普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学教学丛书

概率论与数理统计

刘伟　谢俊来
雷艳　王宝贵　编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学教学丛书

概率论与数理统计

刘 伟 谢俊来 雷 艳 王宝贵 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据全国高等院校工科数学“概率论与数理统计”课程教学的基本要求，介绍了该课程的基本理论和方法．内容包括：随机事件及其概率，随机变量及其概率分布，多维随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，样本及抽样分布，参数估计，假设检验和回归分析等．其特点是紧密联系工程实际，叙述直观、详细，深入浅出．例题丰富、习题配备适当合理．

本书可作为高等院校工科、经济管理类各专业本科学生学习“概率论与数理统计”课程的教材，也可供工程技术人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘伟等编．—北京：科学出版社，2009
（普通高等教育“十一五”规划教材・大学数学教学丛书）
ISBN 978-7-03-025217-3

Ⅰ．概… Ⅱ．刘… Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 140194 号

责任编辑：于俊杰 赵 靖／责任校对：郑金红
责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京智力达印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 1 月第一次印刷 印张：17 1/4
印数：1—5 000 字数：348 000

定价：25.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象规律性的数学分支，理论严谨，应用广泛，发展迅速.

概率论与数理统计是现代数学的重要分支.一方面，它有自己独特的概念和方法，内容丰富，结果深刻；另一方面，它与其他数学分支又有紧密的联系，是近代数学的重要组成部分.目前，随着计算机技术的迅猛发展和普及，概率论与数理统计的理论和方法在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域得到了极为广泛的应用，它已逐渐成为今天高等院校理、工、经济和管理类学科大学生重要的数学必修课之一.学习本课程的目的是使学生初步掌握处理随机现象的基本方法和理论，培养他们解决某些实际问题的能力.

本书着重介绍了概率论的基本概念、基本理论以及常用的数理统计方法.在编写时，编者力求做到取材适当，概念清晰，注重联系实际.为改变目前工科数学教学内容经典过多而现代不足的现状，并提高学生运用数理统计方法的能力，本书尽量通过具体实例或在学生已有知识的基础上引入概念，以逐步培养学生由实际问题归纳和抽象出数学问题的能力即数学建模的能力；另外，在例题的选择上，力求将具体的工程实例问题归结为相应的概率统计问题.

本书是为普通高等学校本科生编写的教材，由概率论和数理统计两部分组成.概率论部分包括随机事件及其概率，随机变量的分布，数字特征，大数定律及中心极限定理；数理统计部分包括样本及抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析等.本书重视概率论与数理统计的趣味性和实用性，紧密联系应用领域，在例题的选择上，力求将具体的工程实例问题归结为相应的概率统计问题.习题部分分为(A)、(B)两部分，(A)类习题是学生必做的基础题，(B)类习题是学生选做题，这里我们精选了部分历年考研题，并对考试年代做了标记.本书可作为高等学校工科、经济管理类各专业本科学生的教材，也可供应用统计工作者参考.

本书第1～3章由雷艳编写；第5～6章由王宝贵编写；第7～8章由谢俊来编写；第4、9章由刘伟编写；最后全书由刘伟修改定稿.本书的编写工作得到了吉林建筑工程学院和长春工程学院教务处的大力支持，在此一并致谢.

由于编者水平所限，书中疏漏与不足之处在所难免，恳请同行及读者不吝赐教.

编　者

2009年6月于长春

目　　录

第 1 章　概率论的基本概念

人们在自然界和日常实践活动中，经常会遇到各种各样的现象．这些现象大体上可分为两类：一类是确定现象，例如“在一个标准大气压下，纯水加热到 100℃时必然沸腾，冷却到 0℃时必然结冰”；“向上抛一块石头必然下落”，“同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引”等等，这种在一定条件下有确定结果(也就是说，只有一种试验结果)的现象称为**确定现象**或**必然现象**；另一类是随机现象，例如：“工程招标中，各投标方中标的机会有多大”，“测量一个物体的长度，其测量误差的大小”，“从一批电视机中随便取一台，电视机寿命的长短”，“在相同的条件下，向上抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上”等等，这些现象在一定条件下进行试验或观察某结果可能发生，也可能不发生(也就是说，试验的结果有多种可能)，而且在每次试验之前都无法预测哪一个结果会出现(也就是说，不能肯定试验会出现哪一个结果)，这种现象称为**随机现象**.

1.1　随机试验与随机事件

1.1.1　随机试验

由于随机现象的结果事先不能预知，初看起来似乎毫无规律．然而人们发现当同一随机现象大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的规律性．人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**．概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科.

为了对随机现象的统计规律性进行研究，就需要对随机现象进行重复观察，下面举一些重复观察随机现象的例子.

E_1：抛一枚硬币三次，观察出现正面的次数；

E_2：抛一枚硬币，观察出现正面、反面的情况；

E_3：记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数；

E_4：从某厂生产的同型号的灯泡中抽取一只，测试其寿命(即正常工作的小时数).

由以上各例我们可以看出，这些随机现象都具有如下共同的特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但所有可能的结果在试验前是明确知道的;

(3) 每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中,我们将对具有上述三个特点的随机现象的观察称为**随机试验**,简称**试验**,记为 E. 本书以后在无特殊说明的情况下,提到的试验都指随机试验.

1.1.2　样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的,但其所有可能结果是明确的,要研究随机试验,首先要弄清楚这个试验的所有可能的结果. 我们把随机试验的每一种可能的结果称为一个**样本点**;所有样本点的全体构成的集合称为**样本空间**,记为 Ω. 如

E_1 的样本空间为 Ω_1:$\{0,1,2,3\}$;

E_2 的样本空间为 Ω_2:{正,反};

E_3 的样本空间为 Ω_3:$\{0,1,2,3\cdots\}$;

E_4 的样本空间为 Ω_4:$\{x|0\leqslant x<+\infty\}$,其中 x 表示灯泡的寿命.

从这些例子可以看出,随着试验的不同,样本空间可能相当简单,也可能相当复杂. 在今后的讨论中,都认为样本空间是预先给出定的. 当然对于同一个随机试验,如果考虑问题的角度不同,则其样本空间的选择也可能有所不同.

例如:掷一颗骰子这个随机试验,若考虑出现的点数,则样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$;若考虑的是出现奇数点还是出现偶数点,则样本空间也可以取为 $\Omega=${奇数,偶数}.

由此说明,同一个随机试验可以有不同的样本空间. 在实际问题中,如何选择恰当的样本空间来研究随机现象是概率论中特别值得研究的问题.

1.1.3　随机事件

当我们通过随机试验来研究随机现象时,根据研究目的的不同,将随机试验的每一个可能的结果即一个样本点构成的集合称为一个**基本事件**. 因为随机试验的所有可能结果是明确的,从而所有的基本事件也是明确的. 例如,在抛掷硬币的试验中"出现反面","出现正面"是两个基本事件. 又如在掷骰子试验中"出现一点","出现两点","出现三点",……"出现六点"这些都是基本事件. 但是,在研究过程中,我们常常不是关心某一个样本点在试验后是否出现,而是关心满足某些条件的样本点在试验后是否出现,我们称满足这一条件的样本点构成的样本空间的子集为**随机事件**,简称**事件**,通常用大写的字母 $A,B,C,\cdots$表示. 在试验后,如果出现了事件 A 中包含的某一个样本点,则称**事件 A 发生**,否则称**事件 A 不发生**.

因为样本空间 Ω 包含所有样本点,它也是本身的子集,因而在一次试验中,必然要出现 Ω 中的某一样本点,也就是说在试验中,Ω 必然要发生,所以称 Ω 为**必然**

事件.由于空集∅不包含任何一个的样本点,所以,在任意一次试验后,∅永远不可能发生,因此,称∅是**不可能事件**.实质上必然事件就是在每次试验中都发生的事件,不可能事件就是在每次试验中都不发生的事件,必然事件与不可能事件的发生与否,已经失去了"不确定性"即随机性,因而本质上不是随机事件,但为了讨论问题的方便,还是将它们看作随机事件.

例 1.1.1 一批产品共 10 件,其中 2 件次品,其余为正品,从中任取 3 件,这是随机试验,如:

A 表示"取出的 3 件中恰有一件正品",

B 表示"取出的 3 件中恰有两件正品",

C 表示"取出的 3 件中至少有两件正品",

D 表示"取出的 3 件中至少有一件次品",

这些都是随机事件;

Ω 表示"取出的 3 件中有正品"为必然事件;

∅表示"取出的 3 件都是次品"为不可能事件;

对于这个随机试验来说,基本事件总数为 C_{10}^3 个.

1.1.4 事件的关系与运算

对于随机试验而言,它的样本空间 Ω 可以包含很多随机事件.概率论的任务之一就是研究随机事件的规律,通过研究较简单事件的规律以掌握更复杂事件的规律.为此,需要研究事件和事件之间的关系与运算.

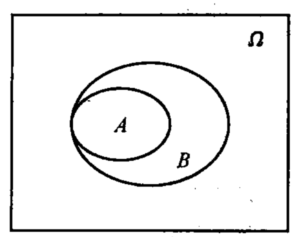
今后若没有特殊说明,认为样本空间 Ω 是给定的,且还定义了 Ω 中的一些事件 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$ 等.由于随机事件是样本空间的子集,从而事件的关系与运算和集合的关系与运算完全相类似.

1. 事件的包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B **包含**事件 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,如图 1.1.1 所示.

特别地,对任何事件 A,有 $A\subset\Omega$,$\varnothing\subset A$.

例 1.1.2 设某种动物从出生活至 20 岁记为事件 A,从出生到 25 岁记为事件 B,则 $A\subset B$.



$A\subset B$

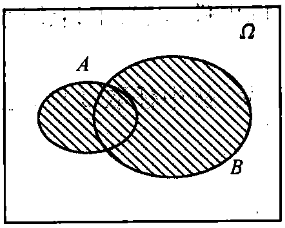
图 1.1.1

2. 事件的相等

若 $A\subset B$,同时有 $B\subset A$,称事件 A 与事件 B **相等**,记作 $A=B$.易知相等的两个事件 A 与 B 总是同时发生或同时不发生,在同一样本空间中两个事件相等意味着它们含有相同的样本点.

3. 和事件(或并事件)

我们称“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”的事件为事件 A 和事件 B 的**和事件**(或**并事件**)，记作 $A\cup B$，如图 1.1.2 所示.



$A\cup B$

图 1.1.2

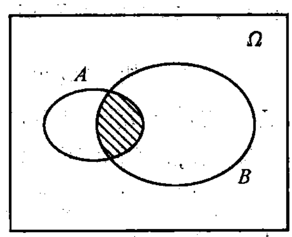
实质上，$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，表示“A 发生或 B 发生”. 显然，$A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup A=A$，$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 的和事件，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和事件.

例 1.1.3　设有某种圆柱形产品，若底面直径和高都合格，则该产品合格. 令 A 表示“直径不合格”，B 表示“高度不合格”，则 $A\cup B$ 表示“产品不合格”.

4. 积事件(或交事件)

我们称“事件 A 与事件 B 同时发生”的事件为事件 A 和事件 B 的**积事件**(或**交事件**)，记作 $A\cap B$，简记 AB，如图 1.1.3 所示.



AB

图 1.1.3

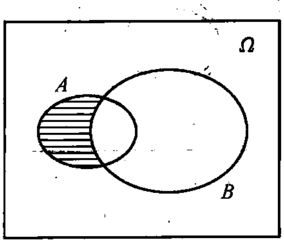
实质上，$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，表示“A 发生且 B 发生”. 显然

$$A\cap\Omega=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing,$$
$$A\cap A=A,\quad A\cap B\subset A,\quad A\cap B\subset B.$$

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的积事件.

如例 1.1.3 中，若 C 表示“直径合格”，D 表示“高度合格”，则 $C\cap D$ 表示“产品合格”.

5. 差事件



$A-B$

图 1.1.4

我们称“事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记作 $A-B$，如图 1.1.4 所示.

实质上，$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$，明显地有 $A-B=A-AB$，$A-\varnothing=A$.

如例 1.1.3 中事件 $A-B$ 表示“该产品的直径不合格，而高度合格”.

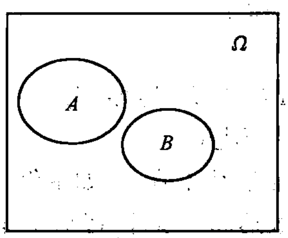
6. 互不相容事件(或互斥事件)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,称事件 A 与事件 B 为**互不相容事件(或互斥事件)**,如图 1.1.5 所示.

注 任意两个基本事件都是互斥的.

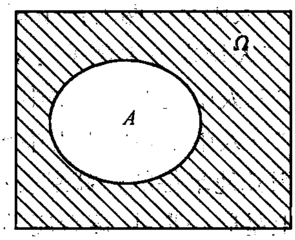
7. 对立事件(或逆事件)

我们称"差事件 $\Omega-A$"为事件 A 的**对立事件**或称为事件 A 的**逆事件**,记作 $\overline{A}$,如图 1.1.6 所示.



A与B互斥

图 1.1.5



$\overline{A}$

图 1.1.6

显然 $A\cup\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing$,由此说明,在一次试验中 A 与 $\overline{A}$ 有且仅有一个发生,另外,$\overline{\overline{A}}=A,\overline{\Omega}=\varnothing,\overline{\varnothing}=\Omega,A-B=A\overline{B}$.

若 A 与 B 为互斥事件,则 $AB=\varnothing$;而若 A 与 B 为对立事件,则 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$. 因此,若 A 与 B 为互斥事件,则 A 与 B 不一定为对立事件;但若 A 与 B 为对立事件,则 A 与 B 必为互斥事件.

例 1.1.4 设有 100 件产品,其中 5 件产品为次品,从中任取 10 件产品. 记事件 A 表示"10 件产品中至少有一件次品",则其逆事件 $\overline{A}$ 表示"10 件产品中没有次品",即"10 件产品全是正品".

由此说明,若事件 A 比较复杂时,往往它的对立事件比较简单,因此,我们往往可以把对复杂事件的研究转化为对它的对立事件的研究.

事件间的关系及运算与集合的关系及运算是一致的,因此,事件之间满足如下运算规律:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, AB=BA$;

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律:$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C),A(B\cup C)=AB\cup AC$;

(4) 德摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.1.5 甲、乙、丙三人各射击一次靶子,记事件 A 表示"甲击中靶子",事件

B 表示“乙击中靶子”,事件 C 表示“丙击中靶子”,则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件.

(1)“甲未击中靶子”:$\overline{A}$;

(2)“甲击中靶子而乙未击中靶子”:$A\overline{B}$;

(3)“三人中只有丙未击中靶子”:$AB\overline{C}$;

(4)“三人中恰好有一人击中靶子”:$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$;

(5)“三人中至少有一人击中靶子”: $A\cup B\cup C$ 或 $\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$;

(6)“三人中至少有一人未击中靶子”:$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$;

(7)“三人中恰有两人击中靶子”:$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$;

(8)“三人中至少两人击中靶子”:$AB\cup AC\cup BC$;

(9)“三人均未击中靶子”:$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(10)“三人中至多一人击中靶子”:$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$;

(11)“三人中至多两人击中靶子”:$\overline{ABC}$或$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

注　用其他事件的运算来表示一个事件,方法往往不唯一,如本例中的(6)和(11)实际上是同一事件. 读者应学会用不同方法表达同一事件,特别在解决具体问题时,往往要根据需要选择一种恰当的表示方法.

例 1.1.6　化简下列事件:

(1) $(\overline{A}\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$;　　(2) $A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}$.

解　(1)
$$\begin{aligned}(\overline{A}\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)&=[\overline{A}(\overline{A}\cup B)]\cup[\overline{B}(\overline{A}\cup B)] \quad (\text{分配律})\\&=(\overline{A}\overline{A}\cup\overline{A}B)\cup(\overline{B}\overline{A}\cup\overline{B}B) \quad (\text{分配律})\\&=(\overline{A}\cup\overline{A}B)\cup(\overline{B}\overline{A}\cup\varnothing)\\&=\overline{A}\cup\overline{B}\overline{A}=\overline{A} \quad (\text{因 } \overline{A}\overline{B}\subset\overline{A}).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}&=A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}\\&=A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B} \quad (\text{交换律})\\&=(A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B})\cup(\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}) \quad (\text{结合律})\\&=(A\cup\overline{A})\overline{B}\cup\overline{A}(B\cup\overline{B}) \quad (\text{分配律})\\&=\overline{B}\cup\overline{A}=\overline{AB} \quad (\text{德摩根律}).\end{aligned}$$

1.2　频率与概率

1.2.1　频率

对于一个随机试验来说,随机事件发生的可能性大小是其自身决定的,并且是客观存在的. 概率是随机事件发生可能性大小的度量. 本节要研究的一个根本问题是,对于一个给定的随机事件发生可能性大小的度量究竟如何描述? 如何计算呢?

我们希望找到一个合适的数来表示随机事件在一次试验中发生可能性的大小，为此，我们首先引入频率，它描述了随机事件发生的频繁程度，进而引入表示随机事件在一次试验中发生可能性的大小的数——概率.

定义 1.2.1 若在相同条件下重复独立地进行 n 次相同的试验，则事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**.

由定义易知，频率具有如下的基本性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

例 1.2.1 掷硬币的试验，只做一次试验，事件 A 表示"正面朝上"，则 A 是否发生是不确定的，然而这只是问题的一个方面；另一方面，当大量重复做试验的时候，事件 A 发生的次数，即频数，体现出一定的规律性，约占总试验次数的一半. 如我们将一枚均匀的硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，且各重复地做 10 遍，得到的数据如表 1.2.1 所示(其中 n_A 表示 A 发生的频数，$f_n(A)$ 表示 A 发生的频率).

表 1.2.1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

这种试验历史上也曾有人做过，得到的数据如表 1.2.2 所示.

表 1.2.2

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上表可以看出，不管什么人去抛，当试验次数逐渐增多时，$f_n(A)$总是在0.5附近摆动而逐渐稳定于0.5. 从这个例子可以看出，一个随机试验的随机事件A，在n次试验中出现的频率$f_n(A)$，当试验次数n逐渐增多时，它总在一个常数附近摆动，且逐渐稳定于这个常数. 这个常数是客观存在的"频率稳定性"的性质. 在人类的实践活动中，"频率稳定性"不断地为人们所证实，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性. 由此可见，用它来表示事件A发生可能性的大小是适合的.

但是，在实际问题中，我们往往不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得事件的频率，用来表示事件A发生可能性的大小. 同时，为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出如下表示事件A发生可能性大小的概率定义.

1.2.2　概率的定义与性质

定义 1.2.2　设E是随机试验，Ω是它的样本空间. 对于E的每一个事件A赋予一个实数，记为$P(A)$，称为事件A的**概率**，如果集合函数$P(\cdot)$满足如下三个条件：

(1) 非负性：对于每一个事件A，有$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：对于必然事件Ω，有$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设$A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件，即$A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots. \tag{1.2.1}$$

下面由概率的非负性、规范性和可列可加性出发来推导概率的其他一些重要性质.

性质 1　不可能事件的概率为零，即$P(\varnothing)=0$.

证明　在概率的可列可加性中，取$A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$，则$\varnothing=A_1\cup A_2\cup\cdots$，

$$\begin{aligned}P(\varnothing)&=P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\\&=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots.\end{aligned}$$

又由概率的非负性知$P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式得$P(\varnothing)=0$.

性质 2　概率具有有限可加性：设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互不相容的事件，即$A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1.2.2}$$

证明　在概率的可列可加性中，取$A_i=\varnothing(i=n+1,n+2,\cdots)$，于是$A_1$，$A_2,\cdots,A_n,A_{n+1},\cdots$是可列个两两互不相容的事件，因此，由(1.2.1)有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup A_{n+1}\cup\cdots)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(A_{n+1})+\cdots\end{aligned}$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + 0$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

从而(1.2.2)式得证.

性质 3 设 A,B 是两个事件,若 $A \subset B$,则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A); \tag{1.2.3}$$
$$P(B) \geqslant P(A). \tag{1.2.4}$$

证明 由 $A \subset B$ 得 $B = A \cup (B-A)$(参见图 1.1.1),而 $A(B-A)=\varnothing$,又由性质 2,概率的有限可加性(1.2.2),得

$$P(B) = P(A) + P(B-A),$$

则

$$P(B-A) = P(B) - P(A),$$

从而(1.2.3)式得证;又由概率的非负性知 $P(B-A) \geqslant 0$,故

$$P(B) \geqslant P(A),$$

从而(1.2.4)式得证.

推论 设 A,B 是任意两个事件,则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

证明 由于 $B-A=B-AB$,且 $AB \subset B$(参见图 1.1.4),因此,由性质 3 推得

$$P(B-A) = P(B-AB)$$
$$= P(B) - P(AB).$$

性质 4 对任一事件 A,$P(A) \leqslant 1$.

证明 因 $A \subset \Omega$,由性质 3 得

$$P(A) \leqslant P(\Omega) \leqslant 1.$$

故性质 4 得证.

性质 5 逆事件的概率,对任一随机事件 A,有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明 在性质 2 中,取 $n=2$,$A_1=A$,$A_2=\overline{A}$,而 $A\overline{A}=\varnothing$,$A \cup \overline{A}=\Omega$,由概率的规范性及(1.2.2)式,得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

则

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

故性质 5 得证.

性质 6 对任意两个事件 A,B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.2.5}$$

证明　因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$(图 1.1.4),且 $A(B-AB)=\varnothing$,$AB\subset B$,故由(1.2.2)式及(1.2.3)式得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

因此,(1.2.5)式得证.

另外,将(1.2.5)式推广,例如 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned}$$

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个随机事件,则有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

公式(1.2.5)称为**概率加法公式**.

例 1.2.2　已知 $P(\overline{A})=0.5$,$P(\overline{A}B)=0.2$,$P(B)=0.4$,求:(1) $P(AB)$;(2) $P(A-B)$;(3) $P(A\cup B)$;(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解　(1) 因为 $AB\cup\overline{A}B=B$,且 AB 与 $\overline{A}B$ 是不相容的,故有 $P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B)$. 于是,$P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.4-0.2=0.2$;

(2) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.5=0.5$,

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$;

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$;

(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$.

1.3　等可能概型

按照概率的统计定义,确定一个随机事件的概率,要进行大量的重复试验. 但是,在某些情况下,可以直接求出事件的概率. 这是本章以下内容讨论的主题. 本节讨论最简单的情形——**等可能概型**,即样本空间的每个样本点在一次试验中出现的可能性是相等的.

1.3.1　古典概率

首先我们来看两个实际例子:

(1) 仓库里有灯泡 100 个,要检查灯泡的使用寿命,从中任取 1 个,则每个灯泡被取到的机会是相同的.

(2) 抛一硬币,出现正面与反面两种结果的可能性是相同的.