又}P_t/P=\cos(\vec{P}, \vec{K}), \therefore \cos(\vec{P}, \vec{K})=\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)。$$

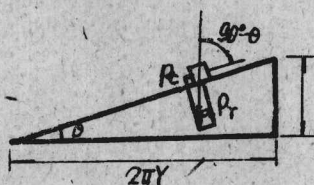


图5. 正螺面 P_t 与 P 之夹角用展开圆柱螺旋线表示

5. 自锁临界螺距

自锁临界状态指：切向分力=摩擦阻力。

斜螺面在最易滑动方向之自锁临界条件为:

$$P \cos(\vec{P}, \vec{K}) = P_n f.$$

$$\therefore f P_n = f \frac{P \gamma}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha}\right)^2 + E^2}} \text{ 及 } \sqrt{\frac{\gamma^2 \cos^2 \alpha + E^2 \sin^2 \alpha}{\gamma^2 + E^2 \sin^2 \alpha}} = \cos(\vec{P}, \vec{K}),$$

$$\therefore \gamma^2 \cos^2 \alpha + E^2 \sin^2 \alpha = f^2 \gamma^2 \sin^2 \alpha.$$

以螺距 $t = 2\pi E$ 代入, 从而求得自锁临界螺距

$$t_c = 2\pi \gamma \sqrt{f^2 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \quad \dots\dots\dots (9)$$

推论: 当 $\alpha = 90^\circ$ 为正螺面 $t_c = 2\pi \gamma f$.

当 $\alpha \neq 90^\circ$ 为斜螺面 $t_c < 2\pi \gamma f$.

说明斜螺面之自锁临界螺距较短 (犁体斜螺面 α 之值一般不超过 120°)。

6. 国内外螺旋面犁壁设计参数之比较及验算

前已述及 (见第四节) 我国南方水旱通用型犁体的设计是独特的——区别于国外螺旋犁体用正螺旋面构成整个的犁壁曲面。

水旱通用型犁壁的翼部采用斜螺旋面。其设计参数为:

1. 螺旋轴线与 X 轴平行, 二者距离略等于单铧幅宽。
2. α 角 (母线与轴线之正向夹角) 为 107° 。
3. 螺距为单铧幅宽之 5.2 倍。

国外正螺旋面犁体的螺距约等于单铧幅宽之 8 至 10 倍^[5]。

以上实践经验数据可验算及分析如后。

自锁临界螺距:

$$\text{斜螺面 } t_c = 2\pi \gamma \sqrt{f^2 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

$$\text{正螺面 } t_c = 2\pi \gamma f.$$

设: γ 之最大值为土堡矩形断面之对角线。

A 为耕深, B 为单铧幅宽。

当 $B/A = 1.4 \sim 1.1$ 时, 则 $\gamma = 1.23B \sim 1.35B$ 。

设: $t/t_c = \psi_1$, t 为设计之螺距, t_c 为自锁临界螺距, ψ_1 为比例系数。

斜螺面:

$$\text{当 } B/A = 1.4 \text{ 时, } t = \psi_1 t_c = 7.7B\psi_1 \sqrt{f^2 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

$$\text{当 } B/A = 1.1 \text{ 时, } t = \psi_1 t_c = 8.5B\psi_1 \sqrt{f^2 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

正螺面:

$$\text{当 } B/A = 1.4 \text{ 时, } t = \psi_1 t_c = 7.7\psi_1 fB.$$

$$\text{当 } B/A = 1.1 \text{ 时, } t = \psi_1 t_c = 8.5\psi_1 fB.$$

设计者可以按土壤情况及农业技术要求来选定 ψ_1 值, 一般应稍大或接近于 1, 但不能小于 1。

$$\text{由于: } f \leq \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \left(\frac{t}{2\pi \gamma \psi_1 B}\right)^2}.$$

当 $\psi_1 = 1$ 时，即 $t = t_c$ ，可验算 f 之适应范围。

设计参数	我国斜螺面	国外正螺面	
α	107°	90°	90°
令 t_c/B 为	5.2	8	10
当 B/A 为1.4	$f \leq 0.8$	$f \leq 1$	$f \leq 1.3$
当 B/A 为1.1	$f \leq 0.7$	$f \leq 0.9$	$f \leq 1.2$

国外（正）螺旋面犁主要用于开荒，需要适应于摩擦系数（及粘附力）较大的土壤，故其设计螺距与铧宽比值较大。这种犁体用于耕水田不符合农业技术要求。它虽具有较强的翻土、复盖性能，但断条、碎土性能不好，翻转的土堡形成一条长垄，不能使堡片互相架空，不能满足透风晒堡的农业技术要求。

我国水田通用型犁体主要用于水田地区的水旱耕作，其犁壁胸部不是螺旋面，仅犁壁翼部采用斜螺旋面。在保证翻堡、复盖性能的同时，为了兼顾断条、架空的农业技术要求，故设计螺距与铧宽之比不易过大。

螺旋轴的设计是与X轴平行的，当犁体沿X的方向前进时，土壤之相对运动即是X轴的方向。由于犁胸曲面设计具有使土堡沿犁面“牵升”的作用，并将土壤导向犁翼，土堡在受翼部沿X轴向力推挤的同时，还有犁胸部“牵升”土粒间的切向力传递，故可减轻产生自锁现象。

上述切向力及土壤与犁壁间的粘附力在推导斜螺面自锁临界螺距时未能包括，此二者之作用是一正一负，又犁翼部重力的法向分力不大，也可忽略。总之本节推导之临界自锁螺距公式用于犁翼计算时偏于传动螺旋之安全侧。故设计者如已采用土壤适应范围之最大 f 值来计算 t_c ，则 ψ_1 可以接近于1，而不必比1偏大过多，即是说设计螺距可以在稍大并接近于 t_c 之间来选用，以求得全面兼顾农业技术要求。设计值当否，须通过多种条件下的试验加以验证。

由试验可看出，犁耕中土壤成堡时（尤以旱耕板田最明显），自锁现象一般不会发生。由于土壤凝聚性较大时土粒间传递的切向力一般足以消除粘附力及摩擦阻力。而当水耕中发生“拖堆拥土”情况时，犁壁推挤着拥起的泥土，这时沿螺旋轴向推进的螺旋面是否发生自锁现象（与螺距的设计有关）就易观察了。至于“拖堆拥土”的问题还更多的与犁胸曲面的设计和土壤与犁壁间之粘附性质有关。不在本节论述之列。

小 结

1. 本节在总结我国水田通用型犁体实践经验的基础上，从传动螺旋面自锁临界状态分析其设计参数，推导了自锁临界螺距与土壤类摩擦系数的函数关系式。

2. 通过验算表明：我国斜螺面犁翼及国外正螺旋面所采用的经验数据与上述理论基本相符。

3. 螺旋面沿轴向推挤土壤时，斜螺面上产生的类摩擦阻力较正螺面的小，斜螺面的自锁临界螺距较正螺面的短（当 γ 、 f 数值相等时），说明我国南方水田通用型犁体采用斜螺面犁翼的设计具有一定的优越性。

六、通用 A 型犁体犁胸曲面之几何性质

在继承和发展前人理论研究与总结我国水田通用型犁实践经验的基础上, 我们又对通用 A 型犁体的犁胸曲面进一步用二次曲面逼近原设计之直纹面, 结果证明它近似于单叶双曲面。

通用型犁胸部分为以下直纹面:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_n - V \operatorname{ctg} \varphi_n \\ y &= Y_n - V \operatorname{ctg} \delta_n \\ z &= V \end{aligned} \right\} 1 \leq n \leq 6$$

其中: $X_n = 1.64B$, $Y_n = 1.52B - 0.08Bn$, B 为单铧幅宽 (通—20A, $B=200$; 通—25A, $B=250$)。

φ_n 及 δ_n 由以下数据给出:

n	1	2	3	4	5	6
φ_n	20.5°	29.5°	38.5°	47.5°	56.5°	65.5°
δ_n	13.0°	17.3°	32.1°	27.4°	33.7°	42.0°

要求: 1. 以二次直纹面逼近犁胸求其表达式。

2. 求 $\operatorname{ctg} \varphi_n = f_1(n)$, $\operatorname{ctg} \delta_n = f_2(\varphi_n)$ 的近似解析公式 (精度要求: 相对偏差在 1.8% 以内)。

(1) 包含两条直母线的二次直纹面族

$n=6$ 和 $n=1$ 的两条直母线是犁胸与犁翼; 犁胸与犁铧的分界线, 其方程式为:

$$\frac{x-X_6}{-K} = \frac{y-Y_6}{-\cos \delta_6} = \frac{z}{\sin \delta_6} \quad \dots\dots\dots (A)$$

$$\frac{x-X_1}{\operatorname{ctg} \varphi_1} = \frac{y-Y_1}{\operatorname{ctg} \delta_1} = \frac{-z}{1} \quad \dots\dots\dots (B)$$

$$\text{即: } \left. \begin{aligned} x-X_6+Kz\csc\delta_6 &= 0 \\ (x-X_6)\cos\delta_6-K(y-Y_6) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A')$$

$$\left. \begin{aligned} x-X_1+z\operatorname{ctg}\varphi_1 &= 0 \\ (x-X_1)\operatorname{ctg}\delta_1-(y-Y_1)\operatorname{ctg}\varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B')$$

用某个二次曲面族包含此二直线:

$$[(x-X_6)+Kz\csc\delta_6][(x-X_1)\operatorname{ctg}\delta_1-(y-Y_1)\operatorname{ctg}\varphi_1]+\lambda[(x-X_6)\cdot\cos\delta_6-K(y-Y_6)][(x-X_1)+z\operatorname{ctg}\varphi_1]=0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

式中 λ 为任意常数, 令 λ 值变化, 可得一族二次直纹面。若再以原曲面上取一个条件 (例如, 取曲面或铧刃线上之一点, 或犁胸犁翼交界线上一个光滑条件) 决定 λ 之值, 则此曲面即可决定。

从 (10) 式得:

$$\begin{aligned} &(\operatorname{ctg} \delta_1 + \lambda \cos \delta_6)(x-X_6)(x-X_1) + [-K \operatorname{ctg} \varphi_1(\lambda + \csc \delta_6)]yz + K \csc \delta_6 \operatorname{ctg} \delta_1 \cdot \\ &(x-X_1)z + \lambda \operatorname{ctg} \varphi_1 \cos \delta_6 \cdot (x-X_6)z + (-\operatorname{ctg} \varphi_1) \cdot (x-X_6)y + (-\lambda K)(x-X_1)y + K(\lambda Y_6 \end{aligned}$$

$$+Y_1 \csc \delta_6) \operatorname{ctg} \varphi_1 z + Y_1 \operatorname{ctg} \varphi_1 \cdot (x - X_6) + \lambda K Y_6 \cdot (x - X_1) = 0 \quad \dots\dots\dots (10A)$$

用 $a, b, c_1, c_2, d_1, d_2, e, f_1, f_2$ 顺次代表上式各项系数得:

$$a(x - X_6)(x - X_1) + byz + [c_1(x - X_1) + c_2(x - X_6)]z + [d_1(x - X_6) + d_2(x - X_1)]y + ez + [f_1(x - X_6) + f_2(x - X_1)] = 0 \quad \dots\dots\dots (10B)$$

(2) 水平迹线

以 $z=0$ 之平面与曲面相截即得水平迹线。

设 $\lambda = \text{常数}$, 则 (10A) 式即为一个二次曲面。

以 $z=0$ 代入 (10B) 得二次曲线:

$$a(x - X_6)(x - X_1) + d_1(x - X_6)y + d_2(x - X_1)y + f_1(x - X_6) + f_2(x - X_1) = 0$$

当 $X_n = \text{常数}$ 时, $X_6 = X_1 = X_n$ 。

上列水平迹线分解为二直线:

$$x - X_n = 0; \quad a(x - X_n) + (d_1 + d_2)y + (f_1 + f_2) = 0$$

通用 A 型犁体曲面的设计属于此种, 在 xy 坐标面上之水平迹线的参数方程为:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= 1.64B \\ Y_n &= 1.52B - 0.08Bn \end{aligned} \right\} \quad B \text{ 为单铧幅宽}$$

把它代入 (10B) 得:

$$a(x - 1.64B)^2 - byz + (c_1 + c_2)(x - 1.64B)z + (d_1 + d_2) \cdot (x - 1.64B)y + ez + (f_1 + f_2)(x - 1.64B) = 0$$

可见此二次曲面显然包含原设计之水平迹线在内。

$$\left. \begin{aligned} x - 1.64B &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(3) 给定水平迹线求 φ_n, δ_n 与 n 之函数关系

$$\left. \begin{aligned} x &= X_n - V \operatorname{ctg} \varphi_n \\ y &= Y_n - V \operatorname{ctg} \delta_n \\ z &= V \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq n \leq 6$$

$$\text{及 } X_n = 1.64B, \quad Y_n = 1.52B - 0.08Bn$$

代入 (10) 并整理得:

$$V^2[(K \csc \delta_6 - \operatorname{ctg} \varphi_n)(\operatorname{ctg} \delta_n \operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \delta_1 \operatorname{ctg} \varphi_n) + \lambda(K \operatorname{ctg} \delta_n - \operatorname{ctg} \varphi_n \cdot \cos \delta_6)(\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_n)] + 0.08BV[(K \csc \delta_6 - \operatorname{ctg} \varphi_n)(n-1) \operatorname{ctg} \varphi_1 - \lambda K \cdot (6-n)(\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_n)] = 0 \quad \dots\dots\dots (10D)$$

对于所有 n, V 此式均成立, 故其充要条件为:

$$(K \csc \delta_6 - \operatorname{ctg} \varphi_n)(n-1) \operatorname{ctg} \varphi_1 - \lambda K(6-n)(\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_n) = 0$$

$$\text{及 } (K \csc \delta_6 - \operatorname{ctg} \varphi_n)(\operatorname{ctg} \delta_n \operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \delta_1 \operatorname{ctg} \varphi_n) + \lambda(K \operatorname{ctg} \delta_n - \operatorname{ctg} \varphi_n \cdot \cos \delta_6)(\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_n) = 0$$

$$\therefore \operatorname{ctg} \varphi_n = K \frac{(n-1) \csc \delta_6 - \lambda(6-n)}{(n-1) - \lambda K(6-n) \operatorname{ctg} \varphi_1} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\operatorname{ctg} \delta_n = \frac{\operatorname{ctg} \varphi_6 \operatorname{ctg} \delta_1 + \lambda \cos \delta_6 \operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_n (\operatorname{ctg} \delta_1 + \lambda \cos \delta_6)}{\operatorname{ctg} \varphi_6 \operatorname{ctg} \varphi_1 + \lambda K \operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_n (\operatorname{ctg} \varphi_1 + \lambda K)} \operatorname{ctg} \varphi_n \dots \dots (12)$$

由(11)、(12)式可见与B(单铎幅宽)无关。

(4) 曲面逼近的结果

经过用选点法作了曲面逼近的大量计算,最后选取了 $\lambda = -3.2968$,则所得二次直纹面与原犁胸曲面接近,精度已符合要求。 λ 值可从(11)式,令 $n=3$ 及 $\operatorname{ctg} \varphi_n = 1.2577$ 求得,此时 φ_n 与原设计之 $\varphi_3 = 38^\circ 30'$ 十分接近(仅差几秒)。

用(11)、(12)式计算结果与原设计值对比如表1。

设计给定值: $K=0.3049$, 选定 $\lambda = -3.2968$

表 1

元 线 号 n	φ_n 计 算 值	φ_n 原 设 计	δ_n 计 算 值	δ_n 原 设 计
1	$20^\circ 30'$	$20^\circ 30'$	13°	13°
2	$29^\circ 11'$	$29^\circ 30'$	$17^\circ 24'$	$17^\circ 30'$
3	$38^\circ 30'$	$38^\circ 30'$	$22^\circ 14' *$	$22^\circ 24'$
4	$47^\circ 57'$	$47^\circ 30'$	$27^\circ 44'$	$27^\circ 48'$
5	$57^\circ 6' *$	$56^\circ 30'$	$34^\circ 13'$	$34^\circ 18'$
6	$65^\circ 30'$	$65^\circ 30'$	42°	42°

* 可见 φ_n 最大偏离为 φ_5 ,与原设计值差 $36'$,相对偏差 $<1.7\%$; δ_n 最大偏离为 δ_3 与原设计值差 $10'$,相对偏差 $<0.8\%$,精度符合要求。

(5) 通用A型犁体之犁胸曲面方程

以下列设计参数代入(10A),选用 $\lambda = -3.2968$, $X_n = 1.64B$, $Y_n = 1.52B - 0.08Bn$ (B为单铎幅宽)。 $Y_6 = 1.04B$, $Y_1 = 1.44B$, $K = 0.3049$, $\varphi_1 = 20.5^\circ$, $\delta_1 = 13^\circ$, $\varphi_6 = 65.5^\circ$, $\delta_6 = 42^\circ$,

得通用A型犁胸曲面隐式:

$$(x - 1.64B)^2 + 0.7811yz - 2.4336(x - 1.64B)z - 0.8873(x - 1.64B)y - 0.5533Bz + 1.4913B(x - 1.64B) = 0 \dots \dots \dots (13)$$

对通-20A,以 $B=200$ 代入得:

$$(x - 328)^2 + 0.7811yz - 2.4336(x - 328)z - 0.8873(x - 328)y - 110.66z + 298.26(x - 328) = 0 \dots \dots \dots (14)$$

对通-25A,以 $B=250$ 代入得:

$$(x - 410)^2 + 0.7811yz - 2.4336(x - 410)z - 0.8873(x - 410)y - 138.325z + 372.825(x - 410) = 0 \dots \dots \dots (15)$$

工程设计上以用参数方程为便,其方程为:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_n - V \operatorname{ctg} \varphi_n \\ y &= Y_n - V \operatorname{ctg} \delta_n \\ z &= V \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

其中 $X_n = 1.64B$, $Y_n = 1.04B + 0.08B(6-n)$

$$\operatorname{ctg} \varphi_n = \frac{-0.8804n + 8.9326}{n + 2.011} \dots\dots\dots (11A)$$

$$\operatorname{ctg} \delta_n \approx \frac{139.19 + 1.917n - 1.541n^2}{21.52 + 10.702n} \dots\dots\dots (12A)$$

(6) 犁胸曲面方程化为单叶双曲面典型形式

a) 求中心 设 (13) 式为 $f(x, y, z) = 0$

二次曲面的中心应满足以下条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{即 } 2(x - 1.64B) - 2.4336z - 0.8873y + 1.4913B &= 0 \\ -0.8873(x - 1.64B) + 0.7811z &= 0 \\ -2.4336(x - 1.64B) + 0.7811y - 0.5533B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{解之 } x &= 1.8845B \\ y &= 1.4701B \\ z &= 0.2777B \end{aligned} \right\}$$

b) 求主方向 (特征向量)

令 $\phi(x, y, z)$ 表示 (13) 式之诸二次项之和,

$$\text{即 } \phi(x, y, z) = x^2 - 0.8873xy + 0.7811yz - 2.4336xz$$

$$\text{特征向量应满足下列方程组: } \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{x} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{y} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial z}}{z} = 2s$$

$$\left. \begin{aligned} \text{即 } x - 0.4437y - 1.2163z - sx &= 0 \\ -0.4437x - sy + 0.3905z &= 0 \\ -1.2163x + 0.3905y - sz &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (C)$$

此方程组有非零解之条件为:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} 1-s & -0.4437 & -1.2166 \\ -0.4437 & -s & 0.3905 \\ -1.2166 & 0.3905 & -s \end{vmatrix} = 0$$

解此三次方程得近似特征根

$$s_1 = -0.1648$$

$$s_2 = 1.9883$$

$$s_3 = -0.824$$

以 s 之根代入 (c) 中任意二方程式, 从而对应的特征向量为: