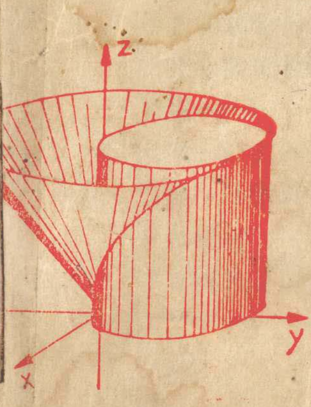
高等数学习题集解答

（根据同济大学数学教研室一九六五年修订本）

数学分析部分

（一）



武汉建材学院基础部
武汉师范学院数学系
合编

目　录

第二编　数学分析

83850056

第二编　数学分析

第十章　函　数

绝对值的运算

解不等式：

10.1　$|x|<5$.

解： $-5<x<5$.

10.2　$|x-3|<4$.

解： $-4<x-3<4$，即$-1<x<7$.

10.3　$x^2<9$.

解：　$|x|=\sqrt{x^2}<3$.　　即$-3<x<3$.

10.4. $0<(x-2)^2\leqslant 4$.

解：　$|x-2|=\sqrt{(x-2)^2}\leqslant\sqrt{4}=2$.

即$-2\leqslant x-2\leqslant 2$　　$0\leqslant x\leqslant 4$.

但$\because (x-2)^2>0$，$\therefore |x-2|>0$，即$x>2$或$x<2$，

$x\neq 2$ $\therefore$ $0\leqslant x<2$，$2<x\leqslant 4$.

10.5.　$|x|>x$.

解： 假定$x>0$，则$x>x$，不可能，假定$x<0$则$-x>x$，即$2x<0$，$x<0$.　$\therefore$解为$x<0$.

10.6. $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$.

解：　$\because \dfrac{x}{1+x}>\dfrac{x}{1+x}$或$\dfrac{x}{1+x}<-\dfrac{x}{1+x}$. 第一种

情况是不可能的，故在第二种情况下即是：

$$2\frac{x}{1+x}<0.\text{即}\frac{x}{1+x}<0.\text{因此，或}\begin{cases}x<0\\1+x>0\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases}x>0\\1+x<0\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}x<0\\x>-1\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x>0\\x<-1\end{cases}$$

∵ 第二个不等式组无解， ∴原不等式解为：

$-1<x<0$.

10.7. $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$.

解：∵ $x^2-3x+2>x^2-3x+2$或$x^2-3x+2<-x^2+3x-2$，即$x^2-3x+2<0$.显然只可能第二种情况成立，而它又可化成：

$$(x-1)(x-2)<0\quad\therefore\text{又有}\begin{cases}x-1<0\\x-2>0\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases}x-1>0\\x-2<0\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}x<1\\x>2\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x>1\\x<2\end{cases}$$

因为第一个不等式组无解，故原不等式之解为：

$1<x<2$.

求下列方程的实根：

10.8. $|x|=x+1$.

解：∵ $x+1=|x|\geqslant0$ ∴ $x\geqslant-1$ 当$x\geqslant0$时，则得$x=x+1$，矛盾，故$-1\leqslant x<0$ ∴ $|x|=-x$即$-x=x+1$

$$2x=-1\quad\therefore\quad x=-\frac{1}{2}.$$

10.9. $|x|=-x$.

解：∵ $-x=|x|\geqslant0$，∴ $x\leqslant0$故$|x|=-x$，即得$-x=-x$，恒等，故凡满足不等式$x\leqslant0$的x均为它的解。

10.10. $|\sin x|=\sin x+2$.

解：∵ $\sin x+2=|\sin x|$，而$0\leqslant|\sin x|\leqslant1$

即$0\leqslant \sin x+2\leqslant 1$ ∴ $-2\leqslant \sin x\leqslant -1$ 又仅$\sin x=$ $=-1$成立，故$x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ （$k=0$，± 1，± 2，…）

10.11. $|2x+3|=x^2$.

解：假定$2x+3<0$，，则方程为$-(2x+3)=x^2$或$x^2+2x+3=0$ ∵ $b^2-4ac=4-12<0$ ∴无实根.

若 $2x+3=0$ 又$2x+3=x^2$，∴无解.

假定，$2x+3>0$，则方程为$2x+3=x^2$ 或$x^2-2x-3=0$，

即$(x-3)(x+1)=0$即有$x_1=-1$，$x_2=3$，

但因$2x+3>0$，即$x>-\dfrac{3}{2}$故两根都在此范围内，即原方程之根为．$x=-1$　　$x=3$.

函数值的求法

10.12. 若$f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求$f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$.

解：

$$f(2)=\frac{|2-2|}{2+1}=0 \qquad f(-2)=\frac{|-2-2|}{-2+1}=-4$$

$$f(0)=\frac{|-2|}{0+1}=2, \qquad f(a)=\frac{|a-2|}{a+1}$$

$$f(a+b)=\frac{|a+b-2|}{a+b+1}.$$

10.13. 若$\varphi(x)=2^{x-2}$求$\varphi(2)$，$\varphi(-2)$，$\varphi(0)$，$\varphi\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

解：

$$\varphi(2)=2^{2-2}=2^0=1;$$

$$\varphi(-2)=2^{-2-2}=2^{-4}=\frac{1}{16};$$

$$\varphi(0)=2^{0-2}=\frac{1}{4};$$

$$\varphi\left(\frac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}-2}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$$

10.14. 若$\varphi(t)=t^3+1$，求$\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$.

解： $\varphi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1$;

$[\varphi(t)]^2=(t^3+1)^2=t^6+2t^3+1$.

10.15. 若$f(x)=x^2-3x+7$，求$f(x+\Delta x)$，

$f(x+\Delta x)-f(x)$.

解：
$$\begin{aligned}f(x+\Delta x)&=(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+7\\&=x^2-3x+7+2x\Delta x+(\Delta x)^2-3\Delta x\\&=(x^2-3x+7)+(2x-3)\Delta x+(\Delta x)^2\end{aligned}$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=2x\Delta x-3\Delta x+(\Delta x)^2.$$

10.16. 若$f(x)=\frac{1}{x}$，求$f(x+\Delta x)-f(x)$.

解： $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

10.17. 若$\psi(x)=\ln x$，证明

$\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)]$.

证：$\psi(x)+\psi(x+1)=\ln x+\ln(x+1)=\ln[x(x+1)]$
$=\psi[x(x+1)]$.

10.18. 若$F(z)=a^z$，证明(a) $F(-z)\cdot F(z)-1=0$，

(b) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$.

证：(a) $F(-z)\cdot F(z)-1=a^{-z}\cdot a^z-1=a^{-z+z}-1$
$=a^0-1=1-1=0$,

(b) $F(x)\cdot F(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}=F(x+y)$.

10.19. 若$\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，证明

$$\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right).$$

证：$\phi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)=\ln\frac{1-\frac{y+z}{1+yz}}{1+\frac{y+z}{1+yz}}$

$$=\ln\frac{(1+yz)-(y+z)}{(1+yz)+(y+z)}$$

$$=\ln\frac{(1-y)-z(1-y)}{(1+y)+z(1+y)}=\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right)$$

$$=\ln\frac{1-y}{1+y}+\ln\frac{1-z}{1+z}=\varphi(y)+\varphi(z).$$

10.20. 若$\varphi(\theta)=\operatorname{tg}\theta$，证明

$$\varphi(a+b)=\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a)\cdot\varphi(b)}.$$

证：$\varphi(a+b)==\operatorname{tg}(a+b)$

$$=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}=\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a)\cdot\varphi(b)}.$$

10·21· 若$f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，

证明 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.

证：$f\left(\frac{1}{t}\right)=2\cdot\frac{1}{t^2}+2t^2+5t+5.\frac{1}{t}$

$$=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t=f(t).$$

10.22. 若 $f(x)=x^5-x^3+2x$，证明$f(-2)=-f(2)$，$f(-x)=-f(x)$.

证：$\because f(-2)=(-2)^5-(-2)^3+2(-2)$

$=-2^5+2^3-2\cdot2=-[2^5-2^3-2\cdot2]=-f(2)$

$f(-x)=(-x)^5-(-x)^3+2(-x)$

$=-x^5+x^3-2x=-[x^5-x^3+2x]$

$=-f(x)$.

10.23.若$F(x)=x^2+\cos x$，证明：$F(x)=F(-x)$.

证：$F(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=F(x)$.

10.24.若$\varphi(z)=\sin z-5z^3$，证明

$\varphi(-z)=-\varphi(z)$.

证：$\varphi(-z)=\sin(-z)-5(-z)^3=-\sin z+5z^3$

$=-[\sin z-5z^3]=-\varphi(z)$.

10.25. 若$\psi(x)=2\sin x-3\cos x$，证明

$\psi(x+2n\pi)=\psi(x)$，其中n为整数.

证：$\psi(x+2n\pi)=2\sin(x+2n\pi)-3\cos(x+2n\pi)$

$=2\sin x-3\cos x=\psi(x)$.

10.26. 若$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ 1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

求 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f\left(\frac{5}{4}\right)$，$f(2)$.

解明$f(0)=0$；　$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$；　$f(1)=\frac{1}{2}$；

$f\left(\frac{5}{4}\right)=1$；　$f(2)=1$.

10.27. 设$\varphi(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

求　$\varphi(3)$，$\varphi(2)$，$\varphi(0)$，$\varphi(0.5)$，$\varphi(-0.5)$.

解：　$\varphi(3)=3-1=2$；　$\varphi(2)=2-1=1$；

$\varphi(0)=2$；　$\varphi(0.5)=2$；

$$\varphi(-0.5)=2^{-0.5}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10.28. 设$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$

求$\varphi(1)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$.

解：$(1)=0$；　　$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|-\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\varphi(-2)=0$

函数的定义域

在题10.29—10.58中指出函数的定义域：

10.29. $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$.

解：分母不可为0，即$x^2-3x+2\neq 0$，

$(x-2)(x-1)\neq 0$，$\therefore$ $x_1\neq 1$，$x_2\neq 2$.

因此定义域为$(-\infty,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ +\infty)$.

10.30. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

解：$\because$　$x^2+1>0$.故定义域为$(-\infty,\ +\infty)$

10.31. $y=\sqrt{3x+4}$.

解：　$3x+4\geqslant 0$，　　$\therefore$ $x\geqslant -\frac{4}{3}$.故定义域为

$$\left[-\frac{4}{3},\ +\infty\right].$$

10.32. $y=\sqrt{x^2-1}$.

解：$\because$ 要 $x^2-1\geqslant 0$，$\therefore x^2\geqslant 1$，即 $-\infty<x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x<+\infty$，故定义域为 $(-\infty, -1]$，$[1, +\infty)$．

10.33．$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$．

解：要使此二项均有意义，需 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$，
$\therefore$ $x^2\leqslant 1$，故 $x\neq 0$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 1$，即定义域为 $[-1, 0)$，$(0, +1]$．

10.34．$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$．

解：$\because \dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ $\left\{\begin{array}{l}1-x>0\\1+x\geqslant 0\end{array}\right.$ $\therefore \left\{\begin{array}{l}x<1\\x\geqslant -1\end{array}\right.$

$\therefore$ $-1\leqslant x<1$．或 $\left\{\begin{array}{l}1-x>0\\1+x\leqslant 0\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x>1\\x\leqslant -1\end{array}\right.$ 无解

$\therefore$ 定义域为 $[-1, 1)$．

10.35．$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$．

解：$\because 1-x^2\neq 0$，且 $x+2\geqslant 0$，即是 $x^2\neq 1$．$x\geqslant -2$．
故定义域为 $[-2, -1)$，$(-1, 1)$，$(1, +\infty)$．

10.36．$y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$．

解：$\because x\geqslant 0$，$x-2\neq 0$ 故定义域为 $[0, 2)$，$(2, +\infty)$．

10.37．$y=\sqrt{x^2-4x+3}$．

解：$\because$ $x^2-4x+3\geqslant 0$，即 $(x-1)(x-3(\geqslant 0$，故
$x-1\geqslant 0$，$x-3\geqslant 0$，即 $x\geqslant 3$，
或 $x-1\leqslant 0$，$x-3\leqslant 0$，即 $x\leqslant 1$．
定义域为 $(-\infty, 1]$，$[3, +\infty)$．

10.38．$y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}$．

解：$\because$ $1-x>0$，且$\lg(1-x)\neq 0$，即$1-x\neq 1$

$\therefore$ $x<1$且$x\neq 0$.故定义域为$(-\infty,\ 0)$，$(0,\ 1)$。

10.39. $y=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$.

解：$\because$ $1-x\neq 0$，$\dfrac{1}{1-x}>0$，且$x+2\geqslant 0$。

即$x<1$且$x\geqslant -2$，故定义域为$[-2,\ 1]$。

10.40. $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$.

解$\because$ $\dfrac{1+x}{1-x}>0$ 且$1-x\neq 0$ 即

i）$x\neq \pm 1$，ii）$1+x>0$，$1-x>0$

或$1+x<0$，$1-x<0$.（无解）

由ii）$-1<x<1$ 故定义域为$(-1,\ 1)$。

10.41. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\log_a(2x-3)$ （$a>1$）.

解：$\because$ i）$x-2\neq 0$ 且 ii）$2x-3>0$ $\therefore$ i）$x\neq 2$

iI） $x>\dfrac{3}{2}$故定义域为（$\dfrac{3}{2}$，2），（2，$+\infty$）

10.42. $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$.

解：$\because$i）$x-4\geqslant 0$． ii）$6-x\geqslant 0$

iii）$\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}>0$

即i）$x\geqslant 4$，4，ii）$x\leqslant 6$故定义域$[4,\ 6]$。

10.43. $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$

解：$\because$ i）$\dfrac{5x-x^2}{4}>0$， ii）$\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)\geqslant 0$。

即i）$5x-x^2>0$， ii）$\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$.

i）$0<x<5$， ii）$5x-x^2\geqslant 4$，即$x^2-5x+4\leqslant 0$，

$(x-4)(x-1)\leqslant 0$ $1\leqslant x\leqslant 4$，从而定义域为$[1,\ 4]$.

10.44. $y=\log_2(\log_2 x)$.

解：首先$\log_2 x$需要有意义$\therefore x>0$，其次$\log_2(\log_2 x)$有意义，故$\log_2 x>0$，$\therefore x>1$，故综上述要求，定义域为$(1,\ +\infty)$.

10.45. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

解：首先$\sin x\geqslant 0$，$\therefore 2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$，

$$(n=0,\ \pm 1,\ \cdots)$$

又因$16-x^2\geqslant 0$，$x^2\leqslant 16$，即$-4\leqslant x\leqslant 4$.

故定义域为$[-4,\ -\pi]$，$[0,\ \pi]$.

10.46. $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$.

解：$\because$ $\sin x-\cos x\neq 0$. 即 $\sin x\neq\cos x$，

或$\operatorname{tg}x\neq 1$，即 $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ $(n=0,\ \pm 1,\ \cdots\cdots)$

故定义域为$\left(n\pi+\dfrac{\pi}{4},\ (n+1)\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\cdots).$$

10.47. $y=\operatorname{tg}(x+1)$.

解：$\because$ $x+1\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}-1$.

$$(n=0,\ \pm 1,\ \cdots\cdots,\ )$$

$\therefore$ 定义域为$\left((n-1)n+\dfrac{\pi}{2}-1,\ n\pi+\dfrac{\pi}{2}-1\right)$

$$(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots).$$

10.48. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$.

解：$\because \sqrt{x}\neq n\pi$（$n=0$, $\pm1\cdots$）又 $x>0$, $\therefore x\neq n^2\pi^2$（$n=0$, ±1, $\cdots$）及 $x>0$, $\therefore$ 定义域为（$n^2\pi^2$, $(n+1)^2\pi^2$）

（$n=0$, 1, 2, $\cdots$）.

10.49. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

解：首先 $\cos x>0$. 即 $2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,

（$n=0$, ±1, $\pm2\cdots$）.

定义域为 $(2n\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2n\pi+\dfrac{\pi}{2})$（$n=0$, $\pm1\cdots$）.

10.50. $y=\arccos\sqrt{2x}$.

解：首先 $2x\geqslant0$, $\therefore x\geqslant0$,（注意到 $\arccos x$ 为单减函数）

其次 $0\leqslant\arccos\sqrt{2x}\leqslant\pi$ 即 $1\geqslant\sqrt{2x}\geqslant-1$.

$\therefore 2x\leqslant1$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$. 故定义域为 $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$.

10.51. $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$.

解：$\because \quad -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin\dfrac{x-3}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \quad -1\leqslant\dfrac{x-3}{2}\leqslant1$ 即 $-2\leqslant x-3\leqslant2$

$\therefore \quad 1\leqslant x\leqslant5$. 故定义域为 $[1,\ 5]$

10.52. $y=\arcsin(2+3^x)$.

解：$\because \quad -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(2+3^x)\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore -1\leqslant2+3^x\leqslant1$.

$\therefore \quad -3\leqslant3^x\leqslant-1$, 故无意义，这个函数是无定义域的，即无意义.

10.53. $y=\lg\sin x$.

解：$\because \sin x>0$，即$2k\pi<x<(2k+1)\pi$，其中$(k=0,\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ $\therefore$定义域为$(2k\pi,\ (2k+1)\pi)$ $(k=0,\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

10.54. $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$.

解：对一切x，$x^2+1\geqslant 0$ $\sqrt{x^2+1}>|x|$

$\therefore\ x+\sqrt{x^2+1}>0$. $\therefore$ 定义域为$(-\infty,\ +\infty)$.

10.55. $y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$.

解：首先$3-x\geqslant 0$，$\therefore x\leqslant 3$，又因 $0\leqslant\arccos\dfrac{x-2}{3}\leqslant\pi$

$\therefore\ -1\leqslant x\leqslant 5$. $\therefore$定义域为$[-1,\ 3]$.

10.56. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1.\\ -1, & x>1.\end{cases}$

解：定义域为$(0,\ 1)$，$(1,\ +\infty)$.

10.57. $y=\begin{cases}x^2+1, & -1<x<2,\\ x^3-3, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$

解：定义域为$(-1,\ 2)$，$(2,\ 4)$

10.58. $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0,\\ x, & 0<x<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

解：定义域为$(-\infty,\ 0)(0,\ 2]$.

10.59. 设$y=f(x)$定义域是$[0,\ 1]$，问$(a)f(x^2)$，$(b)\ f(\sin x)$，$(c)f(x+a)(a>0)$，

$(d)f(x+a)+f(x-a)$，$(a>0)$的定义域是什么？

解：$(a)\because 0\leqslant x^2\leqslant 1$，$\therefore -1\leqslant x\leqslant 1$，即$f(x^2)$定义域是$[-1,\ 1]$；

(b) $\because 0\leqslant \sin x\leqslant 1$, $\therefore 2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$,（其中 $n=0, \pm1, \pm2\cdots$）$\therefore f(\sin x)$定义域为

$[2n\pi, (2n+1)\pi]$, $(n=0, \pm1, \pm2\cdots)$;

(c) $\because 0\leqslant x+a\leqslant 1$, $\therefore -a\leqslant x\leqslant 1-a$,

故$f(x+a)(a>0)$定义域是$[-a, 1-a]$;

(d) $\because 0\leqslant x+a\leqslant 1$, $0\leqslant x-a\leqslant 1$, 又$-a\leqslant x\leqslant 1-a$

又 $a\leqslant x\leqslant 1+a$, 若$0<a\leqslant\frac{1}{2}$, 则$a\leqslant x\leqslant 1-a$, 即

$f(x+a)+f(x-a)$定义域是$[a, 1-a]$,若$a>\frac{1}{2}$, 定义域不存在.

10.60. 已知从高为h处落下的重物所经过的路程是由公式$S=\frac{1}{2}gt^2$来确定.问(a)此函数的定义域为何?(b)解析式$S=\frac{1}{2}gt^2$的又定义域为何?

解:(a)函数中显然是有$t\geqslant 0$, 但一旦落至地面, 此公式就不成立了, 而此时刻$T=\sqrt{\frac{2h}{g}}$,故$t\leqslant T$,因此函数的定义域是$\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.(b)解析式的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

在题10.61—10.64中$f(x)$与$\varphi(x)$是否表示同一函数?说明其理由, 并在哪一区间它们是相同的

10.61. $f(x)=\frac{x}{x}$, $\varphi(x)=1$.

解: $f(x)$定义域是$(-\infty, 0)$和$(0, \infty)$, $\varphi(x)$定义域是$(-\infty, +\infty)$, $\therefore$ 它们定义域是不相同的, 不可认为是同一函数, 但在$(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$上$f(x)=\varphi(x)$.

10.62. $f(x)=\lg x^2$, $\varphi(x)=2\lg x$.

解：∵ $f(x)$定义域为$(-\infty,\ 0)$和$(0,\ +\infty)$而$\varphi(x)$定义域为$(0,\ +\infty)$，因此它们的定义域是不同的，不可认为是同一函数，但在$(0,\ +\infty)$上$f(x)=\varphi(x)$。

10.63. $f(x)=x$, $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$.

解：$f(x)$定义域为$(-\infty,\ +\infty)$而$\varphi(x)$定义域为$[0,\ +\infty)$，故不可认为是同一函数，但是在$[0,\ +\infty)$上，$f(x)$。

10.64. $f(x)=x$, $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$.

解：显然它们定义域都是$(-\infty,\ \infty)$，然而其函数值域不同，所以对应关系亦不同。不能从为是同一函数，但在$(0,\ +\infty)$上讨论，则可认为是相同的，

因为 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}=|x|=x=f(x)$.

建立函数关系

10.65. 温度计上摄氏0度对应华氏32度，摄氏100度对应华氏212度，试求将摄氏温标表为华氏温标的函数.

解：设摄氏温标为y，华氏为x，则

$$y=\frac{100-0}{212-32}(x-32)=\frac{5}{9}(x-32)$$

10.66. 设M为密度不均匀细杆OB上的一点，若OM的质量与OM的长度的平方成正比，又已知$OM=4$寸，其质量为8单位，试求OM的质量与长度间的关系.

解：设m表示质量，x表示长度由$m=kx^2$ ∵ $8=k4^2$

∴ $k=\dfrac{1}{2}$因此$m=\dfrac{x^2}{2}$（单位）.

10.67. 一物体作一直线运动，已知阻力的大小与物体运动的速度成正比，但方向相反.当物体以1米/秒速度运动时