《高等数学》学习指导与作业设计丛书

丛书主编 周之虎

丛书副主编 董 毅 张裕生 梅 红

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j)$$

线性代数学习指导与作业设计

梅 红 主编

安徽大学出版社

《高等数学》学习指导与作业设计丛书

安徽省精品课程《高等数学》建设成果

安徽省省级教学研究项目成果

线性代数
学习指导与作业设计

安徽大学出版社

内容提要

本书按照高等学校数学课程教学指导委员会制定的《线性代数课程教学基本要求》及硕士研究生入学考试大纲、专升本考试大纲编写。全书按同济大学《线性代数》(第四版)顺序编写,与教学需求保持同步。每章分为8个模块:教学要求;知识要点;答疑解惑;范例解析;基础作业题;综合作业题;自测题;参考答案与提示。

本书可作为非数学专业本科生、专科生学习及考研、专升本考试复习的辅导教材,也可供教师与科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与作业设计/梅红主编.—合肥:安徽大学出版社,2009.8

(高等数学学习指导与作业设计丛书/周之虎主编)

ISBN 978—7—81110—601—5

Ⅰ.线… Ⅱ.梅… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第126517号

线性代数学习指导与作业设计

梅 红 主编

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路3号 邮编230039)	经 销	各地新华书店
联系电话	编辑室 0551-5106428 发行部 0551-5107716 5108397	印 刷	合肥创新印务有限公司
E—mail	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	开 本	710×1000 1/16
责任编辑	李镜平	印 张	9
特约编辑	罗季重	字 数	172千
封面设计	孟献辉	版 次	2009年8月第1版
		印 次	2009年8月第1次印刷

ISBN 978—7—81110—601—5　　定价 18.00元

前　言

微积分、线性代数、概率统计是高等院校三门重要的数学课程，它们是许多专业课的理论基础，对后继专业课学习起着举足轻重的作用。此外，它们也是许多专业的硕士研究生入学考试以及专升本考试的必考内容。因此学好它们对本科生和专科生都是非常重要的。但是，这三门课程都具有理论性较强，较为抽象，方法难掌握的特点，学生初学时普遍感到困难。为了让学生更好地掌握教材中的有关概念和定理，提高分析和解决问题的能力，为此，我们组织了有丰富教学经验的教师编写了这套高等数学教学辅助教材，以满足在校学生及自学人员的需求，为学生自主学习服务。

本套丛书结构紧凑、简明，题型丰富。通过答疑解惑、范例解析，可以使读者通过例题掌握基本概念和基本解题思路；作业设计内容丰富，题型多样，紧扣教学大纲，突出基础性、应用性、典型性，便于学生的自我提高与自我完善，达到提高教学质量的目的。针对不同层次的学生设计了作业，既有紧扣教材的基础作业题，又有便于学生提高加深的综合作业题，将满足各层次学生的需要。本套丛书由周之虎教授任主编，董毅、张裕生、梅红任副主编。

《线性代数学习指导与作业设计》是按照同济大学出版社《线性代数》(第四版)顺序编写，每章分为8个模块：模块1，教学要求；模块2，知识要点；模块3，答疑解惑；模块4，范例解析；模块5，基础作业题；模块6，综合作业题；模块7，自测题；模块8，参考答案与提示。

本书的特点：

1. 方便教学与学生自学。每章都有“教学要求”和“知识要点”、“串讲小结”模块，通过联系串讲、小结，说明重点，分散难点，使读者区分主次，心中有数，达到更好学习的目的。

2. 答疑解惑、范例解析，注重阐述现代数学思想与方法，通过典型例题的分析及解答，为读者提供解题的基本思路和常用方法。吸收了作者与很多专家的教学研究新成果。

3. 注重作业设计。针对不同层次的学生设计了作业，既有紧扣教材的基础作业题，又有便于学生提高加深的综合作业题。

本书由蚌埠学院的梅红任主编，鲍宏伟、娄志娥、李云任副主编。具体编写：梅红（第1、2章）、鲍宏伟（第3章），娄志娥（第4章）、李云（第5章）；最后由周之虎教授主审。

安徽大学出版社以及蚌埠学院数理系的同仁们在本书的编写过程中给予了大力的支持与帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编写时间仓促，本书尚有不足之处，恳请读者与同行予以批评指正。

编　者

2009年5月

目　录

第1章　行列式

1.1　教学要求

【基本要求】

理解 n 阶行列式的定义及其性质;掌握用行列式的定义、性质和有关定理计算较简单的 n 阶行列式的方法;掌握克莱姆法则.

【教学重点】

行列式的性质和计算;克莱姆法则.

【教学难点】

计算 n 阶行列式.

1.2　知识要点

【知识要点】

1. 定义(完全展开式)

二阶行列式:$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值：

(1) 是 $n!$ 项的代数和；

(2) 每一项是 n 个元素的乘积，通项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其中 j_1，$j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列；

(3) $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为逆序数.

2. 计算(化零降阶法)

余子式和代数余子式：n 阶行列式元素 a_{ij} 所在行与列划去后，余下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数行列式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$

或 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n)$.

3. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以此行列式.

(4) 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

(5) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

则 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式值不变.

4. 行列式的其他性质

(1) $|kA|=k^n|A|$；

(2) $|A+B|\neq|A|+|B|$；

(3) 一行(列)的元素乘上另一行(列)的相应元素代数余子式之和,行列式的值为零;

(4) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$.

5. 重要定理与公式

(1) 上(下)三角行列式及对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}.$$

(2) 行列式的按行(列)展开法则

$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, i = 1,2,\cdots,n,$

$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, i = 1,2,\cdots,n;$

及$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j;$

$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j.$

(3) 范德蒙行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

(4) 克莱姆法则

n 元 n 个方程的线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$ 当

$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,方程组有唯一解:$x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \cdots,$

$x_n=\dfrac{D_n}{D}$,

其中, $D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

6. 化简计算行列式的一般方法

(1) 按定义将行列式展开计算.

(2) 三角化:通过初等变换,使主对角线一侧的元素都变为零.

(3) 递推法:若 n 阶行列式 D_n 划去第一行第一列得到的 D_{n-1} 与 D_n 有相同形状,可用递推的方法求出 D_n(往往需要用数学归纳法证明).

(4) 分解出线性因子:将行列式看作某个变量的多项式,利用余子式定理设法解出线性因子.

(5) 将行列式表示为行列式和的方法:若某行(列)每个元素均为两项的和,则可按行列式的性质将它化为两个同阶行列式的和,然后分别计算.

(6) 变更行列式元素的方法.

【串讲小结】

本章在二、三阶行列式的基础上,引入了一般 n 阶行列式的定义,介绍了 n 阶行列式的性质及 n 阶行列式的应用——克莱姆法则.

行列式的两种计算方法:(1) 化为三角形行列式计算;(2) 按某一行(列)展开.行列式的计算是对行列式性质的灵活运用,为以后各章的学习打下了一定的基础.

关于 n 阶行列式的一个重要应用是克莱姆法则,它是求解具有 n 个方程、n 个未知量,且系数行列式不等于零的线性方程组的一个重要结论.克莱姆法则的结论对于以后讨论一般线性方程组解的情况具有重要意义.含有 n 个方程、n 个未知量的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是:其系数行列式 $D=0$.

1.3 答疑解惑

1. 如果排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 I,则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?这两个排列之间的奇偶关系又如何?

答: 在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 及 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中考察同一对数 x_k 与 x_c. 它们在两个排列中,一为顺序,一为逆序,这一对数在两个排列中的逆序数之和为 1,在一个由 n 个数组成的排列中,共有 $C_n^2=\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 对不同的数. 在题设两个排列中,这些数对的逆序之和也就是 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$,由于排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 I,则

后一个排列的逆序数为 $\frac{1}{2}n(n-1)-I$.

因为两排列的逆序数之和为 $\frac{1}{2}n(n-1)$，因此，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，$\frac{1}{2}n(n-1)$ 为偶数，这时 $x_1x_2\cdots x_n$ 及 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的奇偶性相同；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，$\frac{1}{2}n(n-1)$ 为奇数，这时 $x_1x_2\cdots x_n$ 及 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的奇偶性相反.

2. 如何判断一个行列式 D 的值为零？有哪些常用方法？

答:常用方法有以下几种：

(1) 如果行列式 D 有一行(列)的所有元素全为零，则 $D=0$；

(2) 如果行列式 D 有两行(列)对应的元素相同或成比例，则 $D=0$；

(3) 如果 $-D^{T}=D$，并且 D 的阶数是奇数，则 $D=0$；

(4) 如果 D 中等于零的元素个数比 n^2-n 多，则 $D=0$；

(5) 若能设法证明 D 不能被 2 整除，则 $D\neq 0$；

(6) 如果 D 中有一个大于 $\frac{n}{2}$ 阶的子式中的元素全为零，则 $D=0$；

(7) 直接计算 D.

3. 行列式有哪些基本解题方法？

答:常用的基本解题方法有：

(1) 按行列式的定义求解；

(2) 由行列式的基本性质化行列式为上(下)三角行列式或对角行列式来解；

(3) 按行列式的行(列)展开法降阶求解；

(4) 加边法，即将行列式加一行一列升高一阶，变成特殊行列式来解；

(5) 递推公式法.

1.4 范例解析

例 1 用性质计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 297 & 101 & 99 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a-b & a & b \\ -a & -a+b & a \\ b & -b & -a-b \end{vmatrix}$.

解析:在行列式的计算中，常根据性质将某两或三行(列)相加的方法.

(1) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 297 & 101 & 99 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 300 & 102 & 100 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 300 & 100 & 100 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a-b & a & b \\ -a & -a+b & a \\ b & -b & -a-b \end{vmatrix} \underline{\underline{r_1+r_2+r_3}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & -a+b & a \\ b & -b & -a-b \end{vmatrix} = 0.$$

例 2 计算下列行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解析:在行列式的计算中,一个题目常有好几种方法可解决.在解题时,应根据题目和每个人的熟练程度来选择.

解法 1(应用性质)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \end{vmatrix} = 31.$$

解法 2(按第三行展开)

$$D = a_{32}(-1)^{3+2}M_{32} + a_{34}(-1)^{3+4}M_{34}$$

$$= 1 \times (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 31.$$

解法 3(先用性质,再按行展开)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 31.$$

例 3 计算下列行列式：

(1) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $D = \begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$；

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解析:在行列式的计算中,若行列式的每一行或列都由相同的几个数组成,一般将行列式的每一列或行都加到一列或行上,再提取公因数的方法,可以简化计算.

(1) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=20\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=20\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=160.$$

(2) $D=\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}=xyz\begin{vmatrix} x+\frac{1}{x} & y & z \\ x & y+\frac{1}{y} & z \\ x & y & z+\frac{1}{z} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} x^2+1 & y^2 & z^2 \\ x^2 & y^2+1 & z^2 \\ x^2 & y^2 & z^2+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2+1 & y^2 & z^2 \\ x^2+y^2+z^2+1 & y^2+1 & z^2 \\ x^2+y^2+z^2+1 & y^2 & z^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x^2+y^2+z^2+1)\begin{vmatrix} 1 & y^2 & z^2 \\ 1 & y^2+1 & z^2 \\ 1 & y^2 & z^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x^2+y^2+z^2+1)\begin{vmatrix} 1 & y^2 & z^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=x^2+y^2+z^2+1.$$

$$(3)\ D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{-a_i\cdot c_1+c_{i+1}}}\ (x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n\end{vmatrix}$$

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{j=1}^{n}(x-a_j).$$

例 4 计算下列行列式：

$$(1)\ D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a_1 & a & a_2 & a_2\\ a_2 & a_2 & a & a_3\\ a_3 & a_3 & a_3 & a\end{vmatrix};\qquad (2)\ D=\begin{vmatrix}2+x & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2-x & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+y & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2-y\end{vmatrix}$$

解析:采用某一行(列)乘多少倍加到另一行(列)的方法,可以简化计算,从而得到行列式的值.

$$(1)\ D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a_1 & a & a_2 & a_2\\ a_2 & a_2 & a & a_3\\ a_3 & a_3 & a_3 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a_1 & a-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1\\ a_2 & 0 & a-a_2 & a_3-a_2\\ a_3 & 0 & 0 & a-a_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1\\ 0 & a-a_2 & a_3-a_2\\ 0 & 0 & a-a_3\end{vmatrix}=(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3).$$

$$(2)\ D=\begin{vmatrix}2+x & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2-x & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+y & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2-y\end{vmatrix}\ \underline{\underline{-r_4+r_3}}_{-r_2+r_1}\begin{vmatrix}x & x & 0 & 0\\ 2 & 2-x & 2 & 2\\ 0 & 0 & y & y\\ 2 & 2 & 2 & 2-y\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{-c_3+c_4}}_{-c_1+c_2}\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & 0\\ 2 & -x & 2 & 0\\ 0 & 0 & y & 0\\ 2 & 0 & 2 & -y\end{vmatrix}=-y\begin{vmatrix}x & 0 & 0\\ 2 & -x & 2\\ 0 & 0 & y\end{vmatrix}$$

$$=(-y)y\begin{vmatrix} x & 0 \\ 2 & -x \end{vmatrix}=x^2y^2.$$

例 5 证明：

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

解析:可以通过性质拆项,化简.

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+$$

$$b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}+b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

例 6 证明：

$$(1)\ D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta};$$

$$(2)\ D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

解析:利用递推公式来计算行列式是一种有效方法.一般把行列式按第一行(列)展开,或按第 n 行(列)展开,可以得到与前式形式完全相同的较低一阶行列式,从而得到相应的递推关系.按此递推关系依次降低阶数,直到最后计算出原行列式的结果.

(1) 将 D_n 按第一列展开，则

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\begin{vmatrix}\alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}.$$

以下用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时，$D_1=\alpha+\beta$，显然原式成立；假设对于小于 n 的自然数，原式成立，则由递推关系知：

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

故对一切自然数 n，原式成立.

(2) 用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时，显然原式成立；

假设对于小于 n 的自然数原式仍成立，则对于 n，有

$$D_n=2\cos\alpha D_{n-1}-\begin{vmatrix}2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}$$

$$=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}=2\cos\alpha\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin(n+1)\alpha+\sin(n-1)\alpha-\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

例 7 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1\end{vmatrix}$.

解析：在求某些行列式时，可以根据需要将行列式加一行一列升高一阶，变成特殊行列式来解，达到简化的目的.

构造 $n+1$ 阶加边行列式